GEODESIE
et
TRANSFORMATIONS GEODESIQUES

Serge BEUCHER
CMM – Mines ParisTech

Introduction

En MM, les éléments structurants peuvent être définis de différentes manières:

- Par leur géométrie
- De façon explicite (liste de points)
- A l'aide d'une distance:

$$B_\lambda (z) = \{y, d(z,y) \leq \lambda\}$$

→ Trivial lorsqu'on utilise la distance euclidienne

→ Beaucoup plus intéressant lorsqu'on utilise une distance non euclidienne (géodésique)

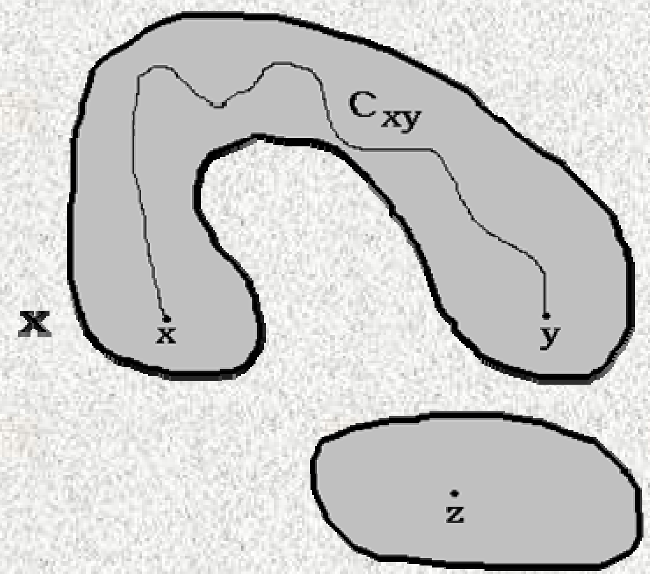
Plan de la présentation

- La distance géodésique
- Erosions, dilatations géodésiques ensemblistes
- Reconstruction, applications
- Extension aux fonctions
- Reconstruction de fonctions
- Distance géodésique généralisée

Notion de chemin

Définition

Si X est un espace topologique et si x et y sont deux points de X, on appelle **chemin d'origine** x **et d'extrémité** y toute application continue $\gamma\ [0,1] \rightarrow$ E telle que $\gamma(0)=x$ et $\gamma(1)=y$.
On dit que x et y sont reliés si et seulement s'il existe un chemin d'origine x et d'extrémité y.

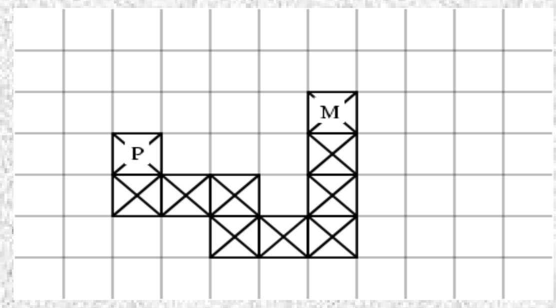


Chemin digital

X, image binaire, sous-ensemble de Z², munie d'une relation de voisinage ν (relation reflexive et symétrique).
Un chemin de longueur k - 1 est une séquence de k points tels que:

$$\forall i, \quad 1 \leq i \leq k-1 \quad p_{i+1} \, \nu \, p_i$$

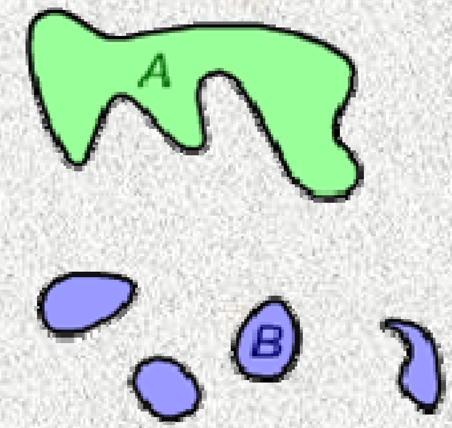
Exemple : chemin entre P et M en 4-connexité.



Connexité, composante connexe

Ensemble connexe

Soit un espace topologique X. X est connexe s’il n'est pas la réunion de deux ouverts non vides disjoints (ou de deux fermés non vides disjoints).
X est d’un « seul tenant »



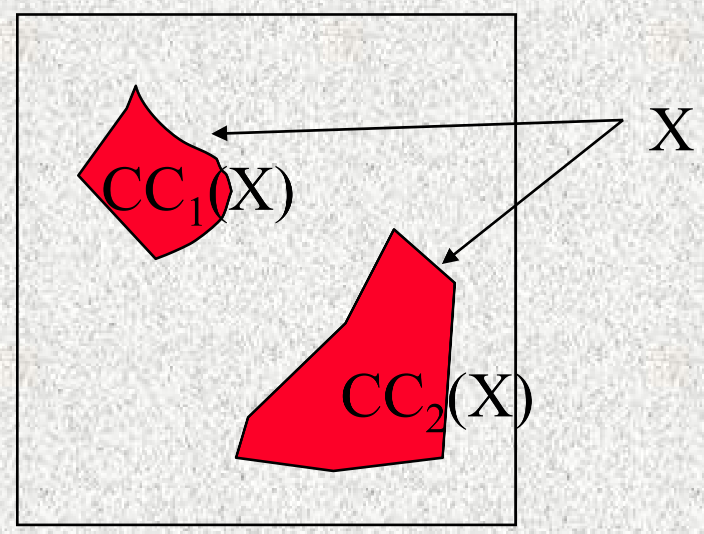
Ensemble connexe par arcs

Un ensemble X est dit connexe par arcs si et seulement si tout couple de points de X est relié par un chemin.

Une partie Y de E est dite connexe par arcs si et seulement si tout couple de points de Y est relié par un chemin restant dans Y.

Composante connexe

Étant donné un point x dans un ensemble X, la plus grande partie connexe contenant x s'appelle composante connexe C_x de x dans X.
« être connecté » définit une relation d'équivalence. .
Les classes d'équivalence sont appelées composantes connexes de X.

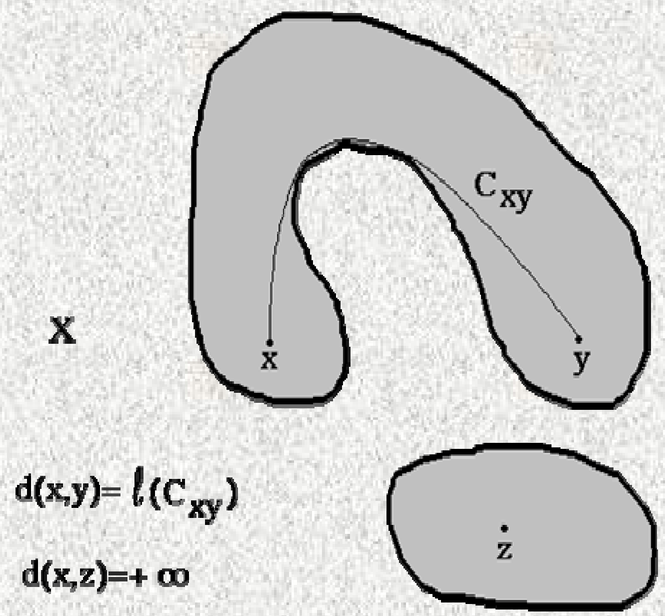


Distance géodésique

Définition

La distance géodésique d_X: E x E $\rightarrow$ R+, est définie dans l'espace géodésique X par:

$d_X(x,y)$ = Inf. des longueurs des chemins d'extrémités x et y inclus dans X
$d_X(x,y) = +\infty$, si aucun chemin n'existe

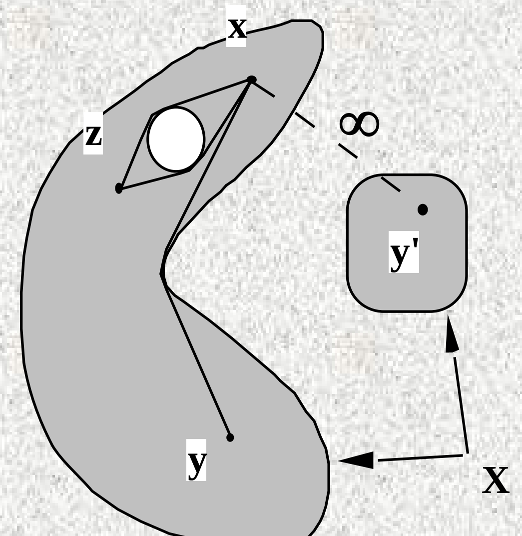


Propriétés

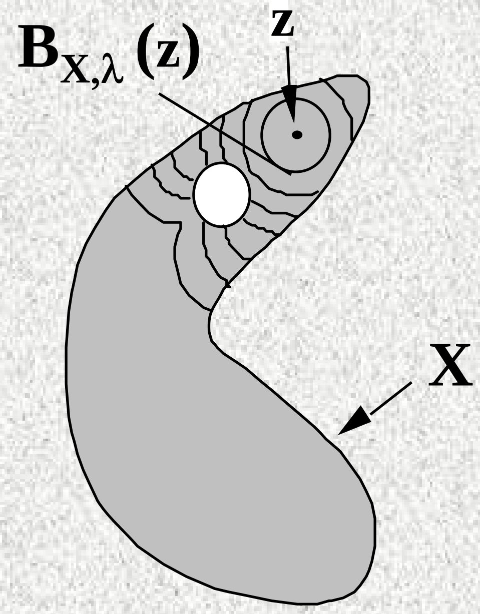
1) d_X est une distance:
   $d_X(x,y) = d_X(y,x)$
   $d_X(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$
   $d_X(x,z) \leq d_X(x,y) + d_X(y,z)$

2) La distance géodésique est toujours plus grande que (ou égale à) la distance euclidienne

3) Un chemin géodésique minimal peut ne pas être unique



Boules géodésiques

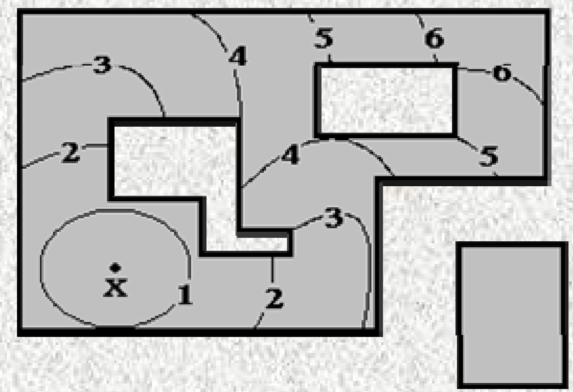


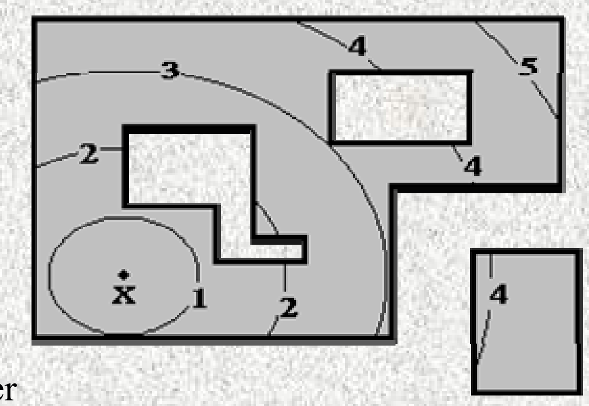
- L'introduction d'une distance géodésique permet de définir la notion de boule géodésique:

$$B_{X,\lambda}(z) = \{y,\ d_X(z,y) \leq \lambda\}$$

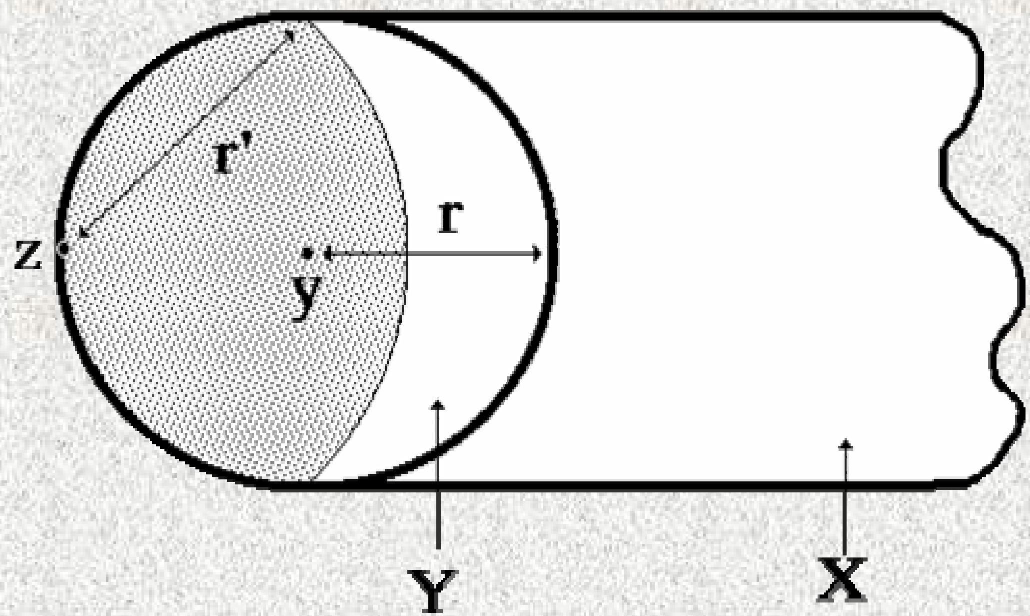
- Quand le rayon r augmente, la frontière des boules dessine un front de propagation dans le médium X.

- Pour un rayon λ donné, les boules $B_{X,\lambda}$ peuvent s'interpréter comme des éléments structurants dont la forme varie de place en place.





Particularités des boules géodésiques



X, espace géodésique

Attention!

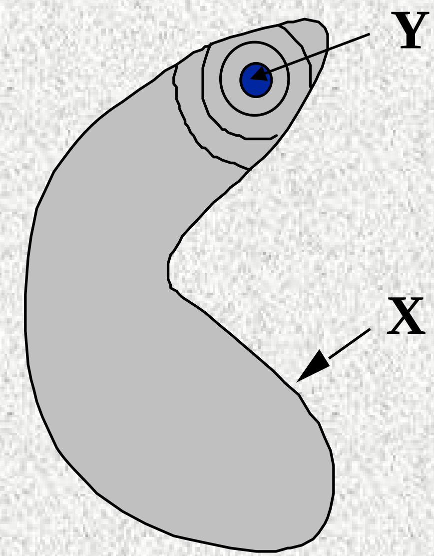
Une boule géodésique $B_X(y,r)$ de rayon r et implantée au point y peut contenir une autre boule $B_X(z,r')$ de rayon r' et implantée en z **<u>même si</u>** r'>r.

Dilatation géodésique ensembliste

La dilatation géodésique de taille λ de Y dans l'espace géodésique X est définie par:

$$\delta_{X,\lambda}(Y) = \cup \{B_{X,\lambda}(y) , y \in Y\}$$

$$\delta_{X,\lambda}(Y) = \{y \in Y : B_{X,\lambda}(y) \cap Y \neq \emptyset\}$$

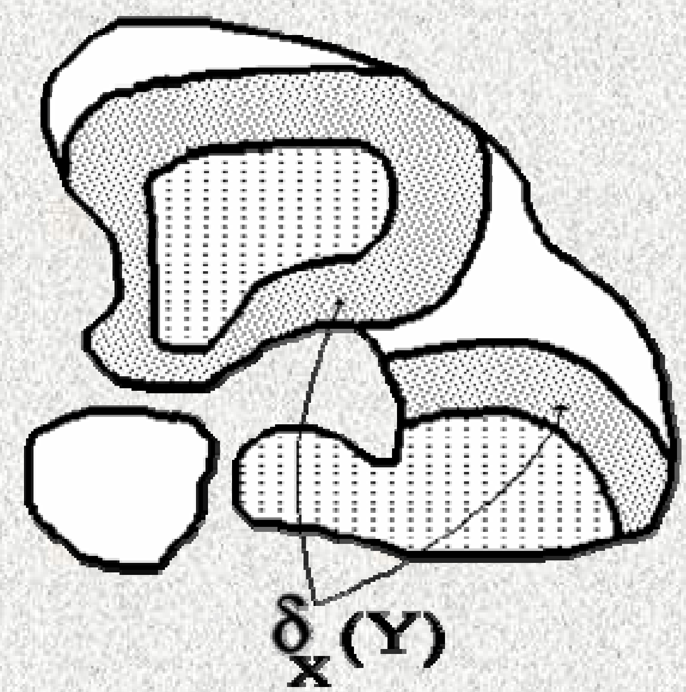


- Cette transformation a la propriété suivante:

$$\delta_{X,\lambda+\mu} = \delta_{X,\lambda}[\delta_{X,\mu}]$$

- δ est croissante et extensive
- δ est également croissante lorsqu'on la considère comme une transformation appliquée à l'espace géodésique X (Y fixé)

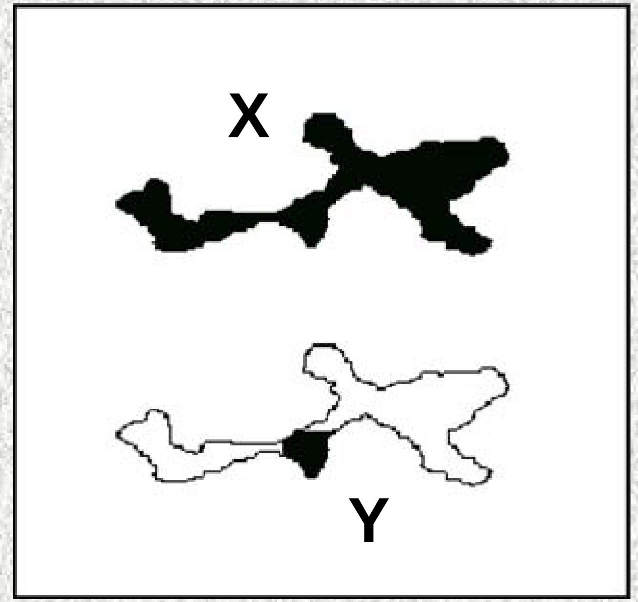
$$X \subset X' : \delta_X(Y) \subset \delta_{X'}(Y)$$



Dilatation géodésique digitale

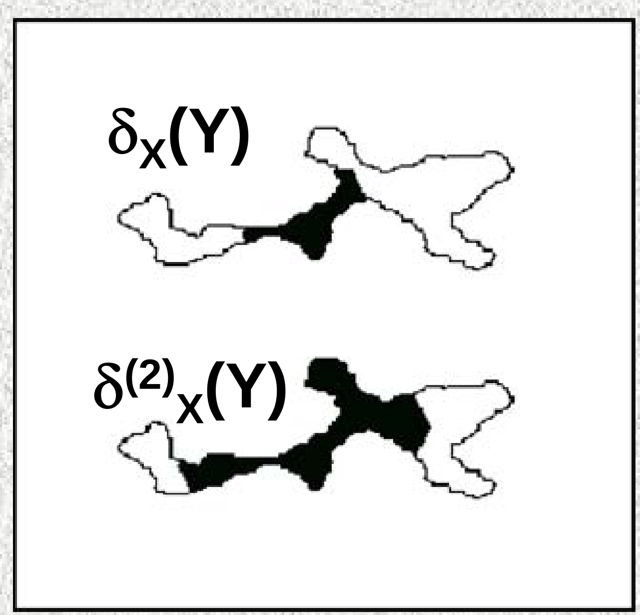
- Quand E est un espace métrique digital et quand $\delta(x)$ désigne la dilatation par une boule unitaire centrée au point x, alors la dilatation géodésique unitaire est définie par la relation:

$$\delta_X(Y) = \delta(Y) \cap X$$



- La dilatation de taille n s'obtient par itération:

$$\delta_{X,n}(Y) = \delta(\ldots\delta(\delta(Y) \cap X) \cap X) \ldots \cap X$$

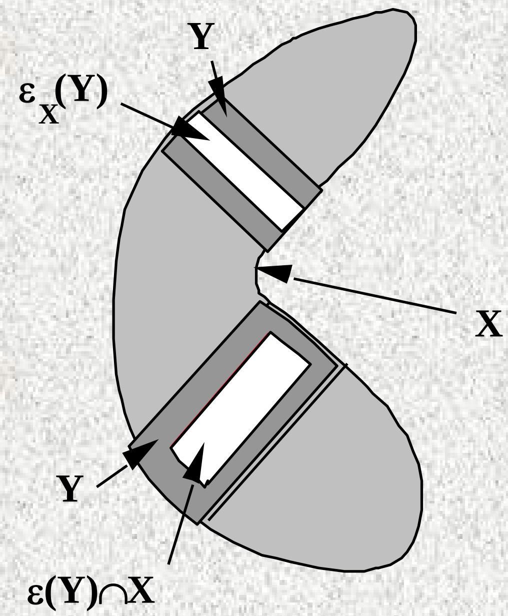


- Notons que les dilatations géodésiques ne sont pas invariantes par translation.

Erosion géodésique

L'érosion géodésique est définie par:

$$\varepsilon_{X,\lambda}(Y) = \{y \in Y : B_{X,\lambda}(y) \subset Y\}$$



Elle peut se définir par dualité (par adjonction ou par complémentation).
Le complément est défini par rapport à l'espace géodésique X ($Y \rightarrow X \setminus Y = X \cap Y^C$):

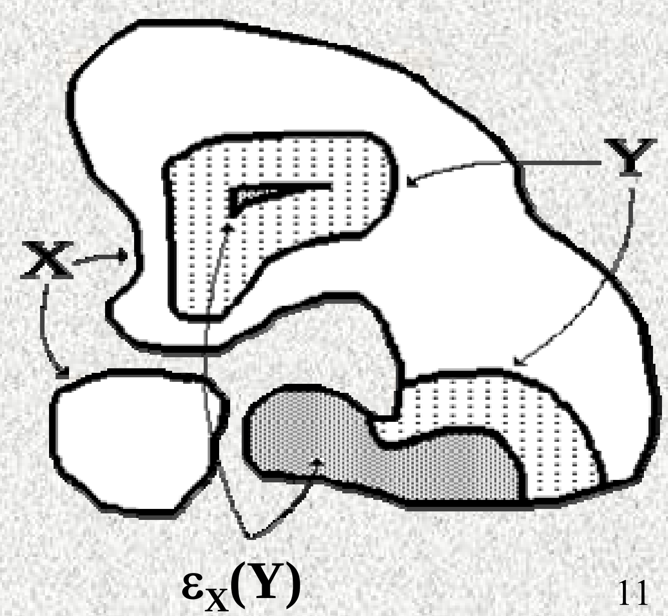
$$\varepsilon_X(Y) = X \setminus \delta_X (X \setminus Y)$$

L'érosion géodésique digitale élémentaire s'écrit alors:

$$\varepsilon_X(Y) = \varepsilon (X^c \cup Y) \cap X$$

ε est l'érosion euclidienne élémentaire.

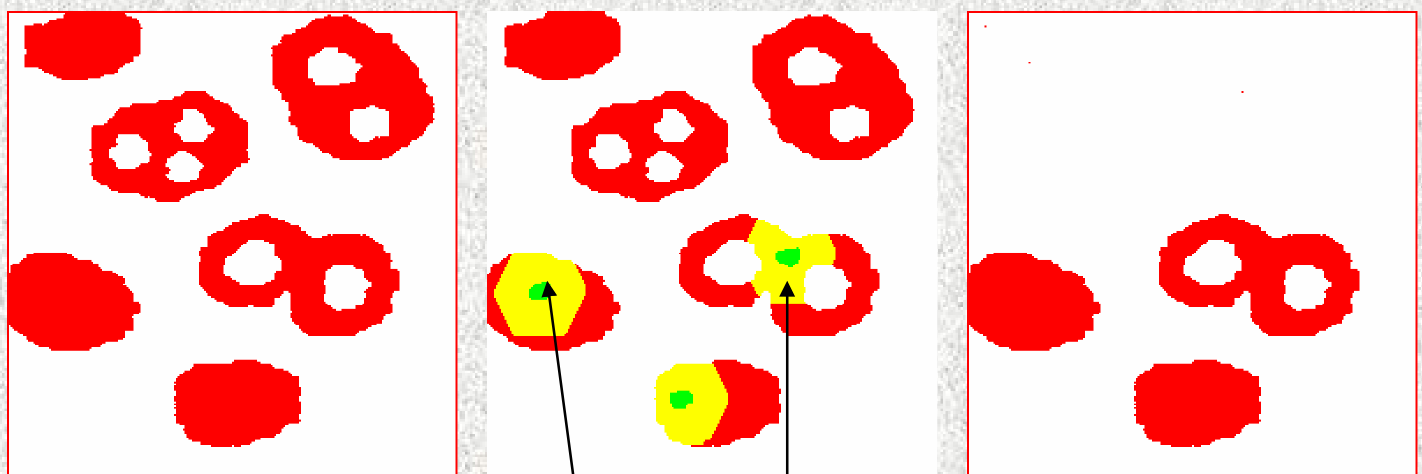
On notera la différence entre $\varepsilon_X(Y)$ et ε (Y)$\cap$X.



Reconstruction géodésique

Itération de dilatations géodésiques jusqu'à idempotence

$$R_X(Y) = \delta_X^{+\infty}(Y) = \lim_{\lambda \to +\infty} \delta_{X,\lambda}(Y)$$

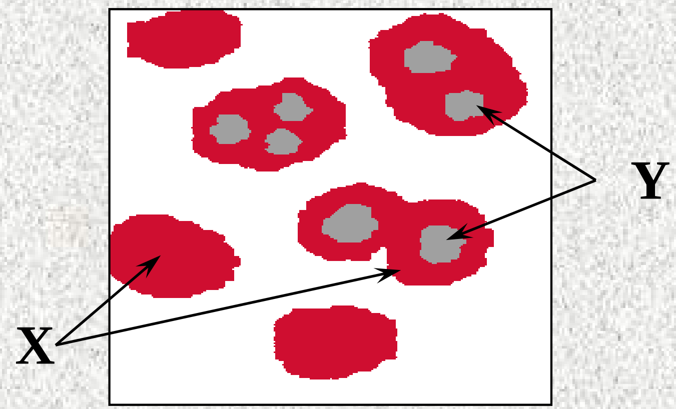


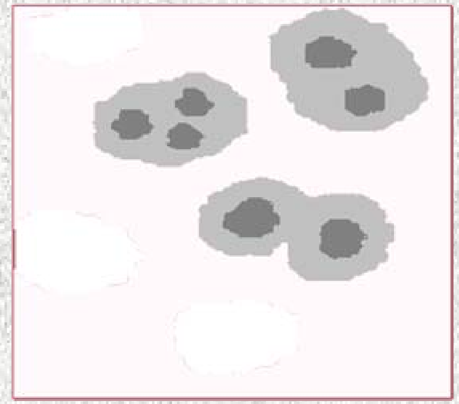
X **Y** **$\delta_{X,\lambda}(Y)$** **$R_X(Y)$**

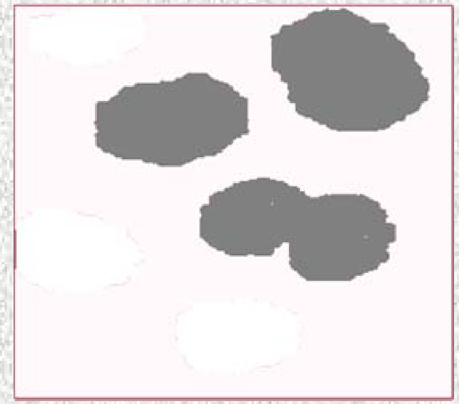
Cet opérateur permet la reconstruction de toutes les composantes connexes de X marquées par Y (reconstruction de X par Y).

Reconstruction et ouverture

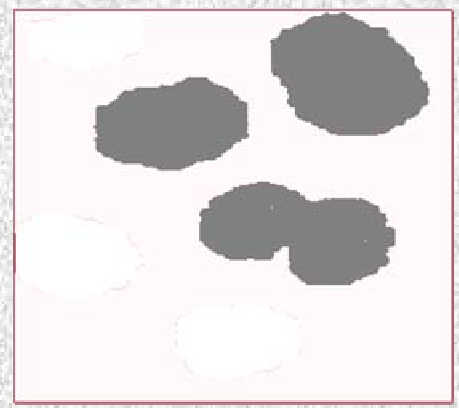
- A X donné, la reconstruction géodésique de X par Y est une fermeture par rapport à Y.







- Mais si on considère cette reconstruction comme une opération sur l’ensemble X (variable), pour un Y fixé, alors cette transformation est une ouverture



Usages de la reconstruction

- Si Y est un point isolé → ouverture ponctuelle, analyse individuelle de particules
- Si Y est une érosion (ou une ouverture) → Ouverture par reconstruction
- If Y est l'intersection du bord de l'image avec X → Sélection des composantes connexes de X touchant le bord de l'image
- If Y est l'intersection du bord de l'image avec le complémentaire de X → Reconstruction du fond

Analyse individuelle de particules

Algorithme

Tant que l'ensemble n'est pas vide

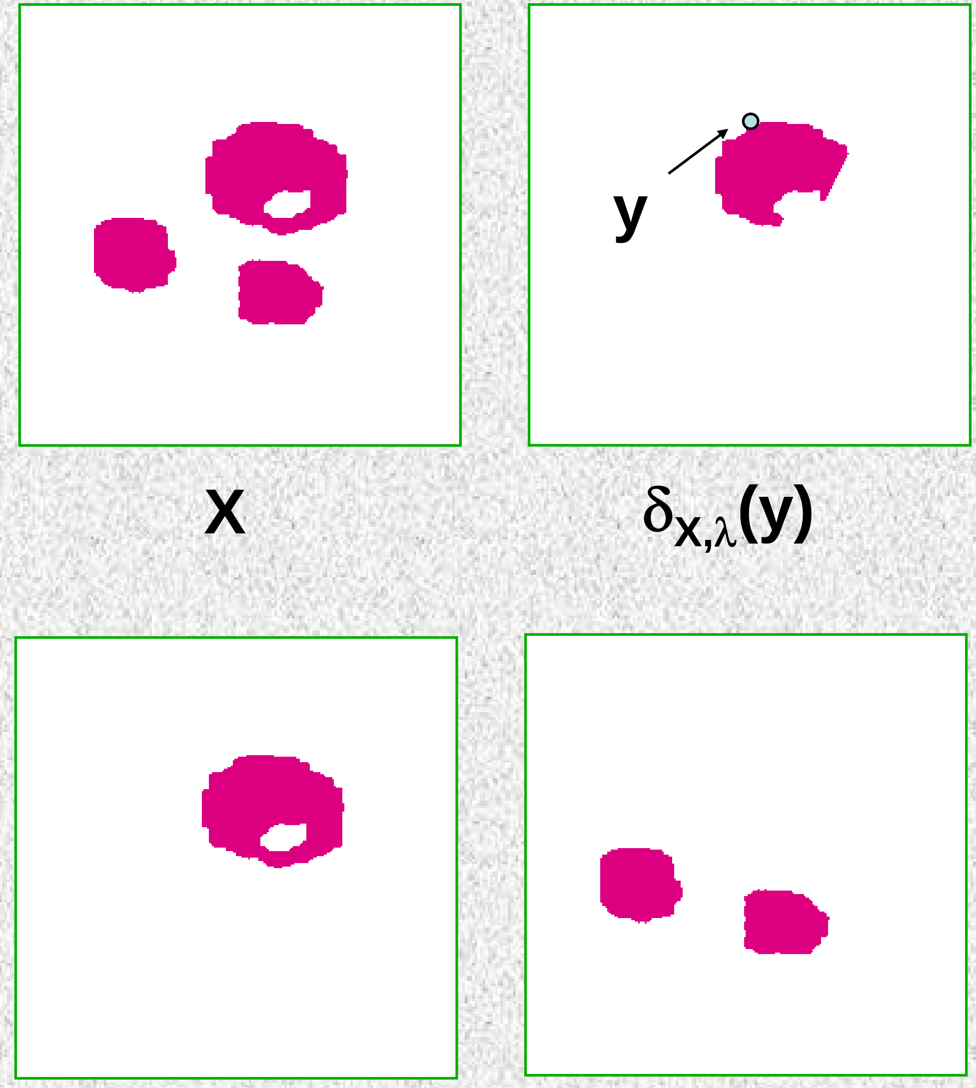
{ - extraire y, premier point de X (ordre de balayage vidéo ou autre);

- Z = $R_X(y)$ reconstruction de X par y;

- Analyse de Z;

- X := X\Y (différence)

}



X $\qquad$ $\delta_{X,\lambda}(y)$

$R_X(y)$ $\qquad$ X := X\Y

Filtre par érosion-reconstruction

- L'érosion $X \Theta B_\lambda$ supprime d'abord les composantes connexes de X de taille inférieure à λ (elles ne peuvent contenir un disque de taille λ)

- Puis l'ouverture $\gamma^{Rec}{}_X(Y) = R_X(Y)$ par l'ensemble marqueur $Y = X \Theta B_\lambda$ reconstruit les autres composantes connexes..

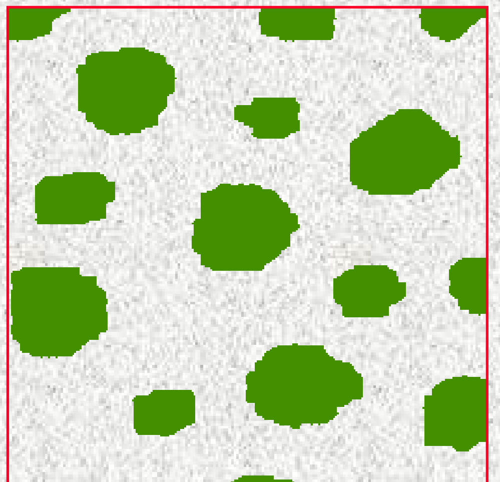
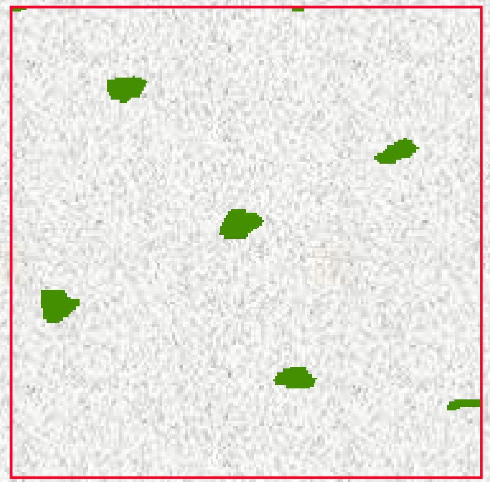
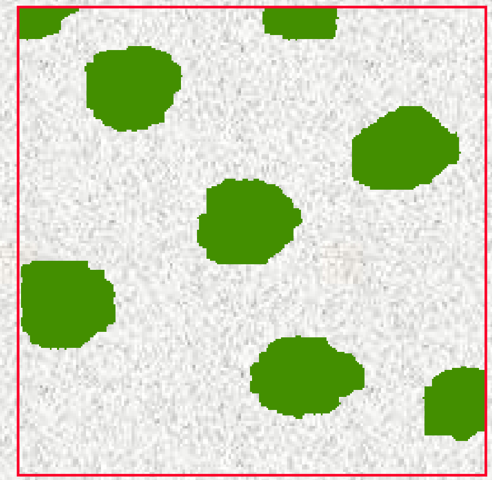


Image initiale



Erosion de X par un disque de taille λ



Reconstruction

L'opération est identique si $Y = \gamma_\lambda(X) = (X \Theta B_\lambda) \oplus B_\lambda$

Particules au bord du champ

- Soit Z l'ensemble des bords de l'image et X les grains analysés
- L'ensemble Y est la reconstruction de X par Z ∩ X
- La différence entre X et Y extrait les particules intérieures.

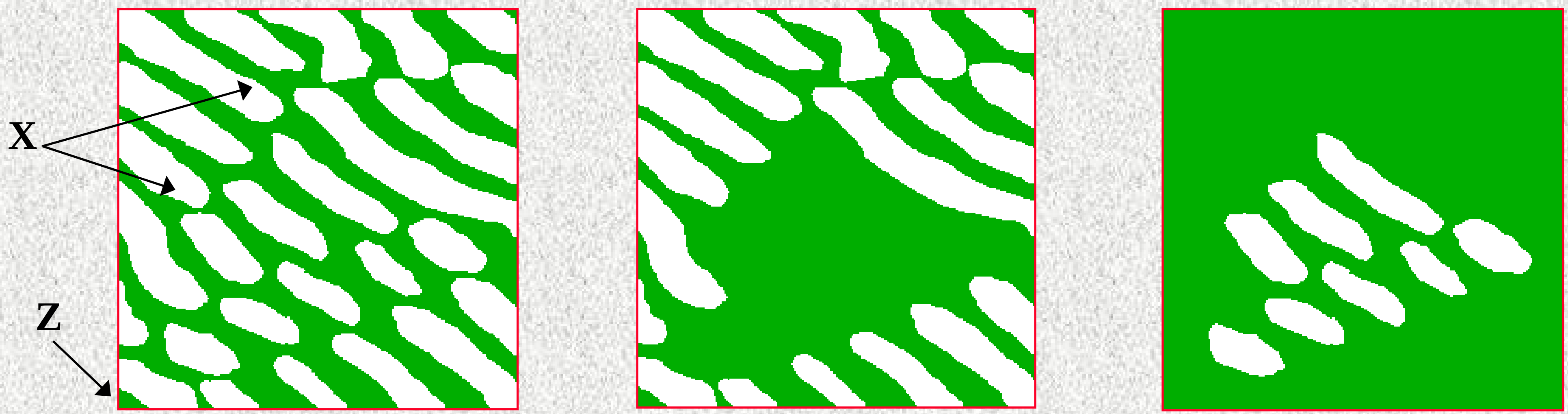


Image initiale

Particules touchant les bords

Différence

Bouchage de trous

- Soit Z l'ensemble des bords de l'image et X les grains analysés
- L'ensemble Y est la reconstruction de X par $Z \cap X^c$
- La complémentation de Y bouche les trous.

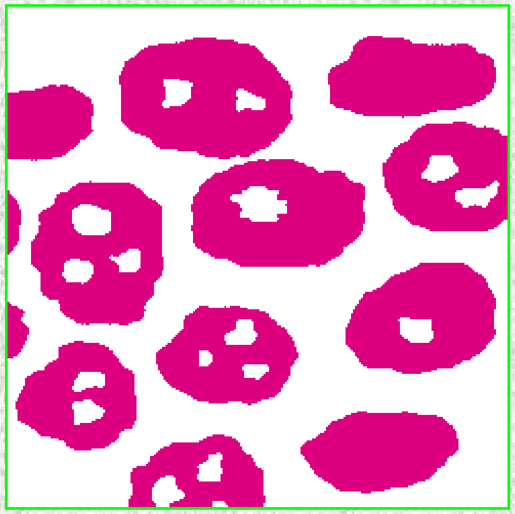
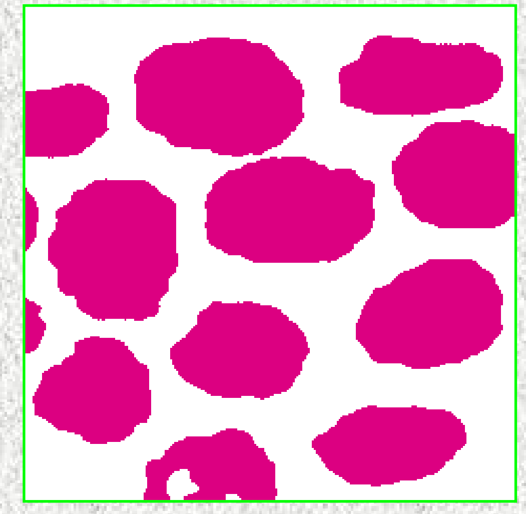


Image initiale X

Partie des bords touchant X



Y complémenté

Certaines particules coupant le bord du champ ne sont pas correctement bouchées… Suggestions d'amélioration?

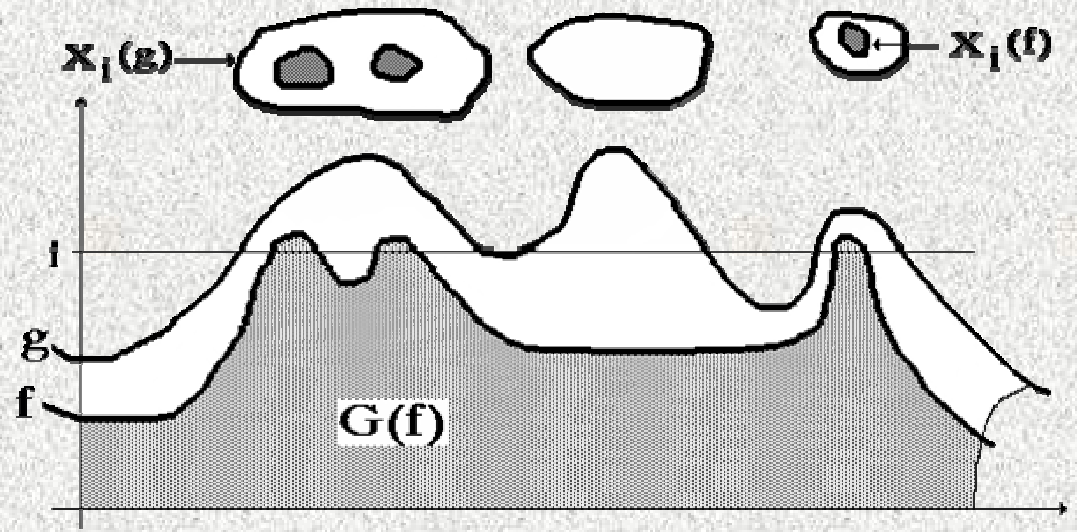
Géodésie numérique

Les transformations géodésiques ensemblistes peuvent être étendues aux fonctions numériques de deux manières:

• Soit par le biais des sections des fonctions en appliquant à ces sections des opérateurs géodésiques ensemblistes et en construisant de nouvelles fonctions à partir des nouveaux ensembles obtenus

$$X_i(f) = \{x : f(x) \geq i\}$$

$$X_i(g) = \{x : g(x) \geq i\}$$



• Soit en utilisant les fonctions numériques pour définir des distances géodésiques générales sur lesquelles on définit des opérateurs géodésiques généralisés

Dilatations géodésiques numériques

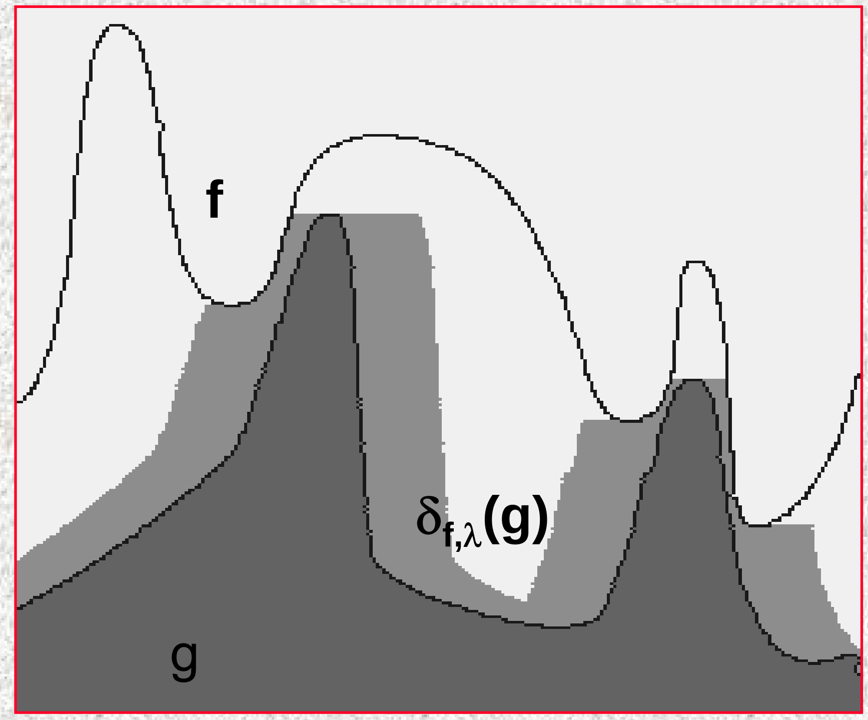
Définition

Soit f et g deux fonctions (images à teintes de gris), avec $g \leq f$.

Considérons les sections au niveau h de f et de g

La dilatation géodésique ensembliste de taille λ de chaque section au niveau h de g à l'intérieur de la section correspondante de f génère sur g une dilatation $\delta_{f,\lambda}(g)$.

Le sous-graphe de $\delta_{f,\lambda}(g)$ est l'ensemble des points du sous-graphe de f qui sont reliés à g par un chemin horizontal de longueur $\leq \lambda$.



La version digitale de cet opérateur utilise la dilatation géodésique élémentaire:

$$\delta_f(g) = \delta(g) \wedge f$$

Itérée n fois:

$$\delta_{f,n}(g) = \delta_f(\delta_f \; .... \; (\delta_f(g))).$$

Erosions géodésiques numériques

L'érosion géodésique numérique de f par g, avec g $\geq$ f se déduit de la dilatation géodésique par la dualité engendrée par l'inversion autour d'une valeur pivot m:

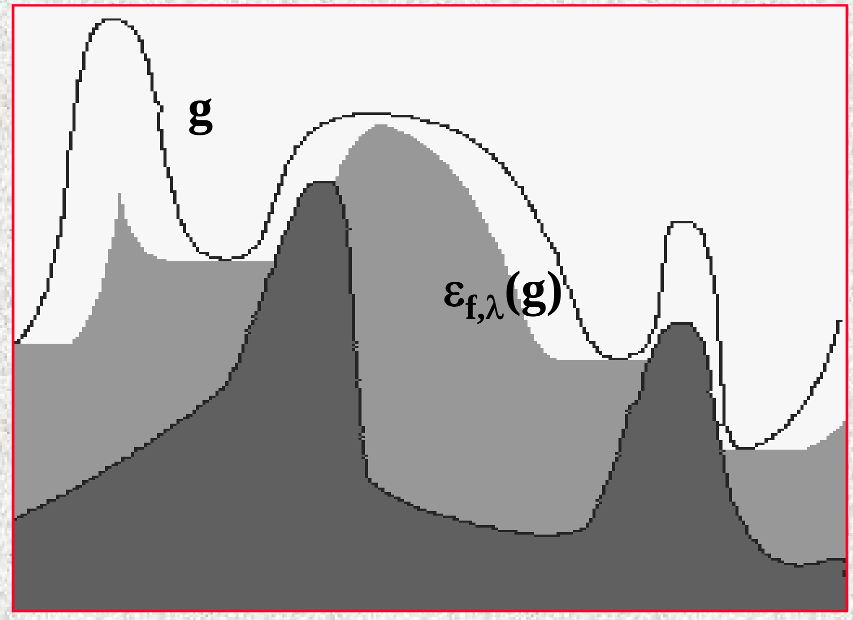
$$\varepsilon_{f,\lambda}(g) = m - \delta_{m-f,\lambda}(m - g)$$

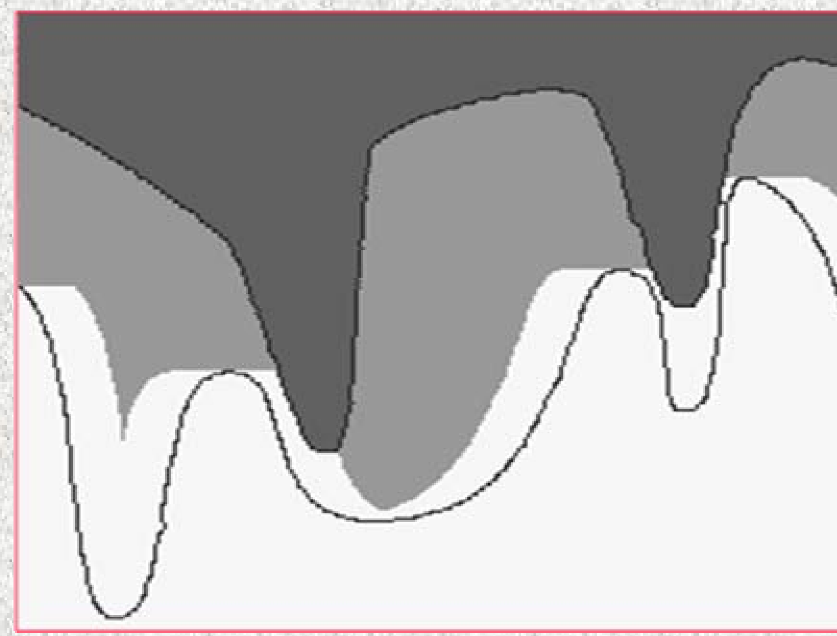
L'érosion géodésique digitale élémentaire s'écrit:

$$\varepsilon_f(g) = m - \{\delta(m - g) \wedge (m - f)\}$$

$$= \{m - \delta(m - g)\} \vee \{m - (m-f)\}$$

$$\varepsilon_f(g) = \varepsilon(g) \vee f$$

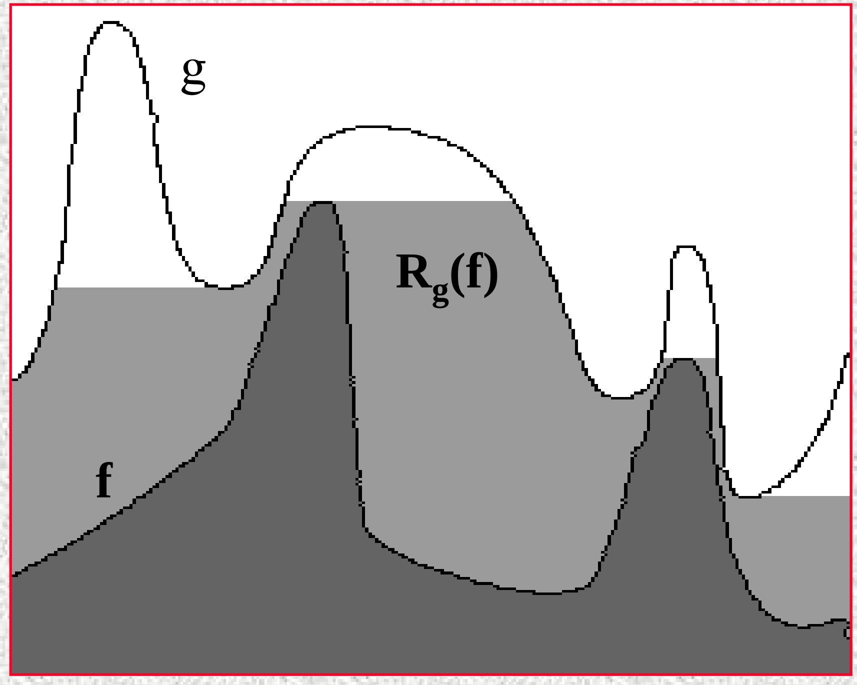




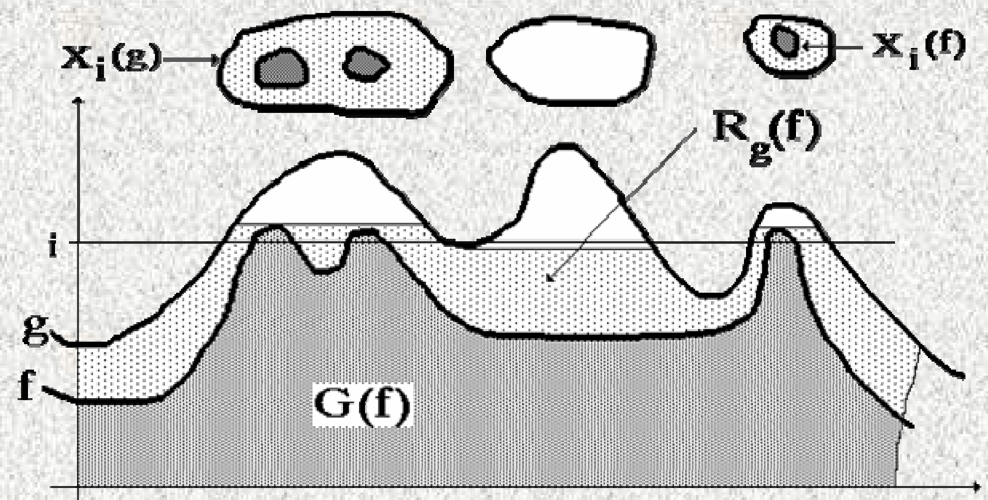
- Cette dualité est différente de la dualité par complémentation (transformées ensemblistes)
- Le résultat est indépendant de la valeur pivot m

Reconstruction géodésique numérique

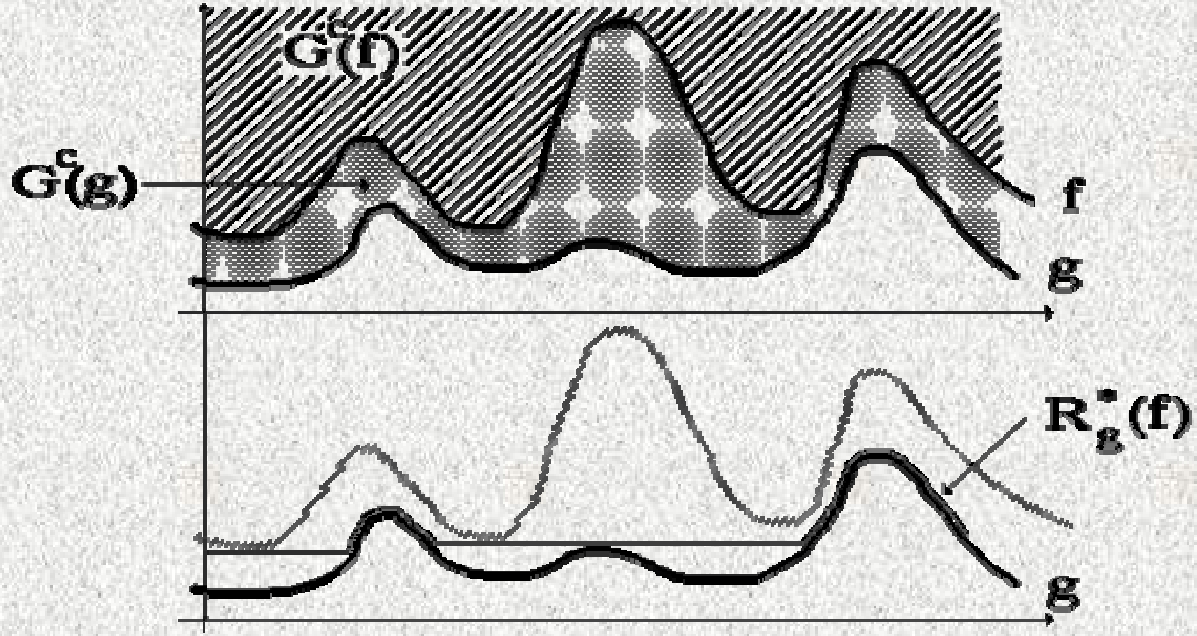
- La reconstruction géodésique de g à partir de f est le supremum des dilatations géodésiques de f à l'intérieur de g. On la note $R_g(f)$:
  $$R_g(f) = \vee \{ \delta_{g,\lambda}(f) ,\ \lambda>0 \}$$
- Cette transformation et sa duale sont de très importantes machines-outils en morphologie mathématique.



Chaque section au niveau i de la reconstruction est égale à la reconstruction binaire des sections au même niveau de g par les sections correspondantes de f.



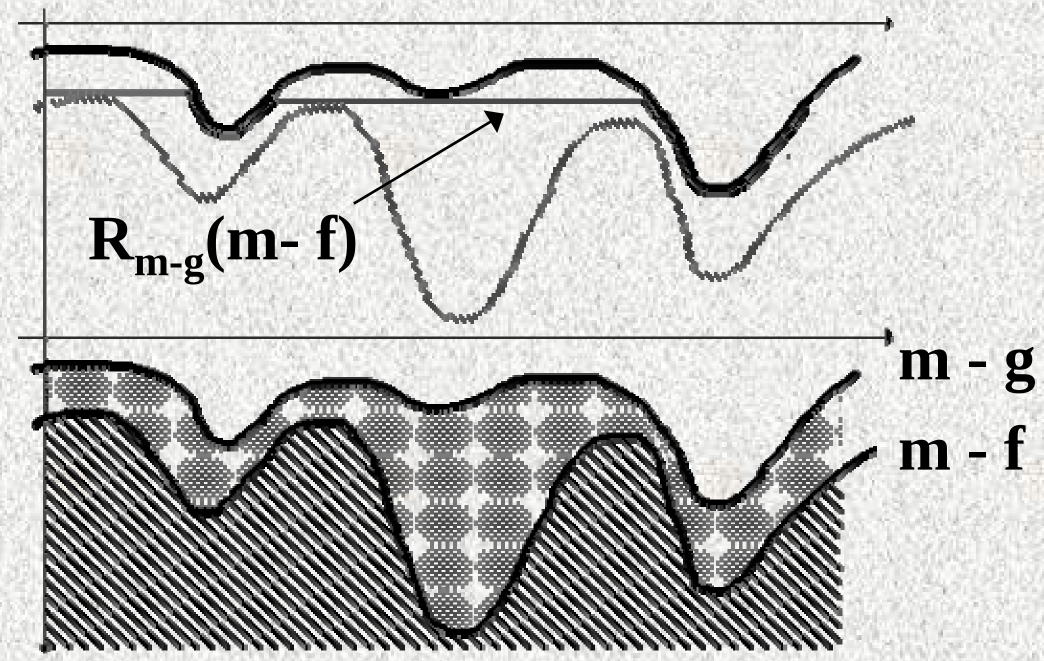
Reconstruction duale



La reconstruction duale $R^*_g(f)$ de g par f est l'inf des érosions géodésiques de f au-dessus de g

La dualité est identique à celle utilisée dans l'érosion géodésique (inversion autour d'une valeur pivot m):

$R^*_g(f) = m - R_{m-g}(m- f)$



Ouverture par érosion-reconstruction

Préservation des contours

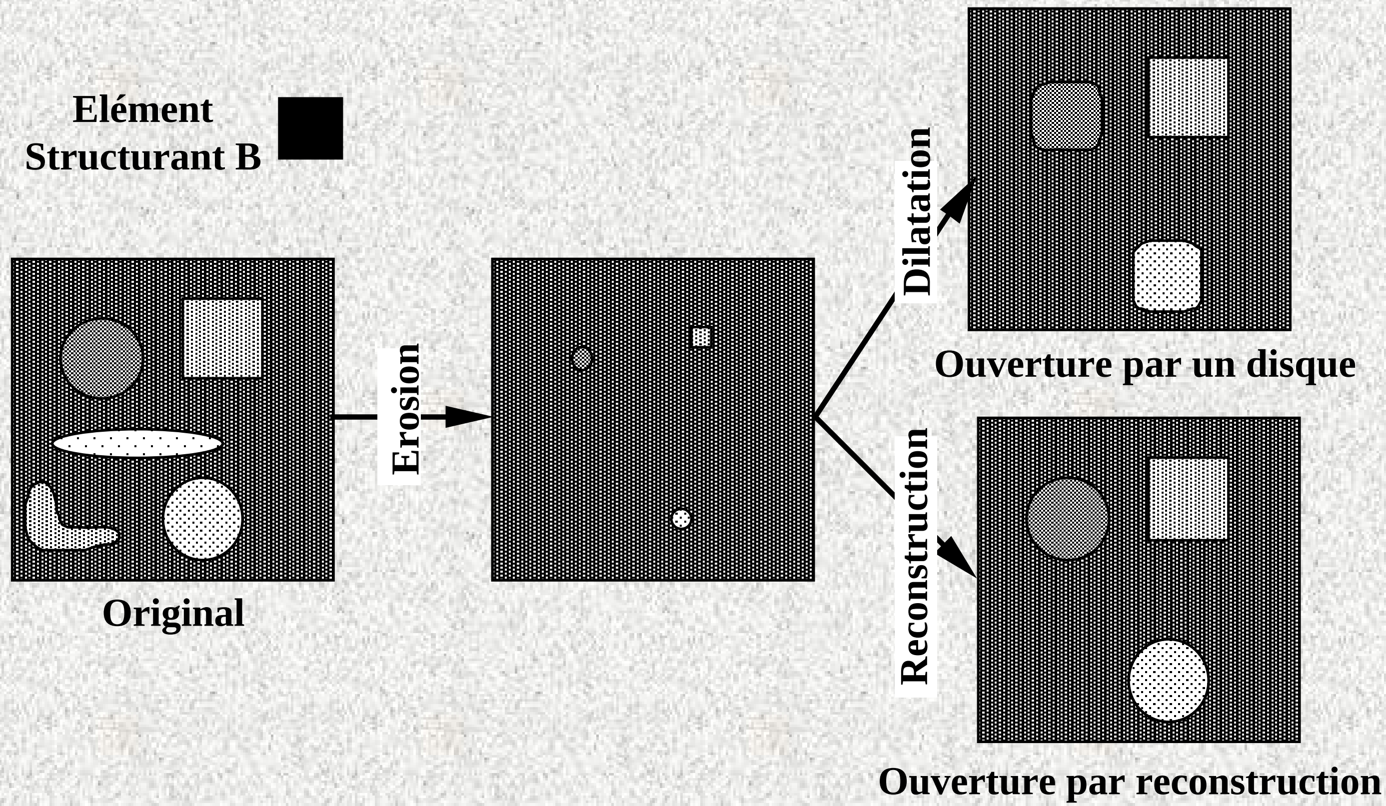
Tandis que l'ouverture classique modifie les contours, cette transformation permet de reconstruire efficacement et avec précision les contours des objets qui n'ont pas été totalement éliminés par l'érosion.

Algorithme

- L'espace géodésique est l'image originale.

- Le marqueur est l'érodé euclidien de l'image originale.

$$R_f\left[\varepsilon_B\left(f\right)\right]$$



Application à la rétinopathie

Le but de l'opération est de localiser et d'extraire les anévrismes rétiniens. Les opérateurs de reconstruction nous assurent que l'on peut supprimer exclusivement les petits pics isolés.

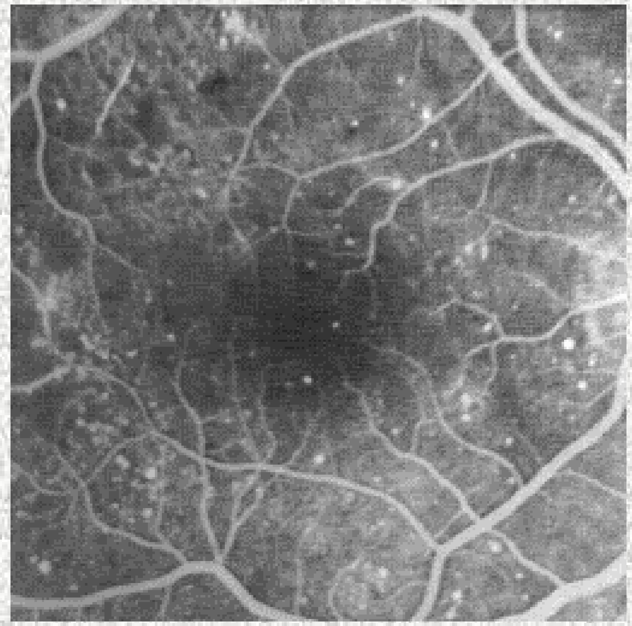
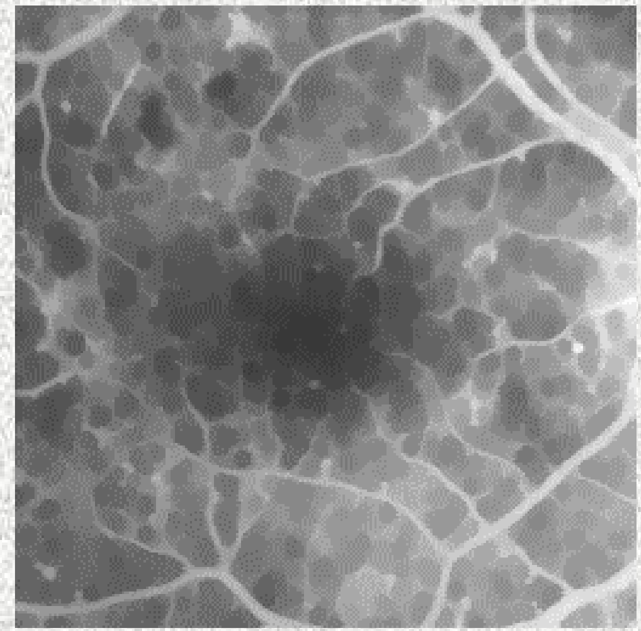
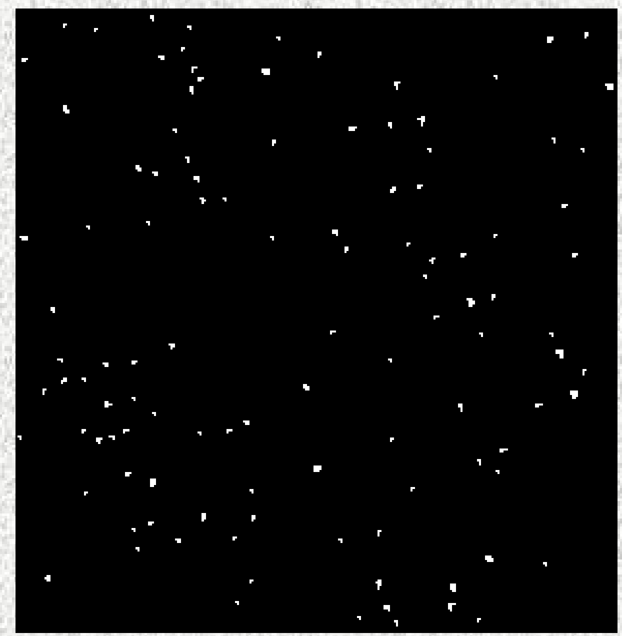


Image initiale



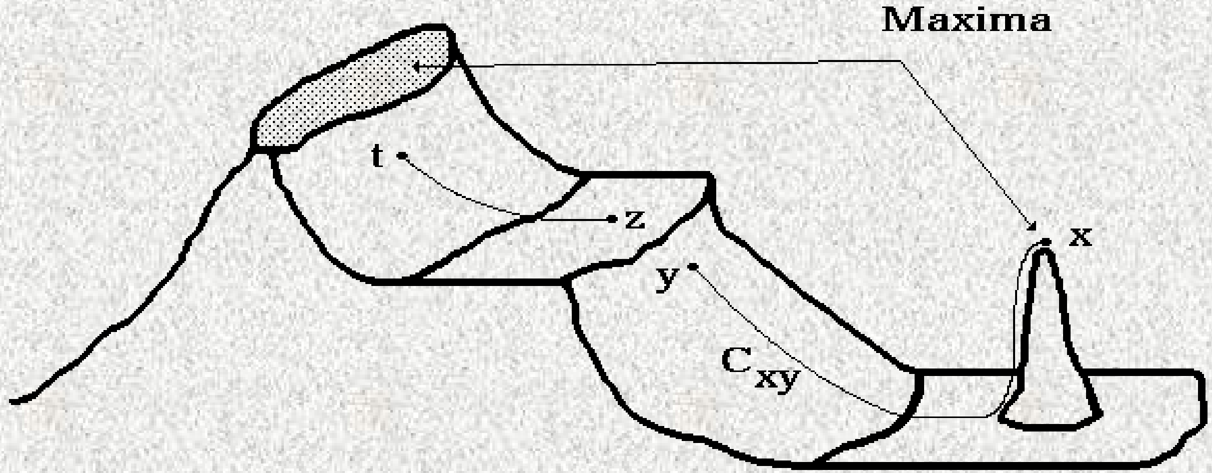
ouverture par érosion- reconstruction



différence des deux images suivie par un seuil

Maxima d'une fonction

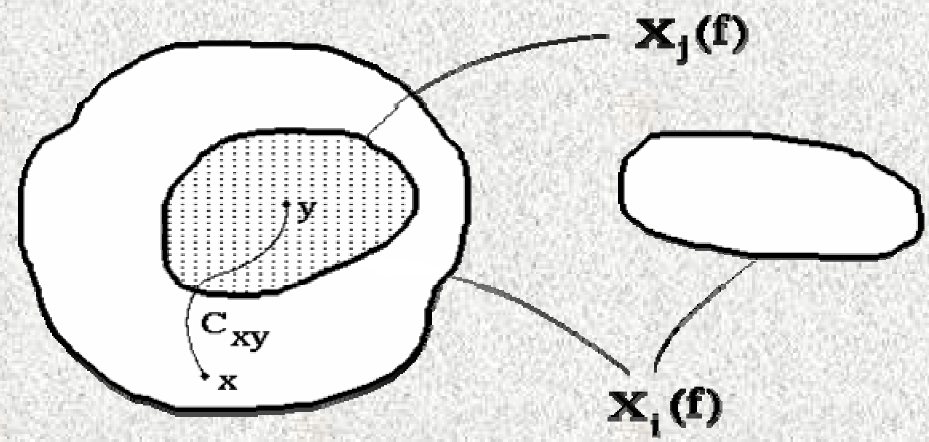
Un **maximum** d'une fonction f (ou maximum régional) est un sommet de la surface topographique, c'est-à-dire une région connexe (mais pas forcément réduite à un point) d'où il n'est pas possible, partant d'un point quelconque de cette région, de rejoindre un point de la surface d'altitude supérieure par un chemin jamais descendant.

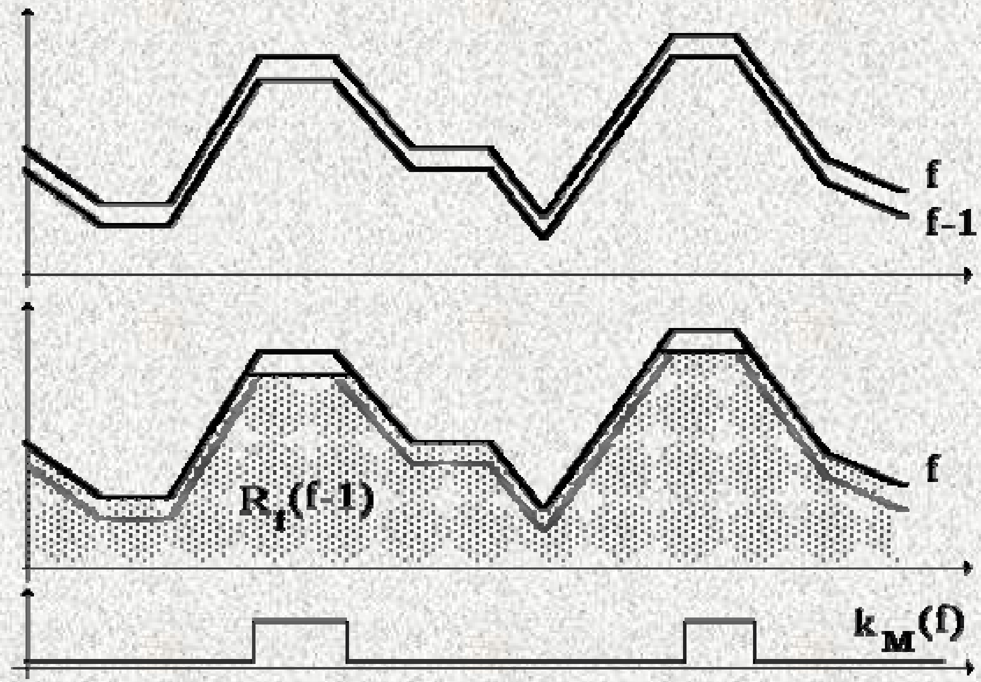


- Le point x est un maximum (pour rejoindre y, le chemin C_{xy} comprend des portions descendantes)
- Les points z, y, t n'appartiennent pas à des maxima

Détection des maxima

Un maximum de la fonction f à l'altitude i est une composante connexe de la section $X_i(f)$ de f ne contenant aucune composante connexe de toute section $X_j(f)$ où j > i.





En posant j=i+1, on montre que l'indicatrice $k_M(f)$ des maxima M de f est égale à:

$$k_M(f) = f - R_f(f-1)$$

Les maxima sont les résidus de la reconstruction géodésique de f par f -1

Une définition et une mise en évidence similaires (elles utilisent la reconstruction duale) existent pour les minima m de f:

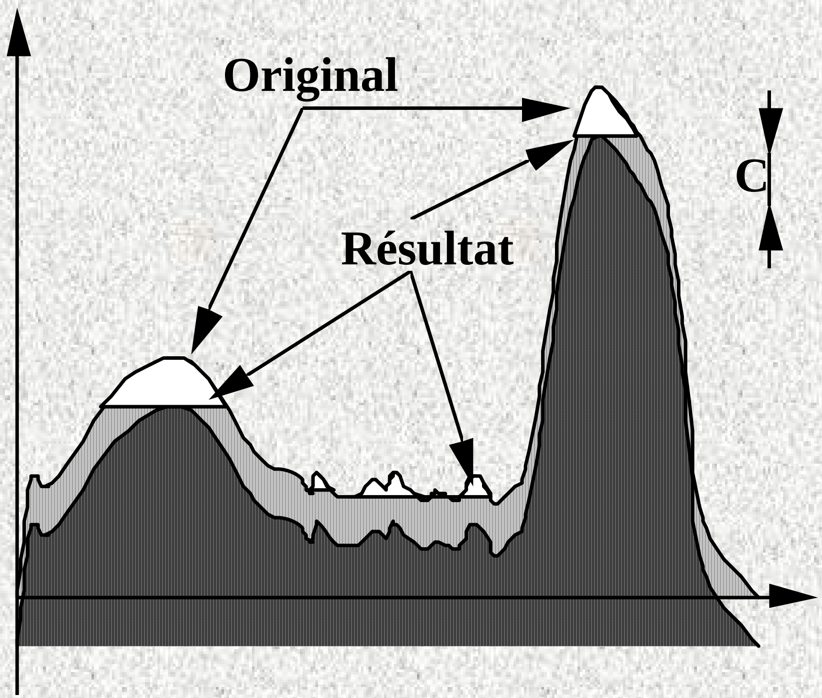
$$k_m(f) = R_f^*(f+1) - f$$

Maxima étendus

On peut restreindre l'extraction des maxima à ceux qui marquent des pics (ou dômes) de hauteur au moins égale à c. Les chemins descendants issus de ces maxima ont une hauteur au moins égale à c. On peut donc mettre ces maxima en évidence en reconstruisant la fonction f initiale avec la fonction f-c.

- On effectue la reconstruction $R_f(f-c)$
- La différence $f - R_f(f-c)$ fournit les maxima étendus de hauteur c de f
- Les maxima $M[R_f(f-c)]$ peuvent être déterminés
- Les maxima initiaux $M_c(f)$ de hauteur c de f sont alors égaux à:

$$M_c(f) = M(f) \cap M[R_f(f-c)]$$

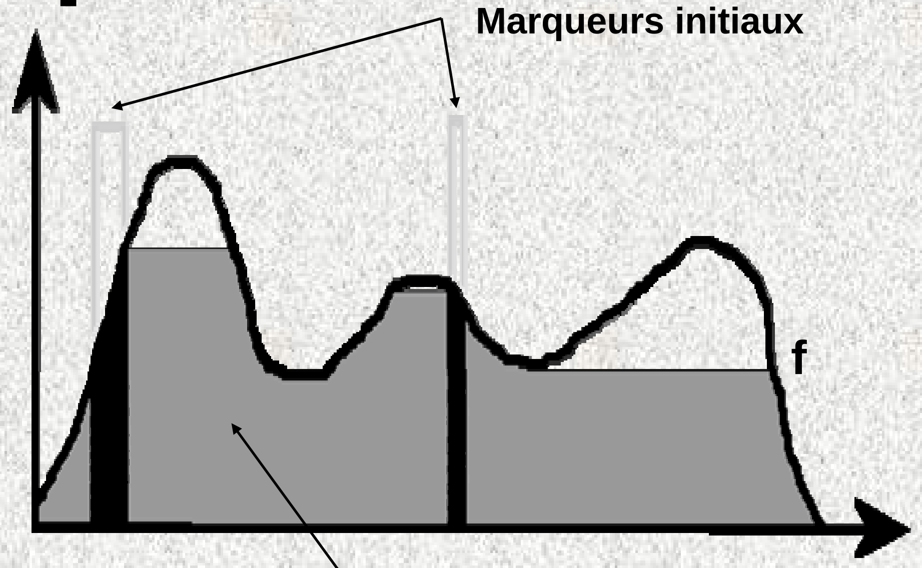


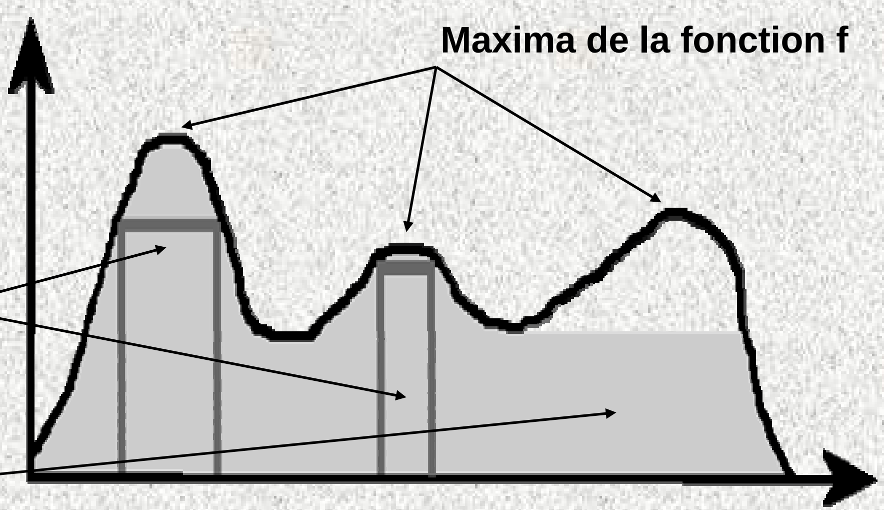
Reconstruction d’une fonction à partir de marqueurs

• On peut reconstruire une fonction à partir de n’importe quel ensemble de marqueurs (pas uniquement les maxima).

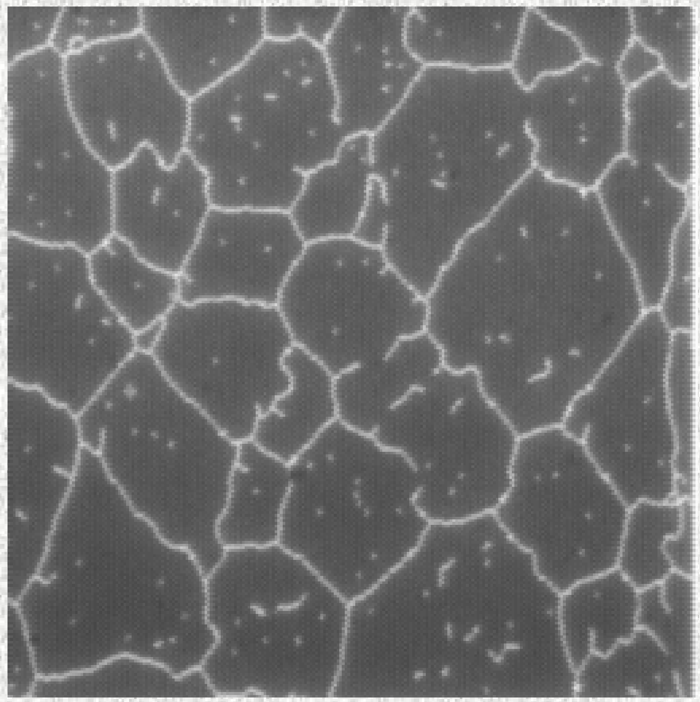
• Cette opération est une modification d’homotopie: ne sont conservés (partiellement) que les dômes marqués.

• La reconstruction est partielle. Reconstruire complétement les dômes qui n’ont pas été complétement arasés peut se faire par l’algorithme décrit précédemment .

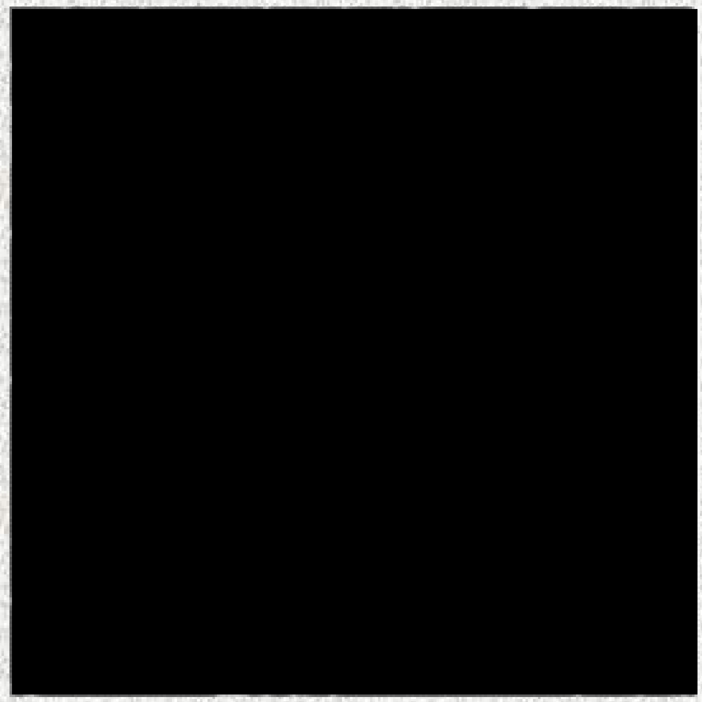




Application: élimination de composantes isolées



Grains d'alumine avec inclusions



Reconstruction de l'image à partir du bord du champ

Distance géodésique généralisée

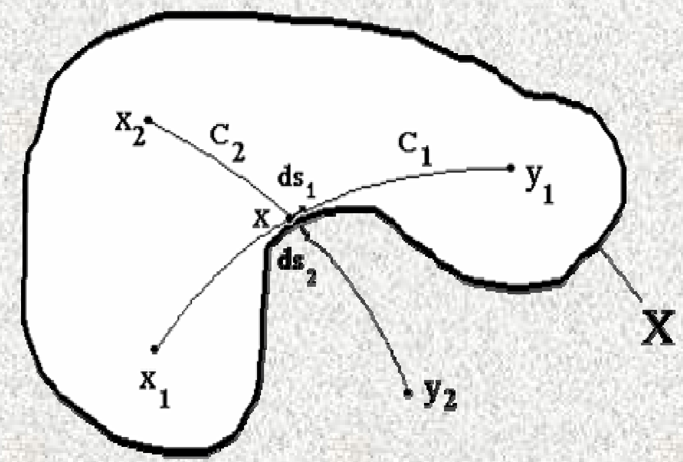
La distance géodésique entre x et y est égale à la longueur du chemin minimal C_{xy} entre deux points. Cette longueur peut également être exprimée en temps de parcours.

$$L(C_{xy}) = \int_{C_{xy}} ds = v \int_{C_{xy}} dt = vT(C_{xy})$$

Lorsque la vitesse v est constante, le temps de parcours total $T(C_{xy})$ du chemin peut être pris en compte pour mesurer sa longueur.

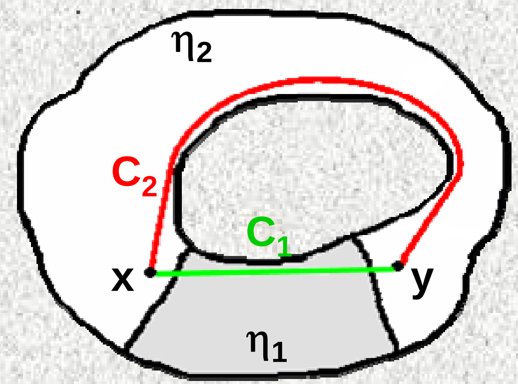
Si la vitesse n'est pas constante mais est remplacée par un champ de vitesses ω, la longueur d'un chemin C_{xy} sera alors définie par le temps de parcours de ce chemin.

$$T(C_{xy}) = \int_{C_{xy}} \frac{ds}{\omega} = \int_{C_{xy}} \eta \, ds$$



Tenseur des vitesses

L'inverse $\eta = 1/\omega$ de la vitesse est appelée réfringence. La donnée de ce champ de réfringence permet de calculer le temps de parcours de tout chemin et donc de définir la distance géodésique généralisée entre deux points x et y comme le temps de parcours minimal entre ces deux points.



C_2 est le plus court chemin

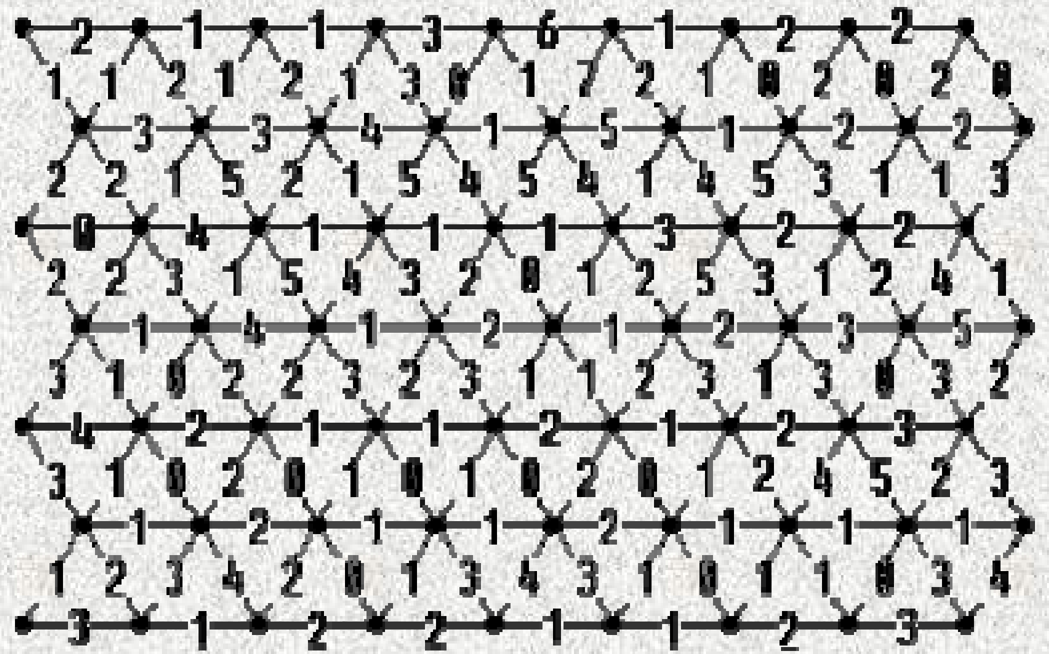
Distance géodésique généralisée digitale

- Dans un espace digital, le champ de réfringence est un graphe valué
- Ce champ peut être « dérivé » d'une quelconque fonction (image) f:

$$\eta(x, y) = |f(x) - f(y)|$$

- La distance peut éventuellement être remplacée par un écart (réfringence nulle)
- Cette distance peut être algébrique (non symétrique)

Exemple de graphe de réfringence en maille hexagonale



Dilatation géodésique généralisée

•La dilatation de temps n d'un ensemble Y dans un champ de réfringence η est un processus itératif

•Cette dilatation s'obtient par n dilatations de taille 1

Algorithme de dilatation élémentaire

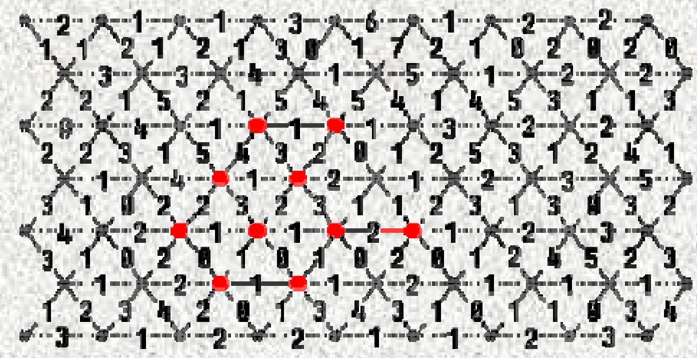
-Les points d 'écart nul avec Y sont ajoutés à Y

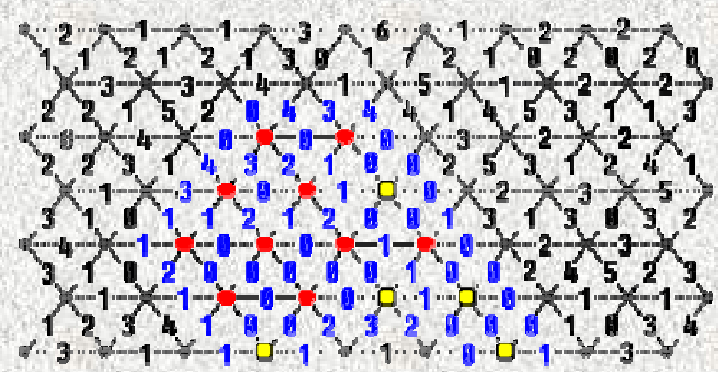
-La réfringence des arêtes du graphe connectés à Y est diminuée de 1

-Les points d'écart nul connectés à Y sont ajoutés à l'ensemble → Dilaté de taille 1

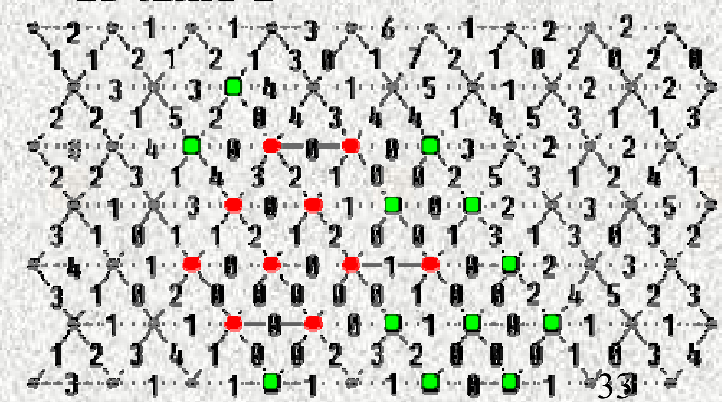
La procédure est réitérée avec les nouvelles valeurs du champ de réfringence

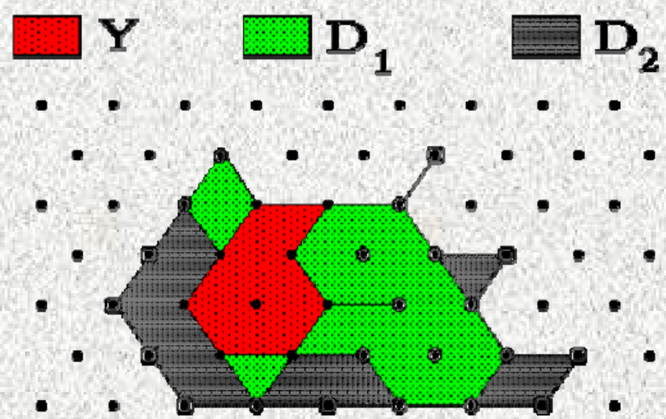
Points de Y





points ajoutés par dilatation de taille 1

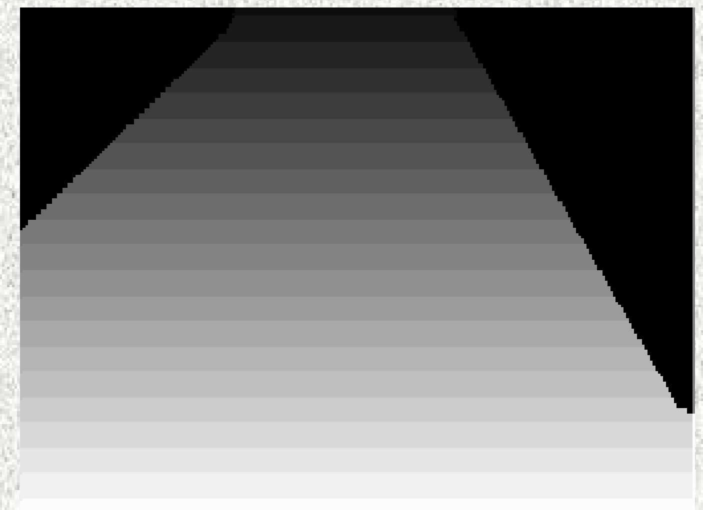




Application à l'analyse du trafic

Les transformations géodésiques généralisées permettent de réaliser des opérations tenant compte de la perspective, selon la taille réelle des objets dans la scène

Image de trafic



Facteur d'échelle utilisé pour définir la réfringence

Ouverture de taille égale à 1m (distance au sol)