RESIDUS

Serge BEUCHER

Centre de Morphologie Mathématique

Mines ParisTech

Introduction: propriétés des transformées morphologiques

- Croissance

$$X \subset Y \Rightarrow \psi(X) \subset \psi(Y)$$

- Extensivité/anti-extensivité

$$X \subset \psi(X)$$

$$\psi(X) \subset X$$

- Idempotence

$$\psi(\psi(X)) = \psi \circ \psi(X) = \psi(X)$$

Les opérateurs résiduels ne sont pas croissants. Beaucoup conservent les propriétés d'idempotence et d'anti-extensivité. Certains vérifient une autre propriété: l'homotopie

Définition générale d'un résidu

Un opérateur résiduel élémentaire est un opérateur construit à l'aide de la différence de deux opérateurs

-Différence ensembliste pour les ensembles

$$r = \psi \setminus \zeta \quad \zeta \subset \psi$$

-Différence algébrique pour les fonctions

$$r = \psi - \zeta \quad \psi \geq \zeta$$

r s'appelle <u>résidu</u>, ψ et ζ les <u>primitives</u>

Il existe différentes manières d'utiliser et d'assembler ces résidus, en particulier lorsqu'ils sont générés par des familles $\{\psi_i\}$ et $\{\zeta_i\}$ de primitives

Plan du cours

- Résidus ensemblistes
  - Erodé ultime
  - Squelette par boules maximales
  - Bissectrice conditionnelle
  - Résidus géodésiques
- HMT, amincissements, épaississements
  - Définitions
  - Amincissements homotopiques
  - Squelettes
- Résidus numériques
  - Extension de la notion aux fonctions
  - Ouvert ultime
  - Boules critiques
  - Quasi-distance

Résidus en Morphologie Ensembliste

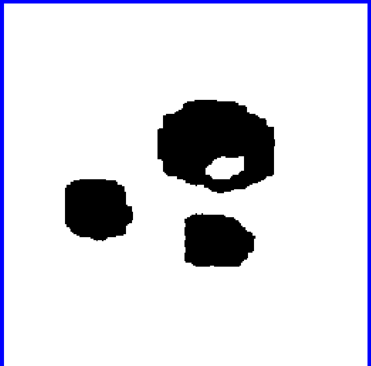
Opérateurs basés sur la différence de deux familles d'opérateurs dépendant d'un paramètre i:

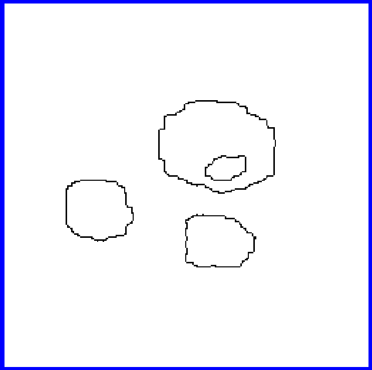
$$r_i = \psi_i \setminus \zeta_i \quad , \psi_i \geq \zeta_i \qquad\qquad \theta = \bigcup_{i \in I} r_i$$

<u>Exemple trivial</u>:

• Si I = {1} (la famille d'opérateurs est réduite à une seule paire), en prenant ψ = I et $\zeta = \varepsilon$ (érosion élémentaire), on a: r = I \ ε, contour intérieur de l'ensemble

• Si $\psi_i = \varepsilon_i$ et $\zeta_i = \varepsilon_{i+1}$, $\theta = I$





(l'intersection des résidus produit également une transformation résiduelle, mais elle est élémentaire, $\psi \setminus \zeta$)

Résidus en Morphologie Ensembliste

Exemples moins triviaux:

• Erodé ultime

$$\psi_i = \varepsilon_i \, ; \zeta_i = \gamma_{rec}\left(\varepsilon_i\right)$$

• Squelette par boules maximales:

$$\psi_i = \varepsilon_i \, ; \zeta_i = \gamma \left(\varepsilon_i\right)$$

• Bissectrice conditionnelle

$$\psi_i = \varepsilon_i \, ; \zeta_i = \delta^l_{\varepsilon_i} \circ \varepsilon_k\left(\varepsilon_i\right)$$

Ces opérateurs sont constitués d'un doublet:

• La transformation ensembliste θ

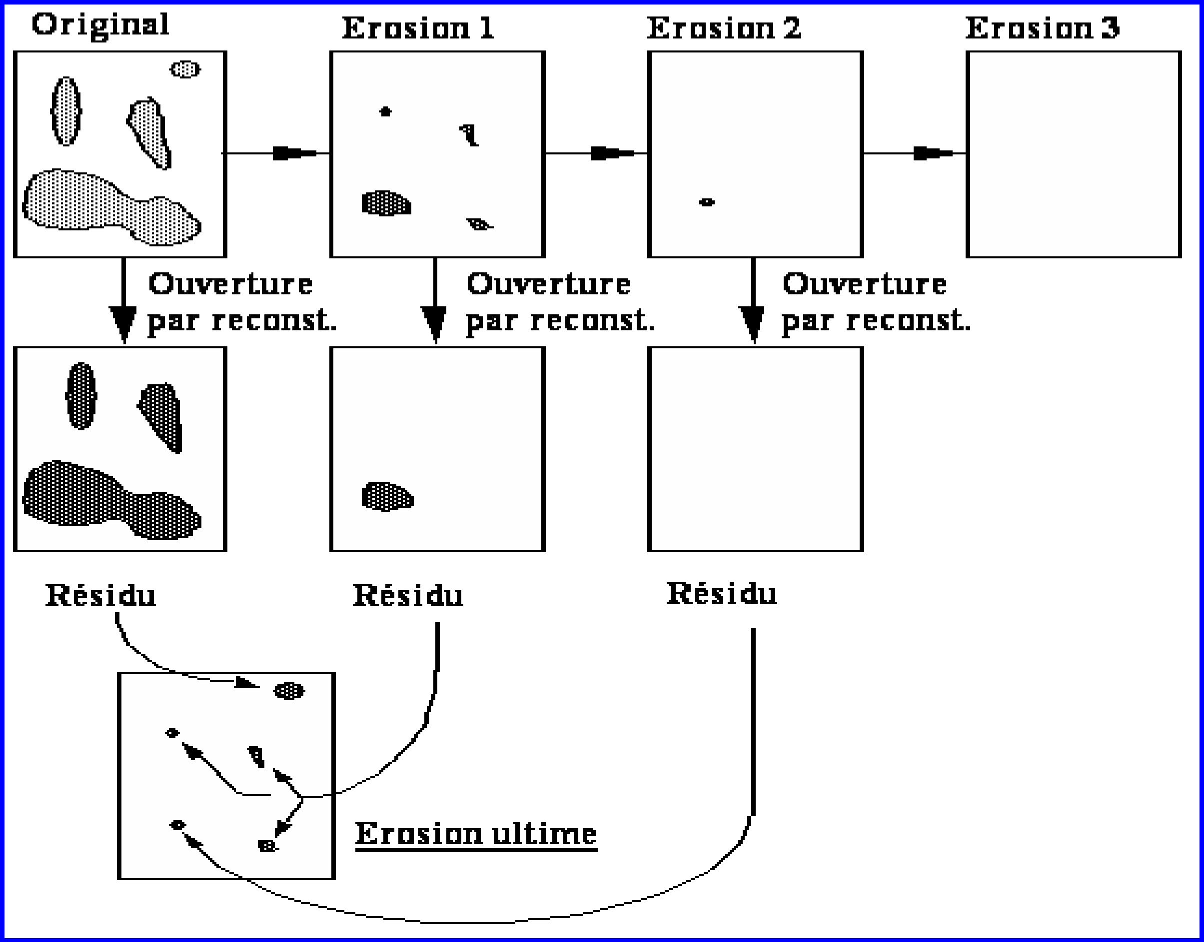
• Une fonction associée q: $q(x) = i + 1$ si et seulement si $x \in r_i$

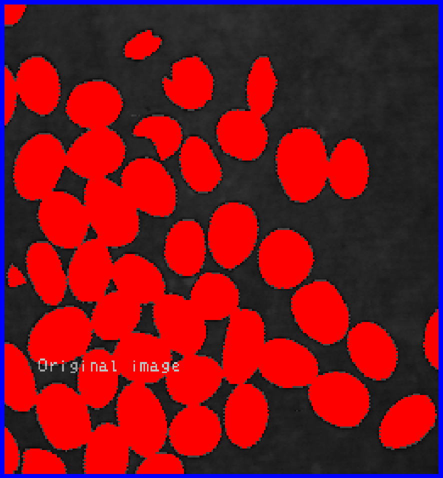
(On ajoute 1 à q (x) afin d'obtenir une valeur strictement positive sur le support de la fonction)

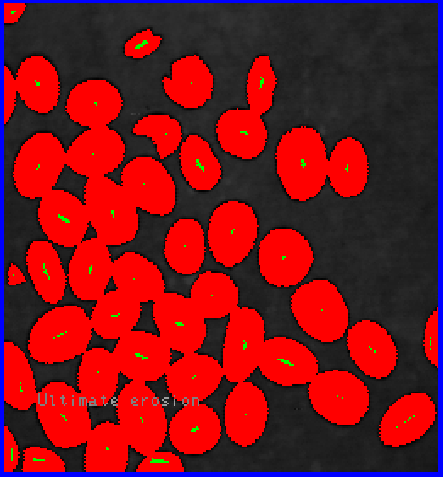
Érosion ultime

Les deux familles d'opérateurs sont constituées des érodés successifs de l'ensemble et de l'ouverture par reconstruction de chaque érodé

$$\psi_i = \varepsilon_i \,;\, \zeta_i = \gamma_{rec}\left(\varepsilon_i\right)$$

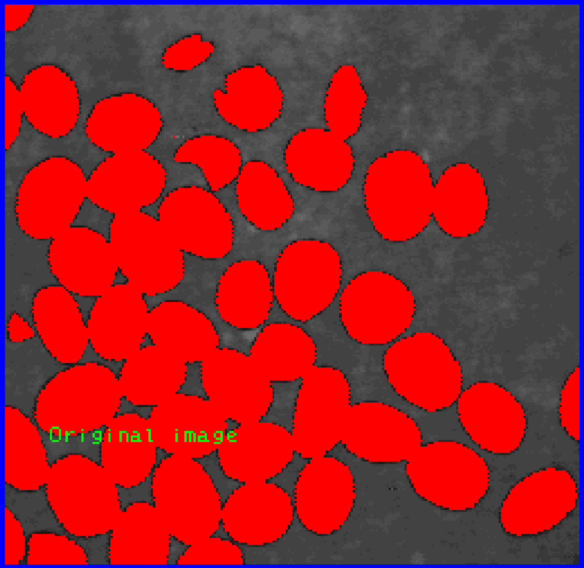


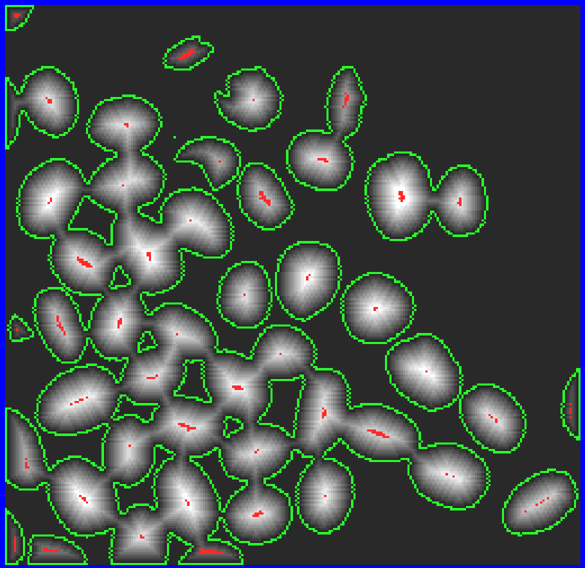




Erosion ultime et fonction distance

La fonction distance est construite par empilement des érodés successifs de X



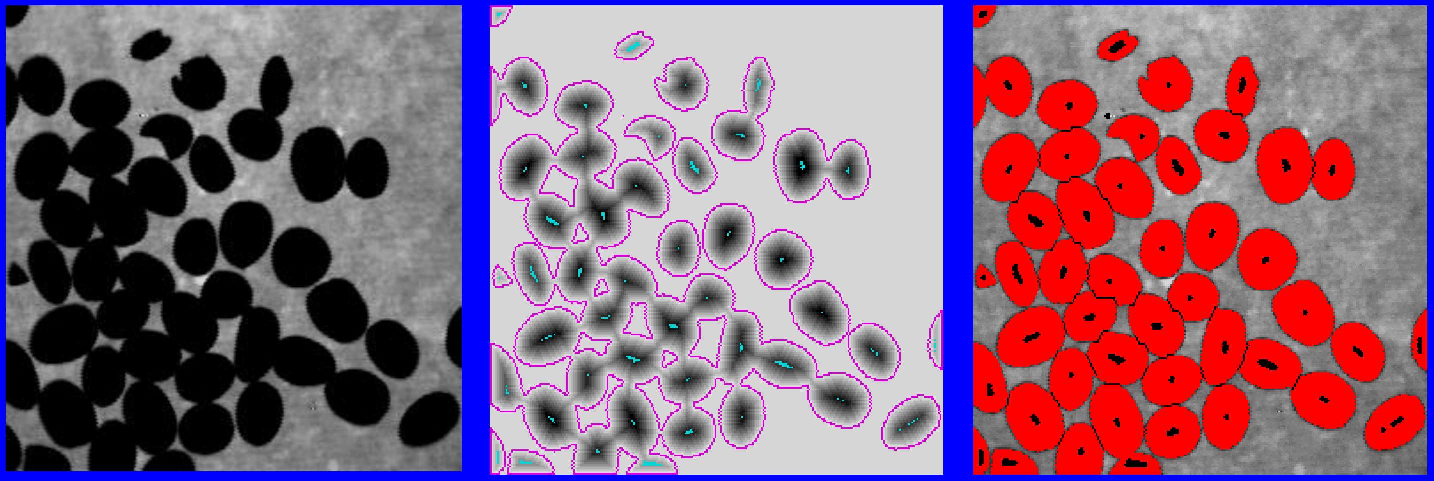


L'érodé ultime correspond alors aux maxima de cette fonction distance

La fonction associée q donne (à une unité près) la taille de l'érosion correspondant à l'apparition de chaque composant connexe de l'érodé ultime

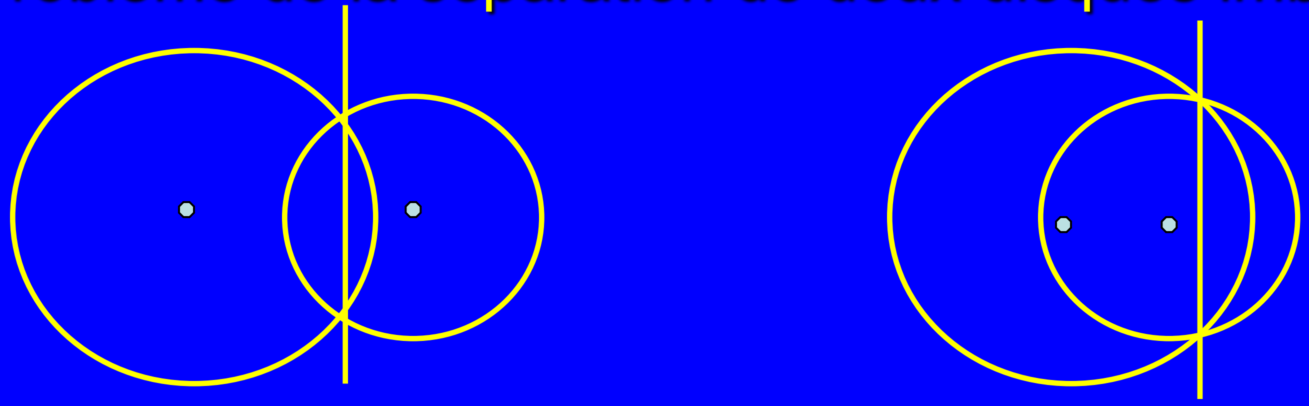
Usage de l'érodé ultime

- Génération de marqueurs pour la segmentation



La fonction distance de l'ensemble est inversée et sa LPE est construite.
L'ensemble marqueur est constitué des maxima de la fonction distance.

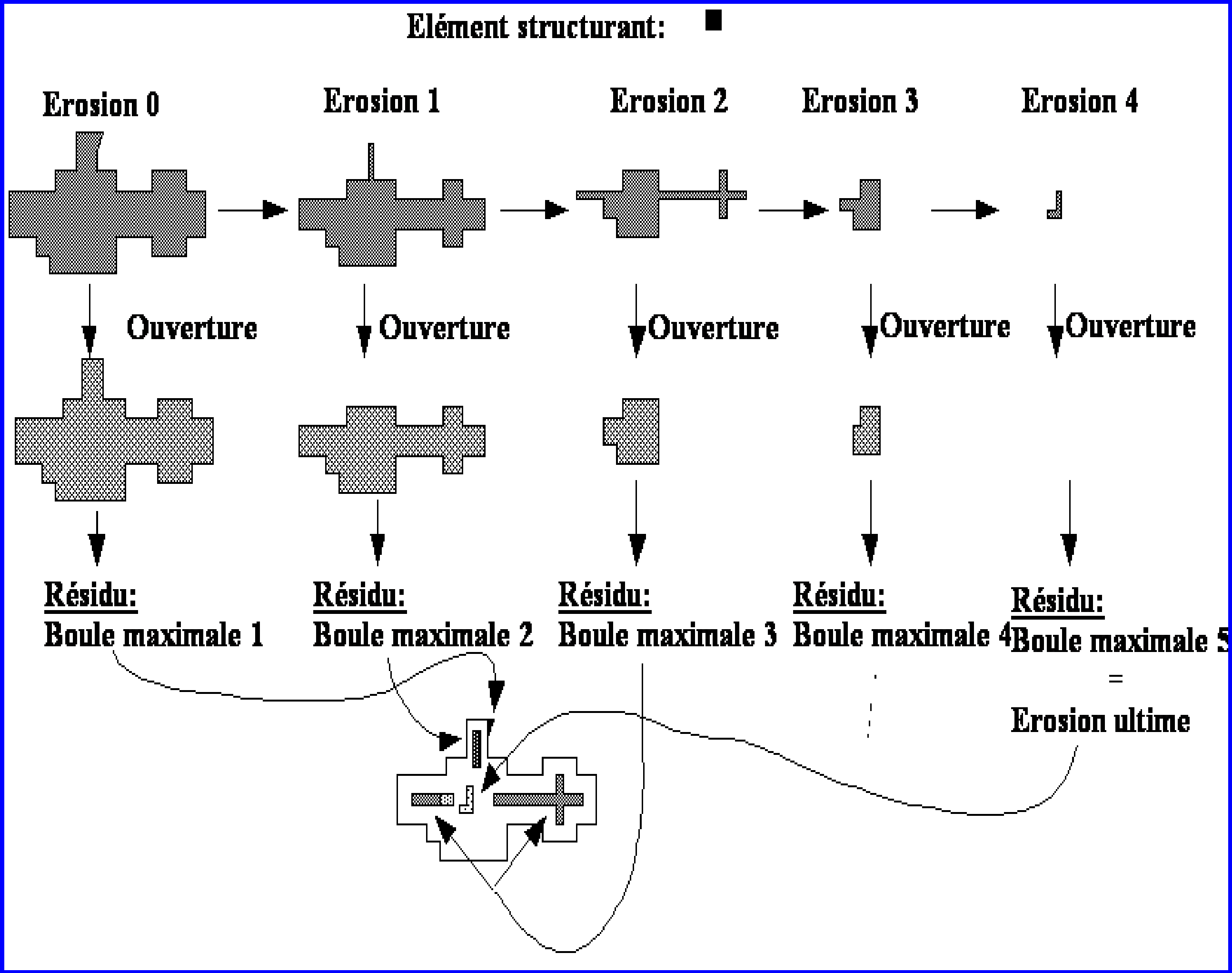
- Problème de la séparation de deux disques imbriqués

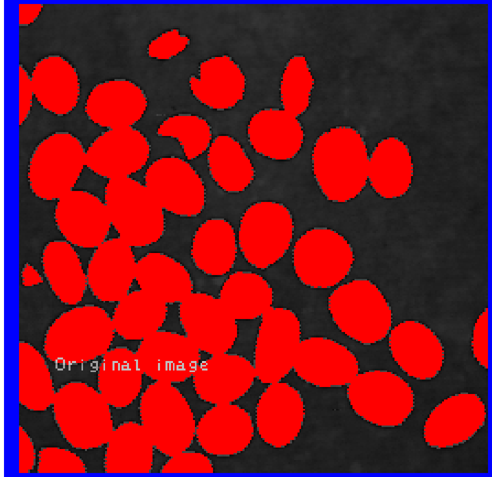


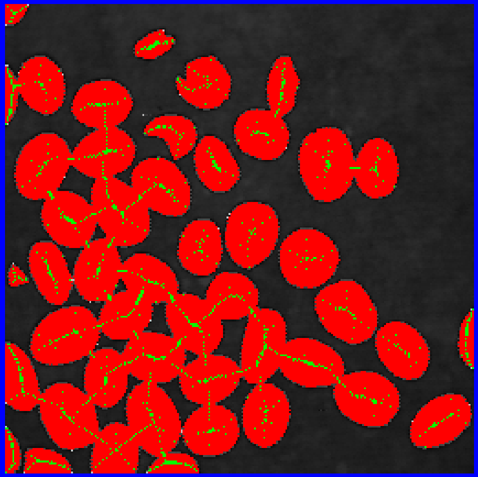
Squelette par ouvertures

(ou squelette par boules maximales)

$$\psi_i = \varepsilon_i \, ; \zeta_i = \gamma\left(\varepsilon_i\right)$$

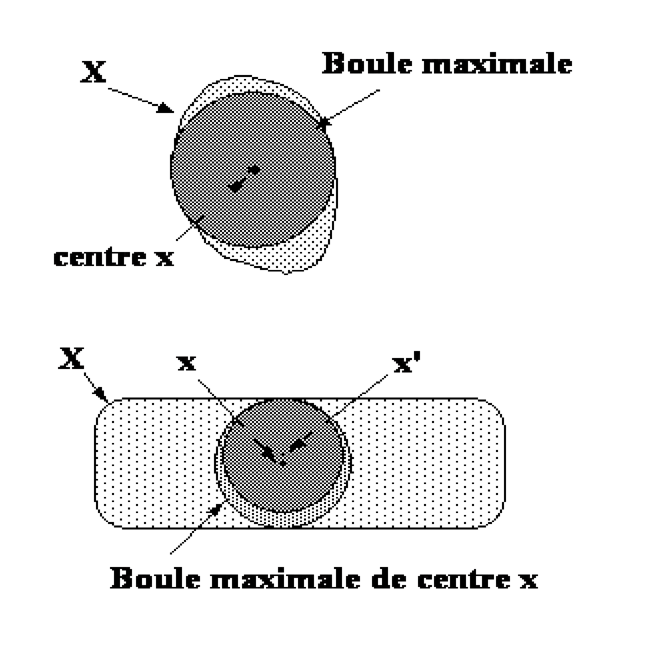






Boules maximales

Une boule $B_n(x)$ de taille n et de centre x est maximale vis à vis de l'ensemble X, s'il n'existe aucun autre indice k et aucun autre centre y tels que:

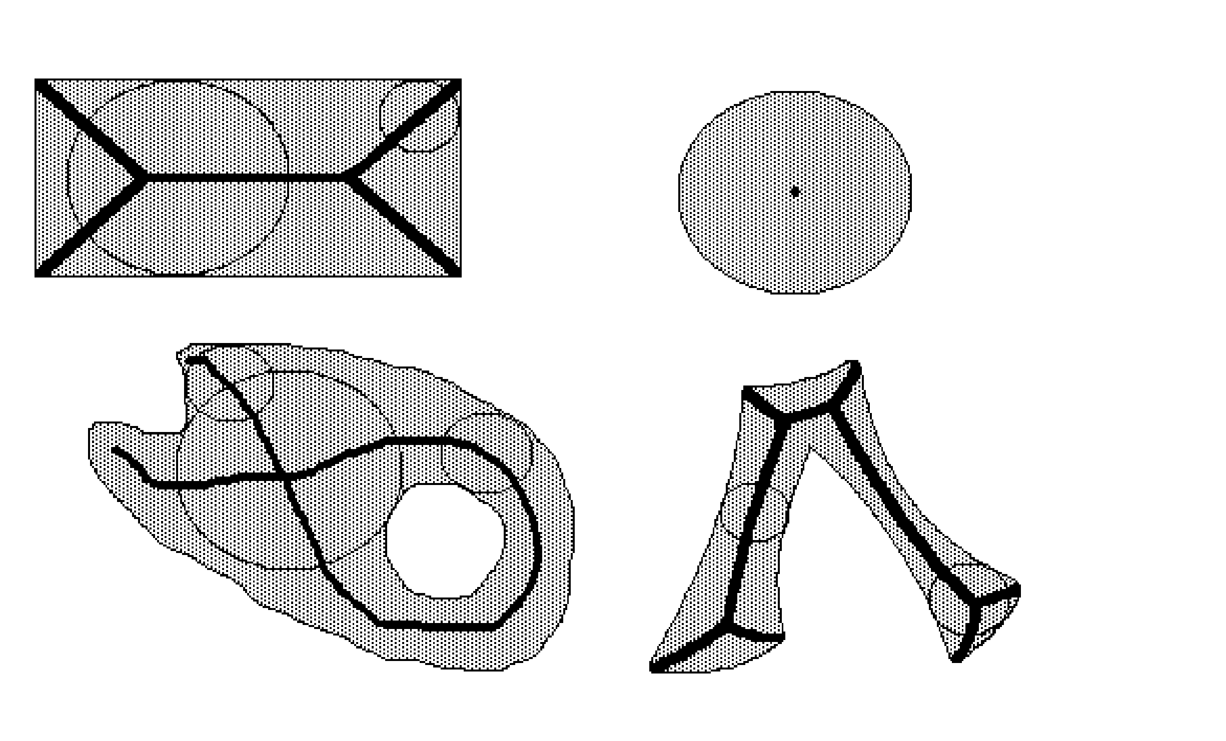


$$B_n(x) \subset B_k(y) \subset X \quad n \leq k$$

Le squelette d'un ensemble X selon une famille de boules $\{B_n\}$ est le lieu géométrique des centres de toutes ses boules maximales:

$$S(X) = \{x \in X : \exists B_n(x) \text{ maximale } \}$$

Squelette par boules maximales

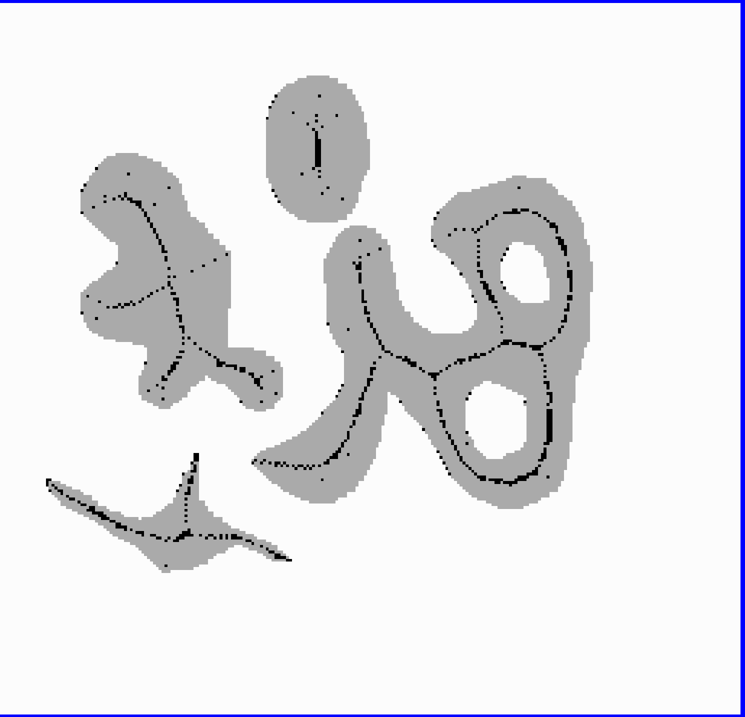


A chaque point x du squelette, on peut associer une fonction q(x) prenant la valeur du rayon de la boule maximale implantée au point x. Cette fonction est appelée fonction d'étanchéité ou fonction d'extinction

$$q(x) = n : x \in S(X), B_n(x) \text{maximale}$$

Squelette par boules maximales et par ouvertures

On peut montrer que le squelette par boules maximales et le squelette par résidus d'ouvertures sont identiques.



$$S(X) = \bigcup_{i \in N} \left[\varepsilon_i(X) \setminus (\gamma \circ \varepsilon_i(X)) \right]$$

- Chaque résidu r_i (noté aussi S_i) est le lieu des centres des boules maximales de rayon i
- Les boules maximales sont définies sur les familles homogènes de boules obtenues par les dilatations successives de la boule élémentaire B_0

Propriétés du Squelette par boules maximales

- Le squelette par boules maximales d'un ensemble connexe n'est pas connexe (d'une manière générale la connexité du squelette n'est pas avérée)
- Le squelette est anti-extensif et idempotent. Il n'est pas croissant:

$$S(X) \subset X$$

$$S(S(X)) = S(X)$$

$$X \subset Y \text{ n'implique pas } S(X) \subset S(Y)$$

Cependant la propriété suivante est vraie:

$$S(\varepsilon^n(X)) \subset S(X), \forall n \geq 0$$

Propriétés du Squelette par boules maximales

• Contrairement à la plupart des opérateurs morphologiques, la squelettisation est une opération inversible.

L'ensemble X, ainsi que ses érodés, ses dilatés et ses ouverts, peuvent être construits à partir du squelette et de la fonction d'extinction:

$$X = [X \setminus \gamma(X)] \cup \gamma(X) = S_0(X) \cup \delta(S_1(X)) \cup \delta^2(S_2(X)) \cup \ldots$$

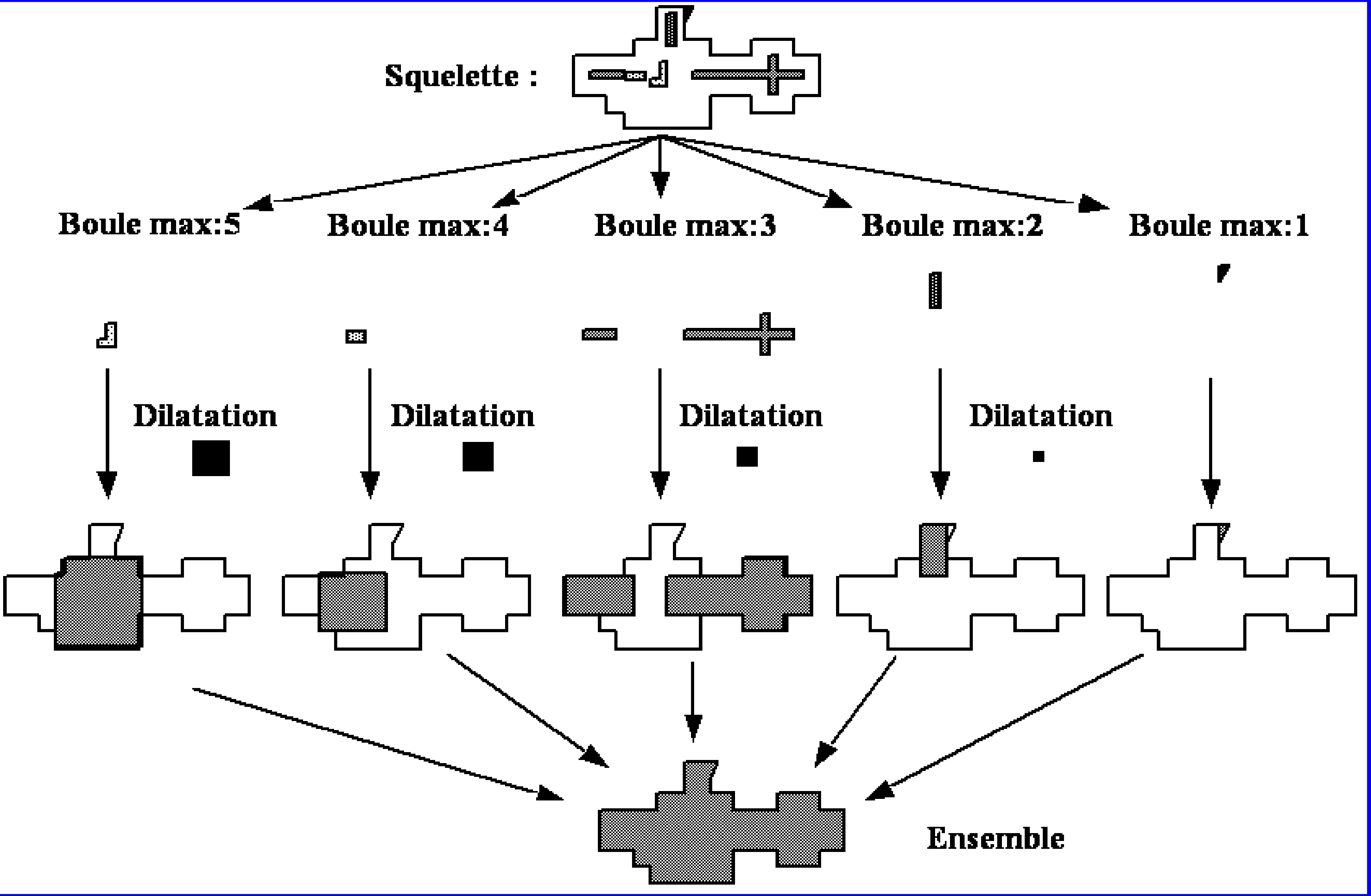
d'où, finalement:

$$X = \bigcup_{i \in N} \delta^i(S_i(X))$$

La transformation, réversible, fournit une autre représentation de X:

La donnée de X ou du doublet [S(X),q] sont équivalents

Réversibilité du squelette



Propriétés (suite)

La donnée de S(X) et de q permet de construire également:

- les érosions de X $$\varepsilon^n(X) = \bigcup_{i \geq n} \delta^{i-n}(S_i(X))$$

- les dilatations de X $$\delta^n(X) = \bigcup_{i \in I} \delta^{i+n}(S_i(X))$$

- les ouvertures de X $$\gamma^n(X) = \bigcup_{i \geq n} \delta^{i}(S_i(X))$$

(on ne peut pas reconstruire les fermetures – *Pourquoi?)*

L'érodé ultime est toujours un sous-ensemble du squelette par boules maximales. L'érodé ultime correspond aux centres des boules maximales ultimes.

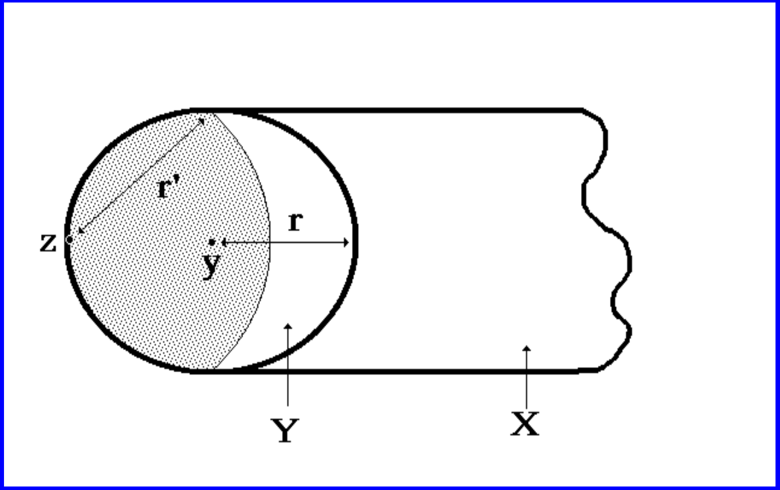
Résidus géodésiques

Tous les opérateurs résiduels définis dans un contexte euclidien peuvent être transposés dans des espaces géodésiques:

• Les boules géodésiques peuvent être définies à partir de la distance géodésique

$$B_X(x,r)=\{y\in X : d_X(x,y)\le r\}$$

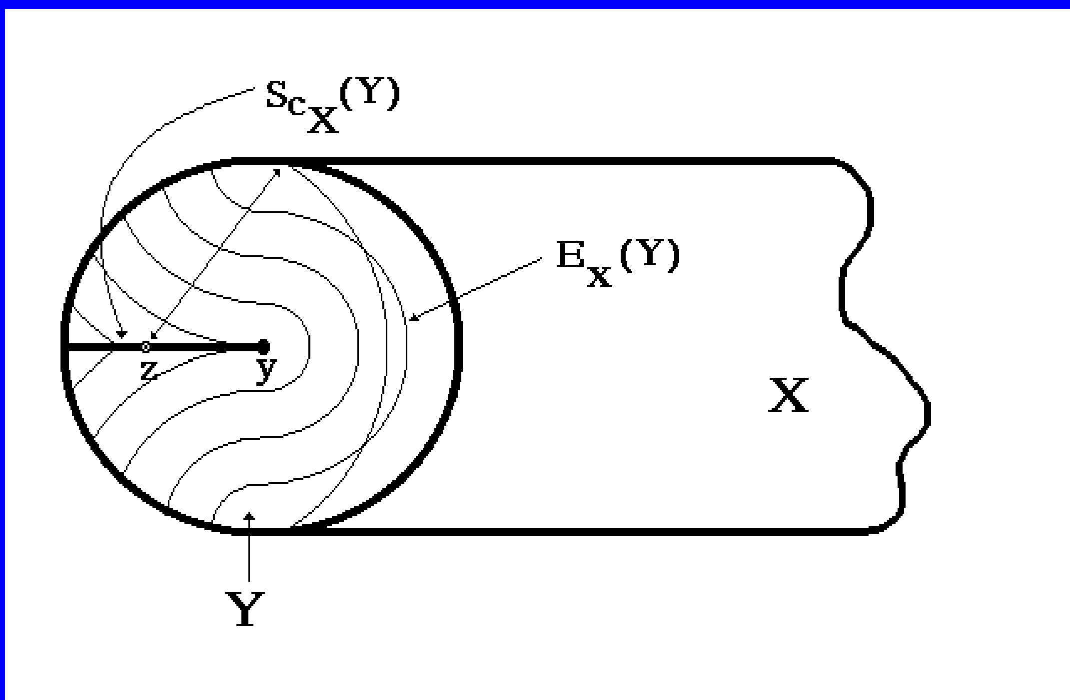
• Les boules maximales géodésiques ont la même définition que les boules maximales euclidiennes (mutatis mutandis). Il faut néanmoins éviter certains pièges…



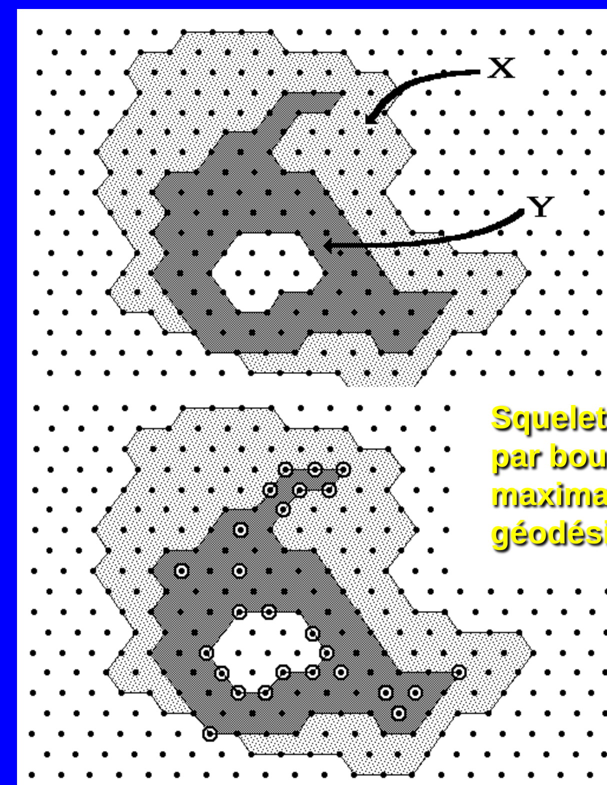
Squelette géodésique

Le squelette par boules maximales géodésiques $S_X(Y)$ d'un ensemble Y inclus dans un espace géodésique X est défini par:

$$S_X(Y) = \bigcup_{i \in N} \left[\varepsilon_X^i(Y) \setminus \left(\gamma_X \circ \varepsilon_X^i(Y) \right) \right]$$



Construction du squelette géodésique



Squelette par boules maximales géodésiques

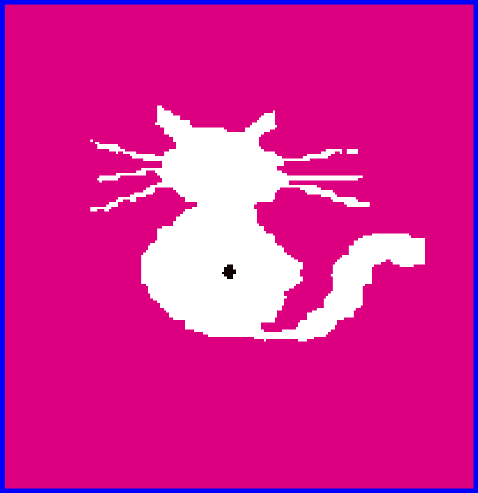
Extrémités de particule

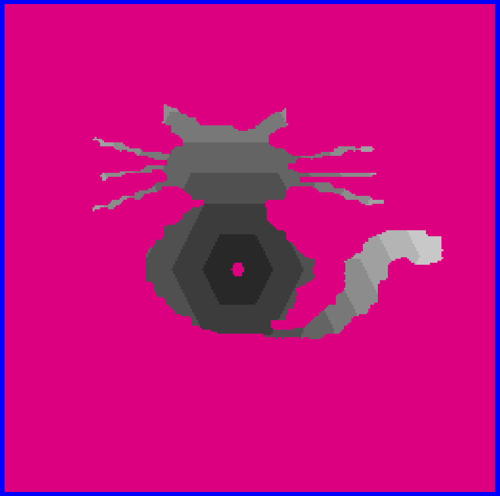
L’érodé ultime géodésique peut être utilisé pour mettre en évidence les extrémités d’une particule simplement connexe

• On lui associe un *centroïde C* (à l'aide de l'amincissement Dthin, voir plus loin)

• Les extrémités de la particule sont alors définies comme l'érodé ultime géodésique, dans X, de l'ensemble Y = X\C

$$Extr(X) = \bigcup_{i \in N} \left[\varepsilon_X^i(Y) \setminus \left(\gamma^{rec}\left(\varepsilon_X^i(Y); \varepsilon_X^{i+1}(X) \right) \right) \right]$$



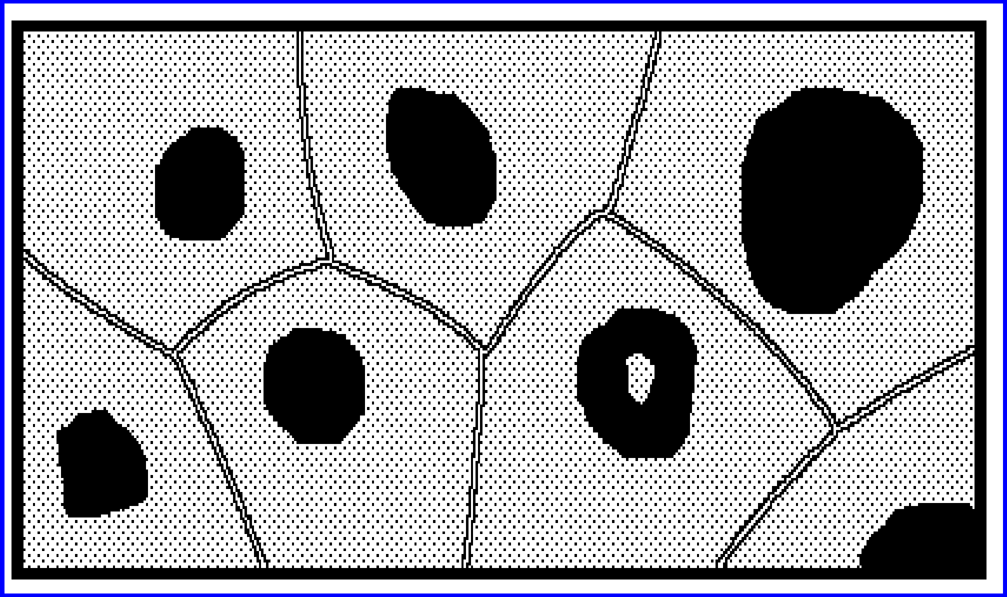


Le squelette par zones d'influence

X, ensemble formé de n composantes connexes $\{X_i\}$

- Zone d'influence $Z(X_i)$ de X_i: ensemble des points plus proches de X_i que de toute autre composante connexe de X:

$$z(X_i) = \{x : \forall\ j \neq i, d(x, X_i) < d(x, X_j)\}$$



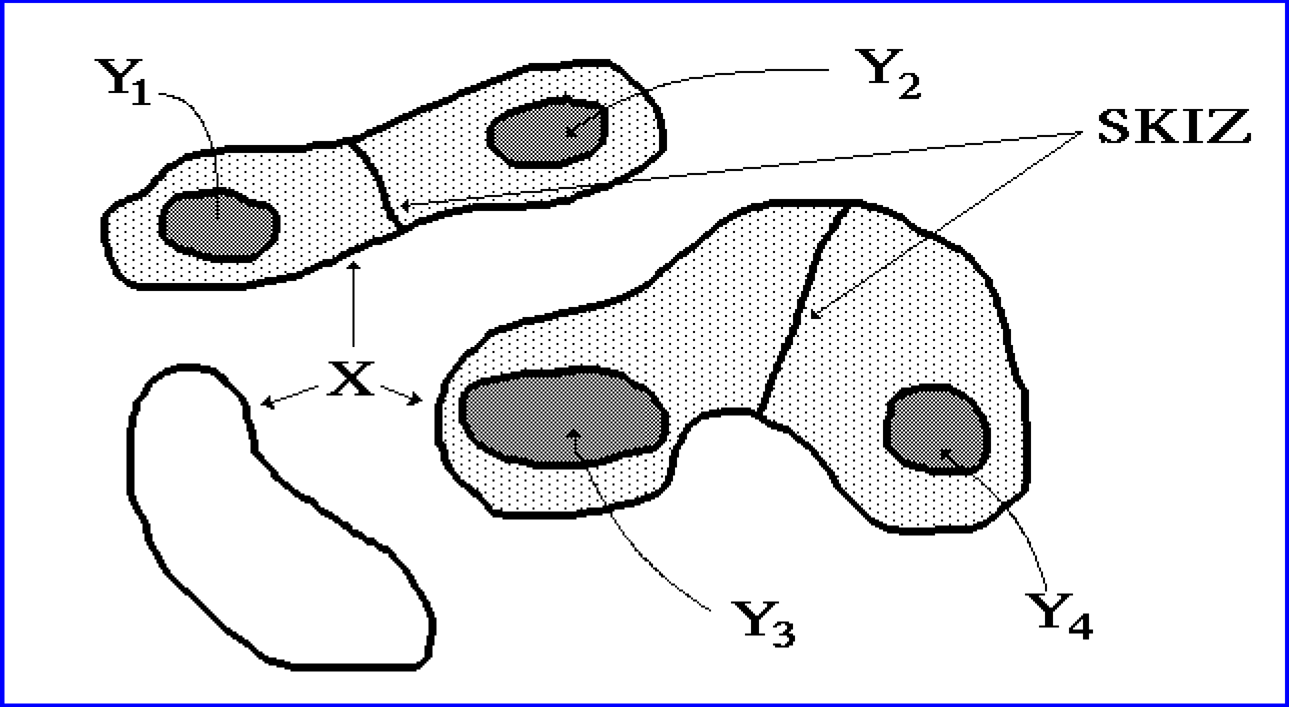
SKIZ géodésique

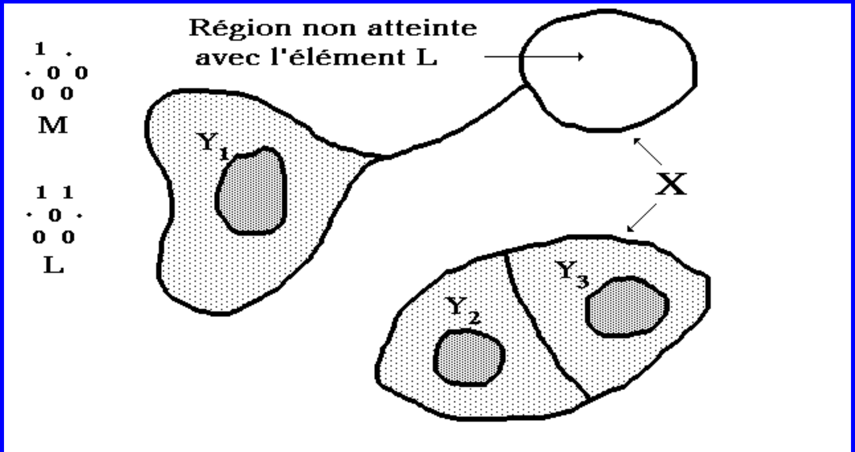
Ensemble Y formé de composantes connexes et inclus dans un espace géodésique X

Zone d'influence d'une composante connexe: ensemble des points de X à une distance géodésique finie de la composante connexe et plus proche de celle-ci que de tout autre composante connexe:

$$Z_X(Y_i) = \left\{ \begin{array}{l} x \in X : d_X(x, Y_i) < +\infty \\ et \\ \forall j \neq i, d_X(x, Y_i) < d_X(x, Y_j) \end{array} \right\}$$

SKIZ géodésique, construction





L'utilisation de l'élément structurant M est indispensable pour assurer la propagation dans les régions de X de faible épaisseur

Résidus numériques

On peut définir en numérique des résidus élémentaires par différence entre deux transformations ψ et ζ (avec $\zeta \leq \psi$)

Les exemples les plus courants de résidus élémentaires numériques sont le gradient morphologique et la transformée chapeau haut-de-forme:

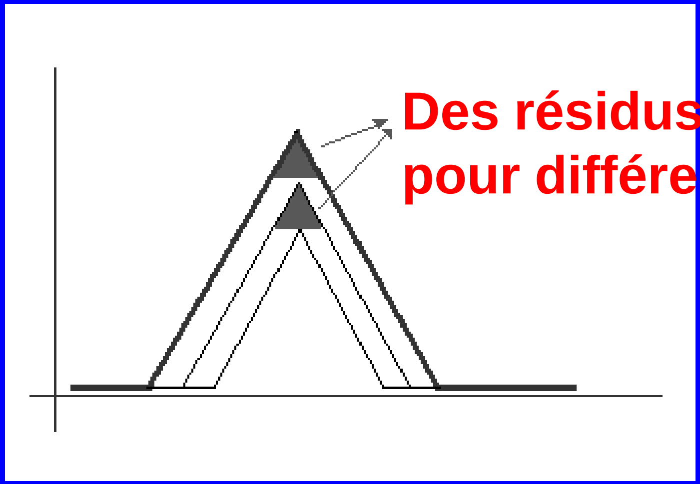
• Gradient morphologique $\delta_i - \varepsilon_i$
(demi-gradients $I - \varepsilon_i$ et $\delta_i - I$)

Transformée chapeau haut-de-forme $I - \gamma_i$

Résidus en morphologie numérique

On peut tenter d'étendre aux fonctions les définitions des résidus ensemblistes.
Cette extension fait apparaître certaines difficultés:

- La différence d'ensembles et la soustraction de fonctions ne sont pas vraiment équivalents.
- Plusieurs résidus différents peuvent apparaître en un point x $\longrightarrow$ problème de la définition de la fonction associée.



Transformées résiduelles numériques définition

Définition basée sur l'observation de l'évolution verticale de l'image au cours de sa transformation.

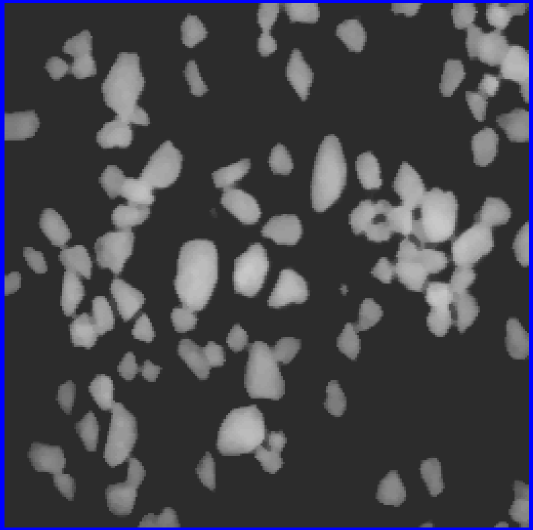
Définitions

- Transformation $$\theta = \underset{i \in I}{Sup}\left(\psi_i - \zeta_i\right)$$
- Fonction associée $$q = \arg\max\left(r_i\right) + 1 = \arg\max\left(\psi_i - \zeta_i\right) + 1$$ $$q(x) = \max(i) + 1 \quad r_i(x) > 0 \; et \; \text{maximum}$$

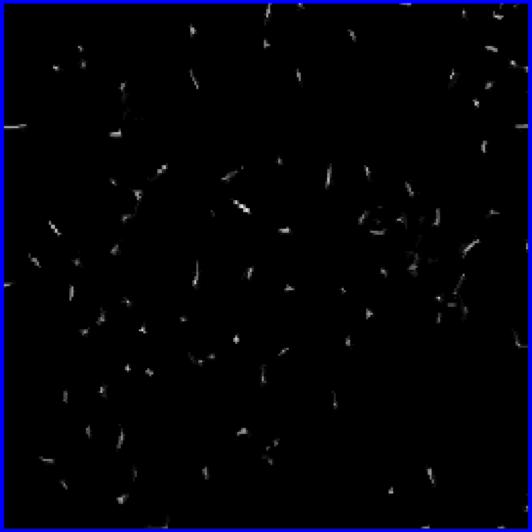
Dans le cas binaire, cette définition et la définition classique sont identiques.

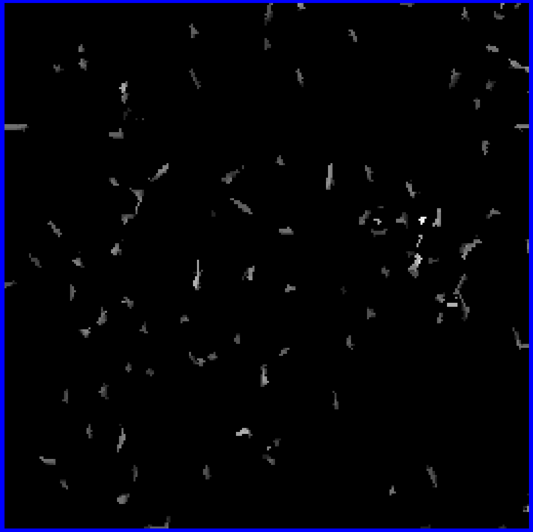
Exemples (1)

Erodé ultime



θ



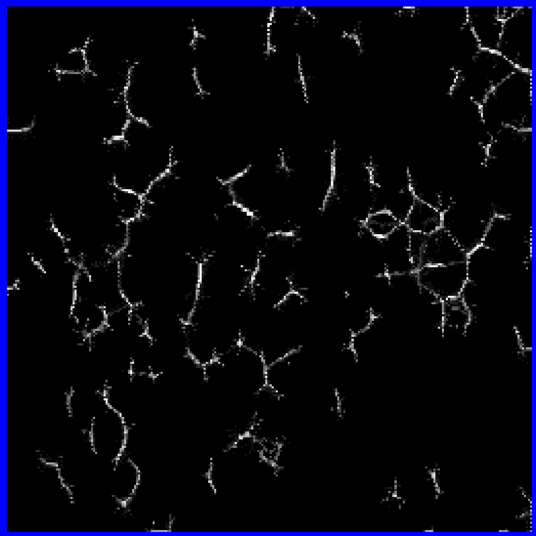


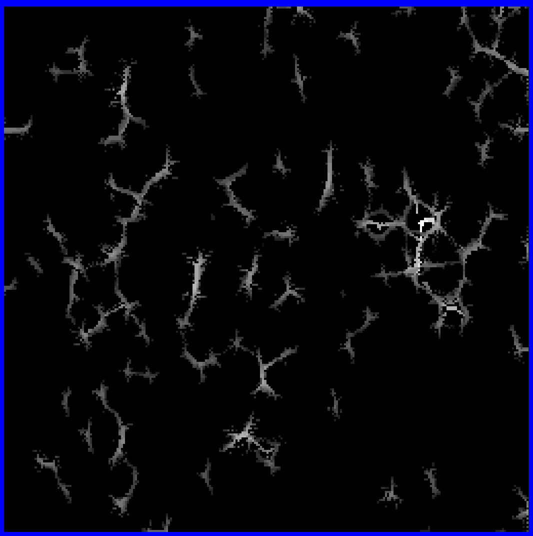
q

Exemples (2)

Squelette par « cylindres maximaux significatifs »

θ

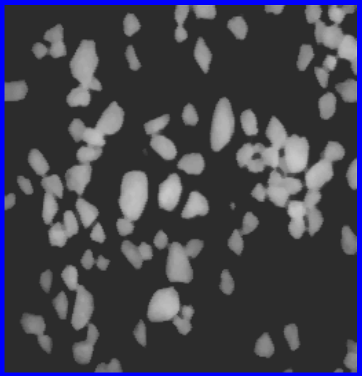


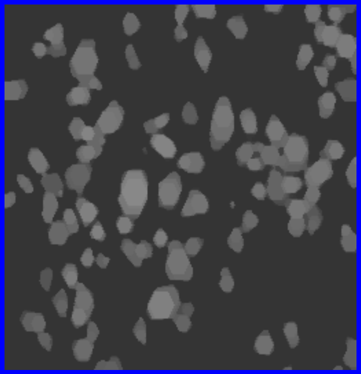


q

Problème de la reconstruction: Il n'est généralement pas possible de reconstruire entièrement la fonction à l'aide de son squelette

$$\rho(f) = \sup_{x \in E}\left(\theta(x) \oplus B_{q(x)}\right)$$





Nouveaux résidus

• L'extension de la définition des résidus ensemblistes comme l'érodé ultime ou les squelettes par ouvertures aux fonctions est intéressante.

• Cette définition des résidus permet surtout d'introduire, en numérique et en binaire, de nouvelles transformations résiduelles intéressantes tant du point de vue de la transformation elle-même que de la fonction associée.

On introduira en particulier:

- L'ouvert ultime (avec diverses variantes)
- La quasi-distance
- des résidus basés sur des empilements

Ouvert ultime

$$\psi_i = \gamma_i$$

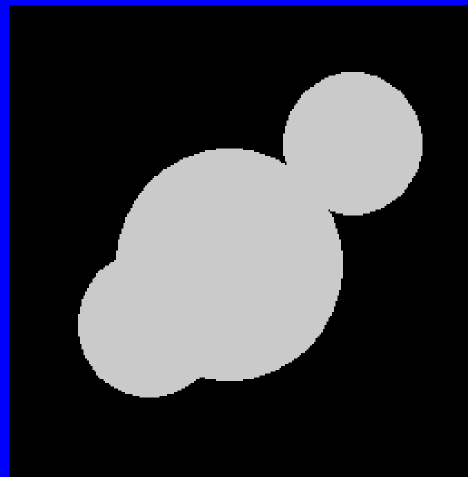
$$\zeta_i = \gamma_{i+1}$$

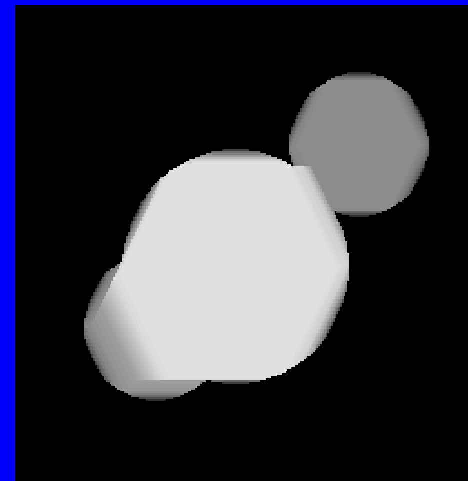
En binaire, la transformée θ ne présente aucun intérêt (θ = I).

La fonction associée q est appelée fonction granulométrique.

En chaque point x, q(x) est égal (à l'unité près) à la taille de la plus grande boule recouvrant ce point x dans le cas binaire, au rayon du plus grand cylindre significatif de la reconstruction partielle recouvrant x dans le cas numérique.

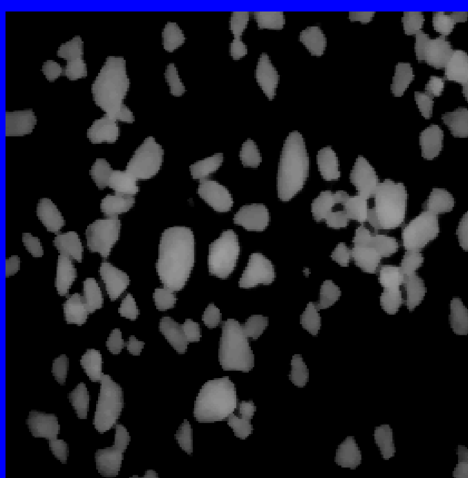
Ouvert ultime (2)

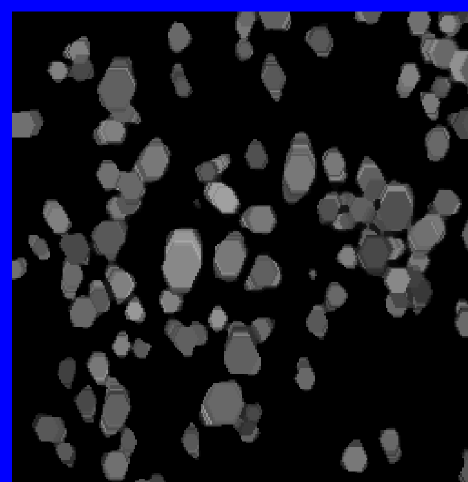




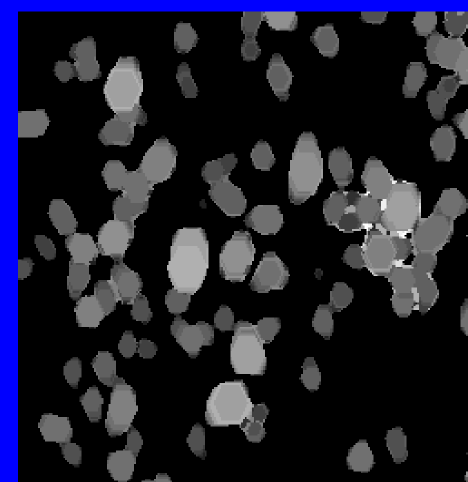
q

Fonction associée à l'ouvert ultime d'un ensemble





θ



q

Ouvert ultime numérique et fonction associée

Ouvert ultime, reconstruction

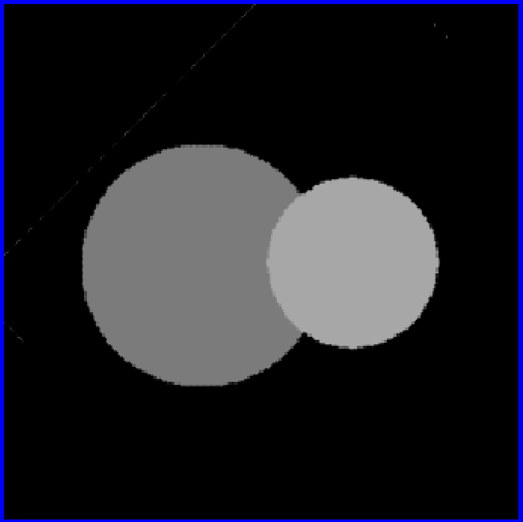
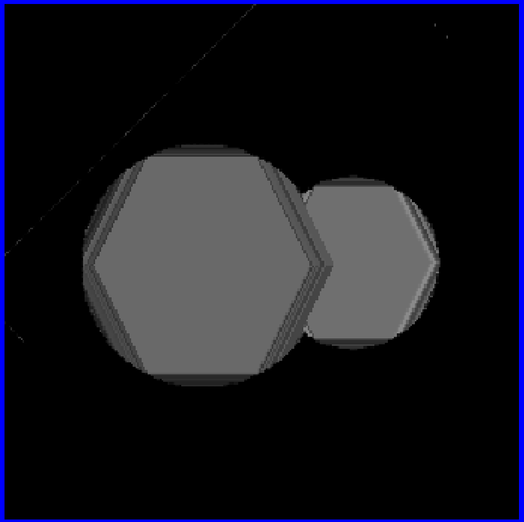
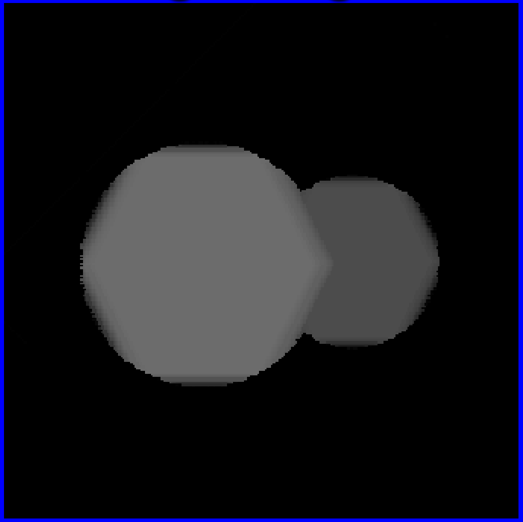


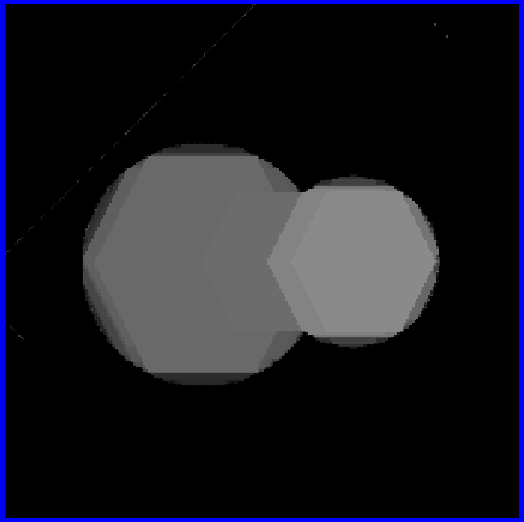
Image originale



Ouvert ultime



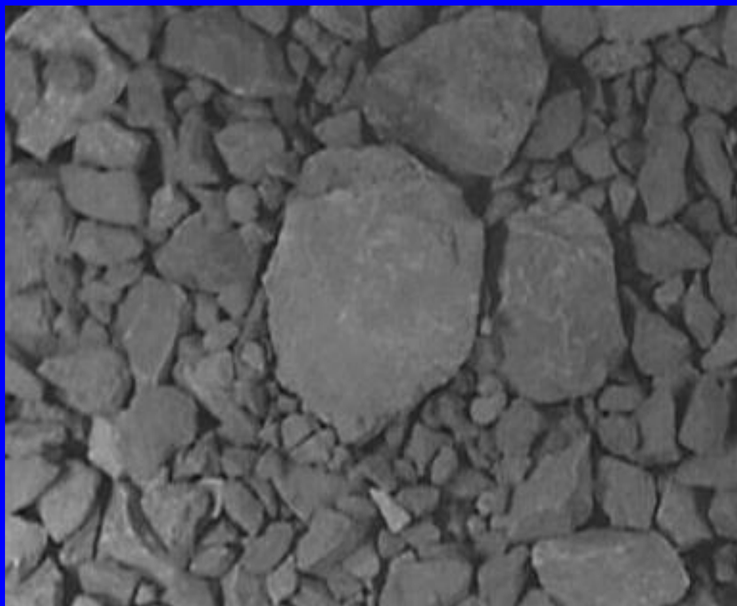
Fonction granulométrique

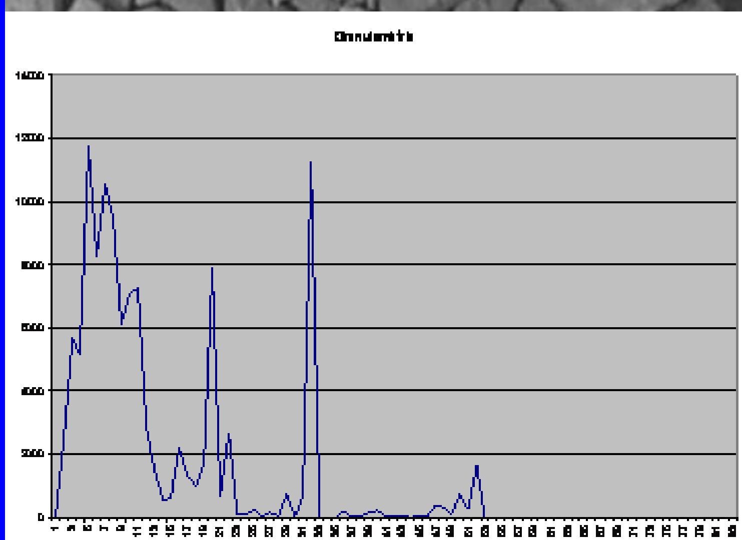


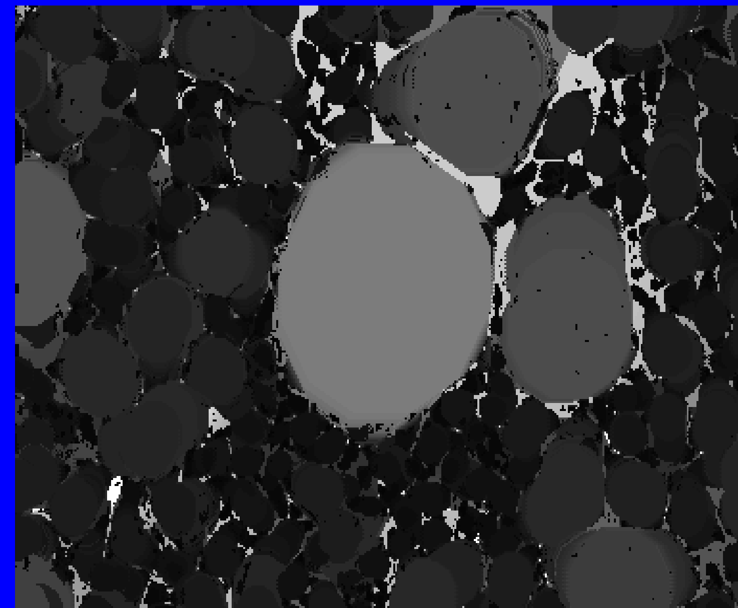
Reconstruction par squelette

Granulométries et segmentation

<u>Blocs en tas</u>: Détermination de la granulométrie des blocs







Fonction granulométrique

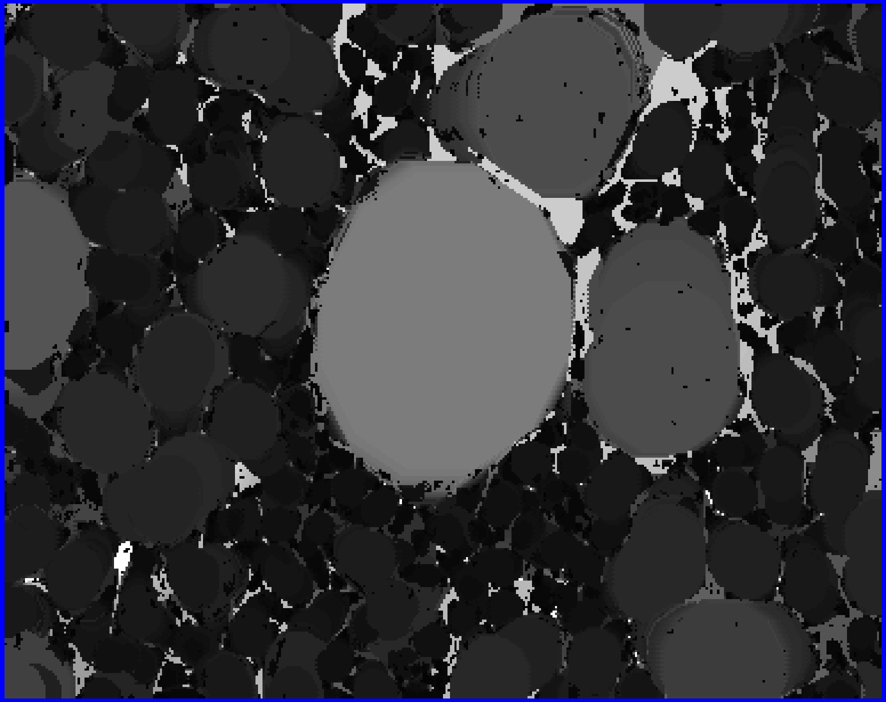
Ces fonctions permettent de définir la granulométrie des régions plus ou moins homogènes de l’image <u>AVANT</u> de les segmenter

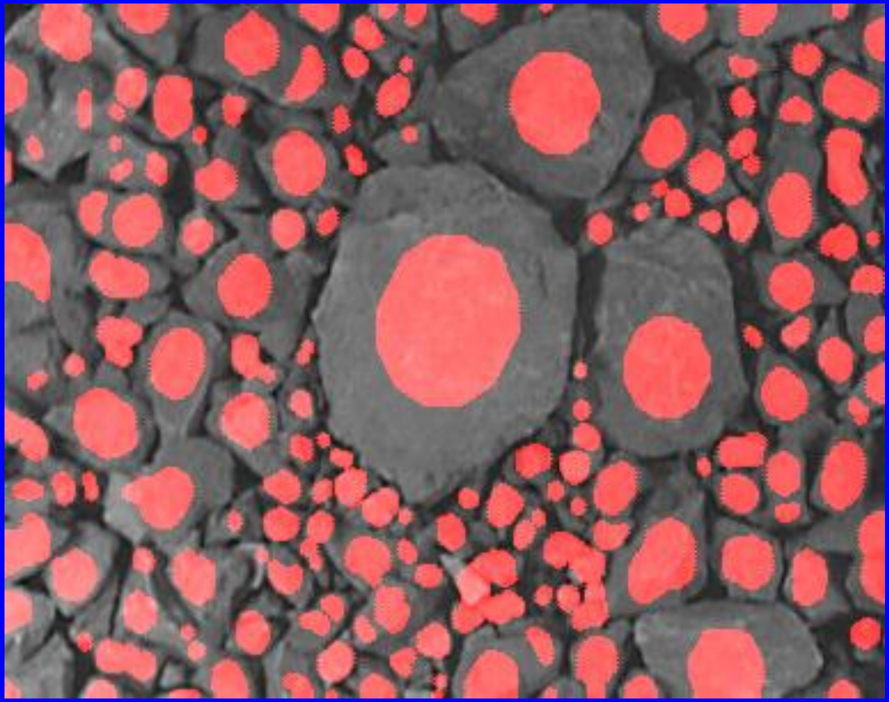
Granulométries et segmentation (2)

Définition de marqueurs pour le comptage et la segmentation.

Pour chaque seuil i de la fonction granulométrique:

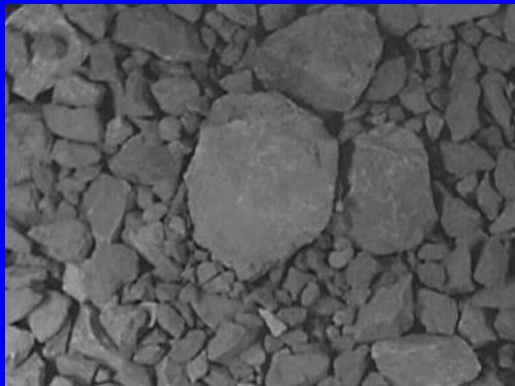
- bouchage des trous
- érosion de taille j = max (k .i, c), k <1

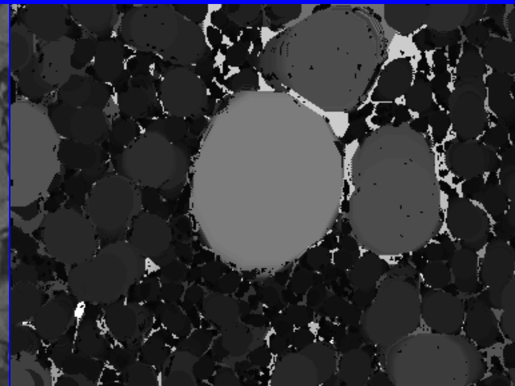


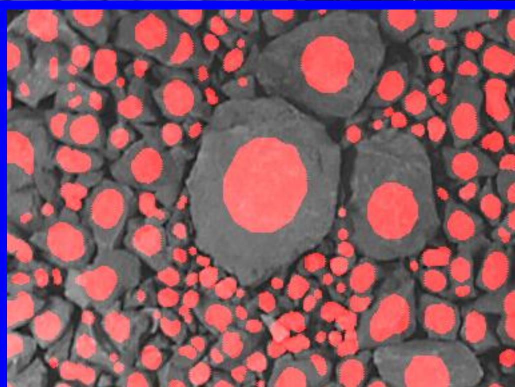


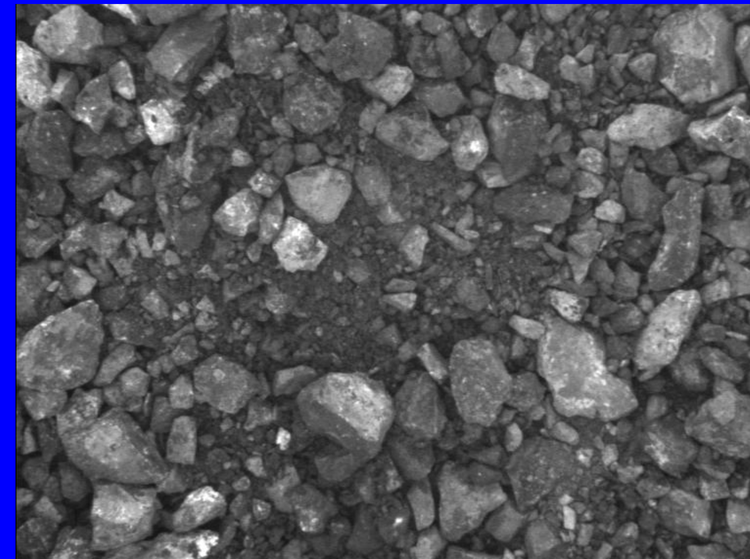
Marqueurs des blocs générés à partir de la fonction granulo-métrique

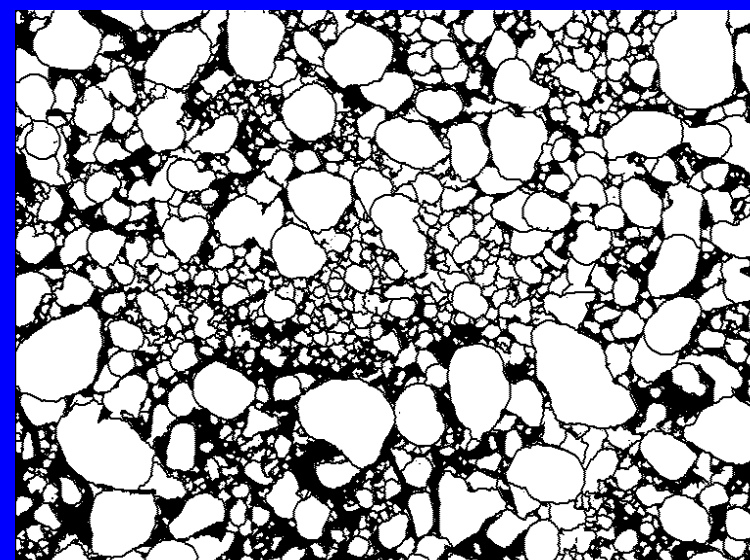
Granulométries et segmentation (3)











Marqueurs des blocs générés à partir de la fonction granulométrique

Autres ouverts ultimes

On peut définir de nouveaux ouverts ultimes en utilisant des ouvertures basées sur des critères

- Ouvertures surfaciques

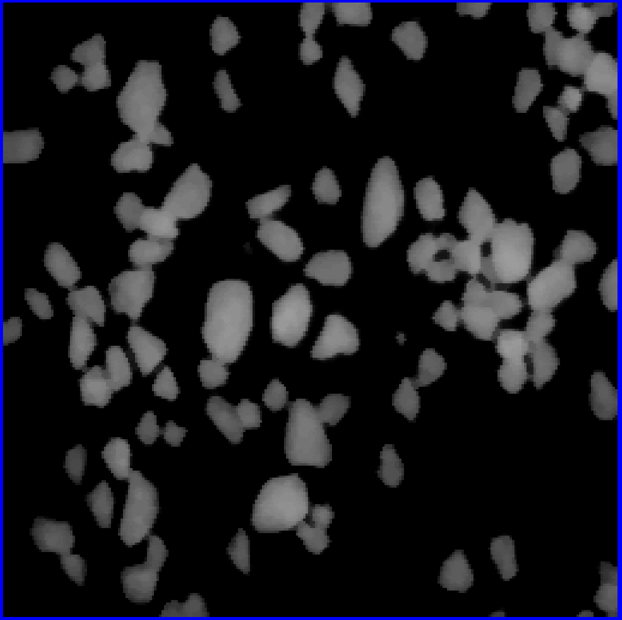
- Ouvertures basées sur des diamètres de Féret et des tailles de boîtes englobantes

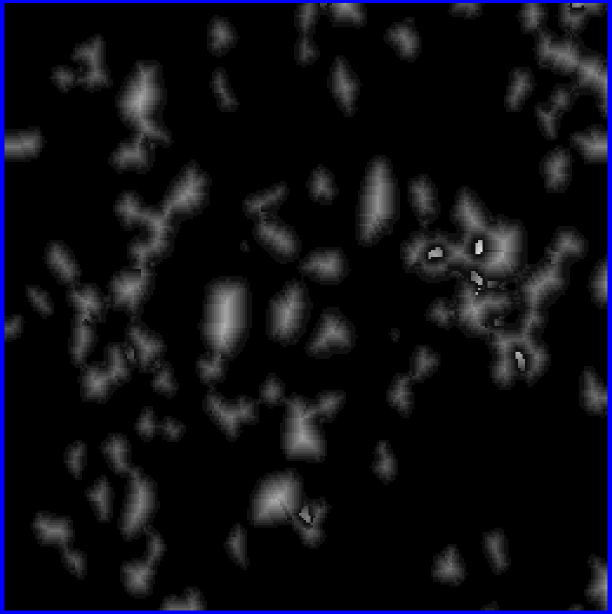
Quasi-distance

$$\psi_i = \varepsilon_i$$

$$\zeta_i = \varepsilon_{i+1}$$

- En binaire, θ et q ne sont pas intéressants (θ = I et q est la fonction distance).
- En numérique q est appelée quasi-distance.



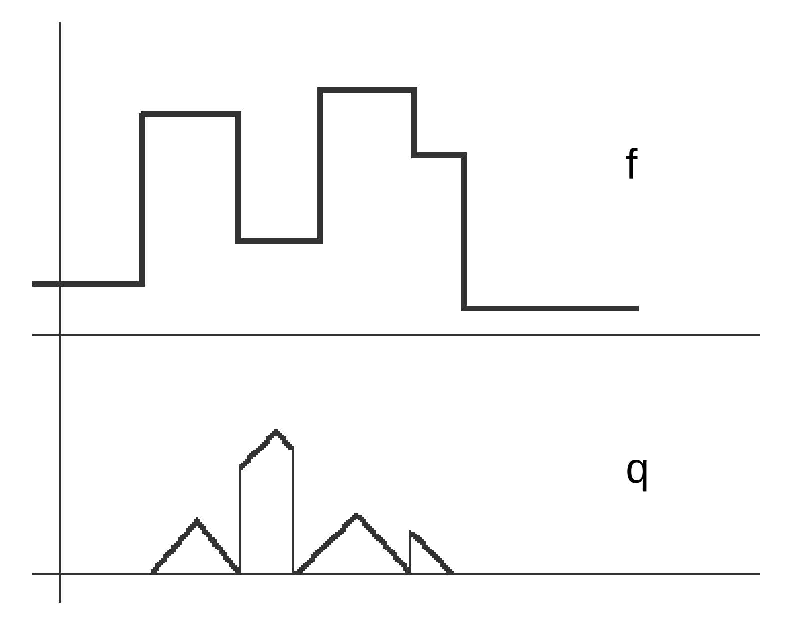


Des distances « perchées » apparaissent.

Quasi-distance (2)

La quasi-distance n'est pas 1-Lipschitzienne.

On peut rendre la quasi-distance 1-Lipschitzienne par un opérateur itératif de « descente » des distances perchées.



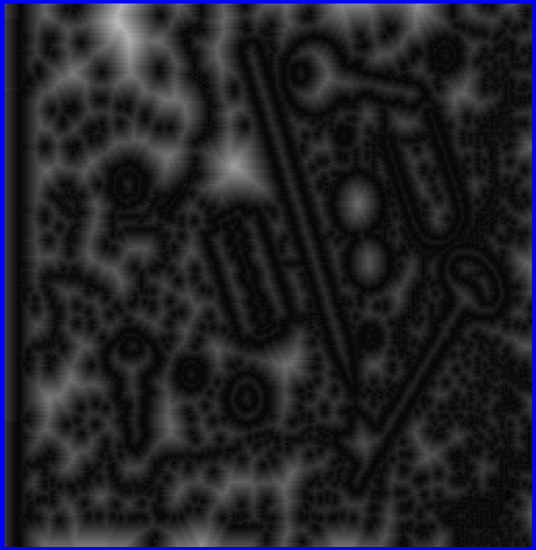
- En tout point x où $[q-\varepsilon(q)](x)>1$, faire $q(x)=\varepsilon(q)(x)+1$
- Réitérer jusqu'à idempotence.

Quasi-distance (3)

Quasi-distances brute et corrigée

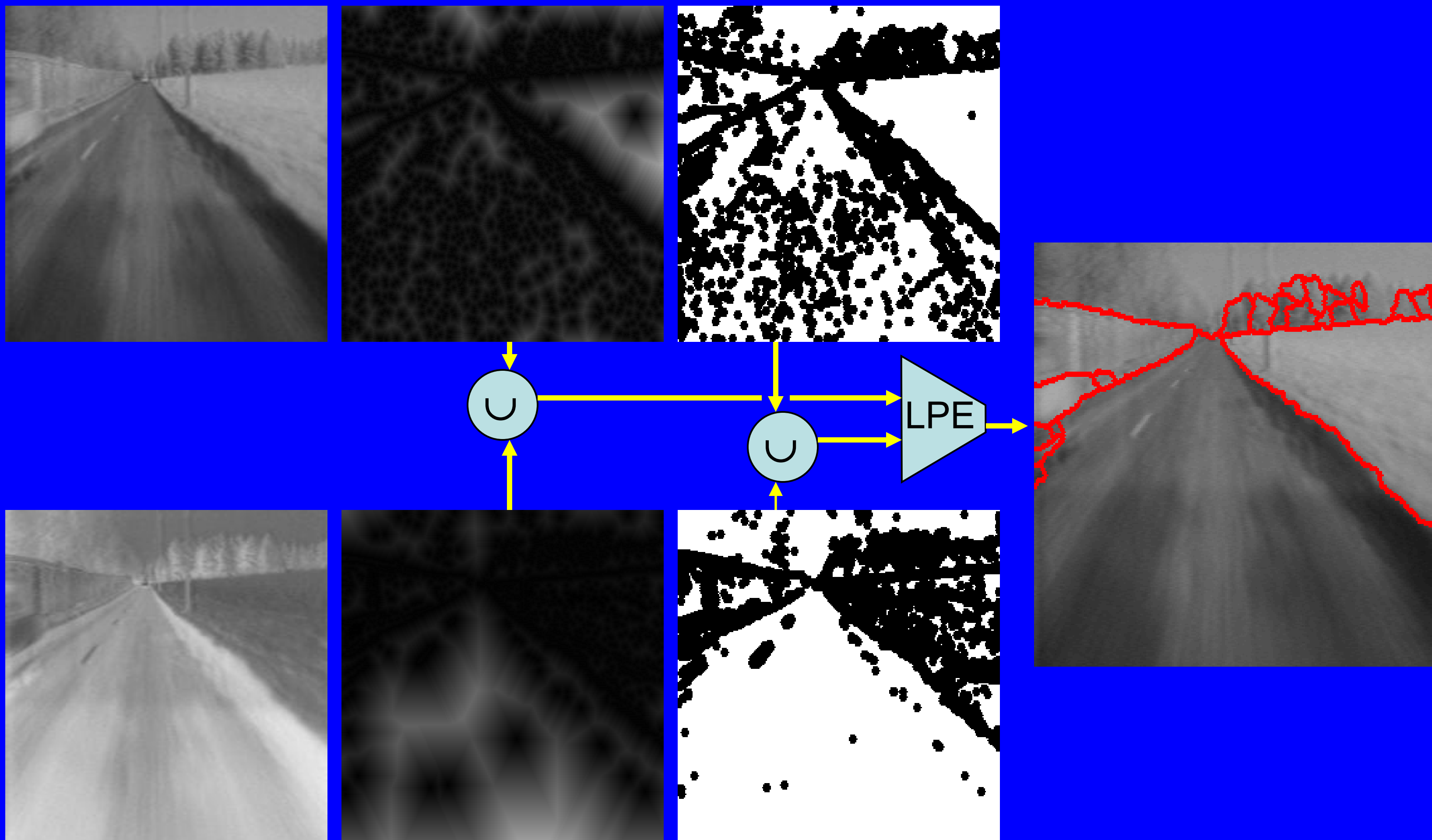
Image initiale

Quasi-distance brute



Quasi-distance corrigée

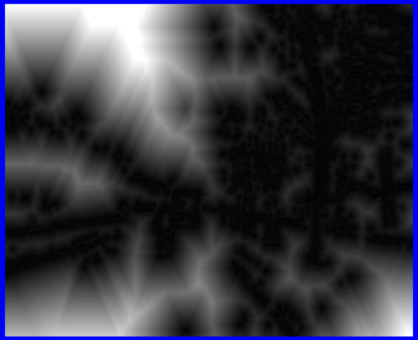
Segmentation « granulométrique »

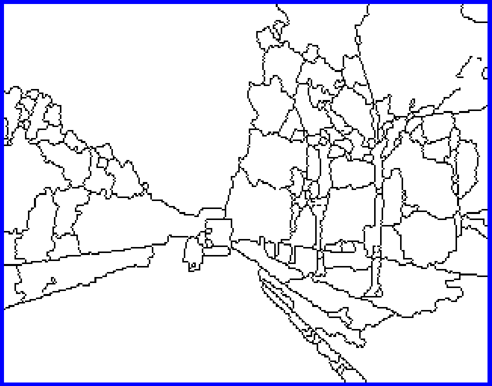


La quasi-distance appliquée à une image à teintes de gris permet de générer les distances, donc les tailles des régions plates → Marqueurs pour une segmentation basée sur la taille et la géométrie des régions.

Gradient et quasi-distance



Quasi-distance calculée sur le gradient inversé

- Une seule quasi-distance est calculée
- Hiérarchie de régions basée sur leurs contrastes relatifs (similaire à l'algorithme des cascades)
- La taille et la forme des régions est prise en compte (fermeture des régions pas parfaitement closes)

Perspectives

Les perspectives offertes par les opérateurs résiduels sont intéressantes:

• Fonctions granulométriques sur images de gris
• Segmentation plus fine d'ensembles (meilleure appréhension de la notion d'ensemble « patatoïdal »)
• Segmentation d'image non supervisée basée à la fois sur un critère de contraste ET de forme/taille (alternative à la hiérarchisation) $\longrightarrow$ Approches non paramétriques
• Descriptions par empilement de cylindres (connexion avec certains modèles d'ensembles aléatoires)
• Utilisation d'ouvertures diverses (par reconstruction, par critères, etc.)