

# INTERPOLATION D'ENSEMBLES, DE PARTITIONS ET DE FONCTIONS

Serge BEUCHER

Mai 1994

(Confidentiel)

## Avant-Propos

Cette note fait partie d'une série de trois sur les interpolations d'ensembles et de fonctions. Les deux autres ont pour auteurs J. Serra et F. Meyer. Celle-ci est entièrement consacrée à l'interpolateur auto-dual défini avec le squelette par zones d'influence. On a surtout insisté sur les aspects algorithmiques de cette transformation ce qui explique que les formules de définition des transformations sont légèrement différentes de celles données dans la note de J. Serra, les problèmes de parité inhérents à la digitalisation obligeant à compliquer quelque peu les transformations.

Cette note est abondamment illustrée. De plus, beaucoup de transformations et d'applications ont fait l'objet d'animations. Ces animations (et le logiciel sur PC permettant de les visualiser) sont disponibles auprès de l'auteur.

Cette note est loin d'être achevée et doit être considérée comme un répertoire d'idées et de pistes pour l'application de ces interpolations. C'est notamment le cas pour l'utilisation des images mosaïque et pour l'étude du mouvement.

La transformation notée  $M(X,Y)$  dans cette note correspond (avec les restrictions dues à la digitalisation citées plus haut) à l'opérateur  $A(X,Y)$  de la note de J. Serra.

## 1. Introduction

La motivation première de cette étude était la recherche d'algorithmes permettant d'interpoler et de déformer des partitions dans le but de réaliser à l'aide de transformations morphologiques des opérations similaires au "morphing" d'images mais de manière automatique. Dans la technique de "morphing" classique, l'opérateur doit contrôler la déformation en superposant sur les deux images, celle de départ et celle d'arrivée, une grille déformable. Cette étape manuelle est évidemment fastidieuse. On peut alors se demander si les outils de segmentation morphologique comme la ligne de partage des eaux associée à des marqueurs imposés ne pourrait pas apporter un peu d'automatisme à cette procédure en associant, par le biais de marqueurs communs, des régions homologues dans les deux images. La ligne de partage des eaux générant une partition de l'image, le problème suivant consiste alors à trouver le moyen de déformer la partition de la première image pour la superposer à la partition de la deuxième image, d'où l'intérêt pour les algorithmes d'interpolation. Ces premières questions (au demeurant non encore résolues loin s'en faut) en ont entraînées d'autres liées à la compression d'images. Il se trouve que, là encore, les partitions apparaissent comme des outils puissants de compression des images par l'intermédiaire de transformations comme les images-mosaïque. On peut donc légitimement envisager d'utiliser l'interpolation de partitions comme un moyen efficace de réduire la quantité d'information transmise dans le cas de séquences d'images. Enfin, il existe un troisième type de problème en traitement d'images, consistant à quantifier la déformation et/ou le déplacement d'objets ou de régions

d'une image à l'autre. Ce problème apparaît notamment en stéréovision mais aussi dans l'analyse du mouvement (mouvement lié au déplacement d'objets dans une scène mais également mouvement d'ensemble de la scène dû au déplacement de la caméra). Il peut se formaliser de la façon suivante: comment, à partir de l'ensemble des déformations permettant de passer d'un ensemble à un autre reconstruire le champ vectoriel des déplacements et donc la fonction distance généralisée qui pilote ces déplacements? C'est en quelque sorte le problème inverse de celui que l'on rencontre le plus souvent: la distance généralisée est donnée (le plus souvent sous forme d'un graphe valué) et on construit des dilatations et érosions géodésiques généralisées sur cet espace (pour obtenir, c'est l'exemple le plus classique, la ligne de partage des eaux d'une fonction). Dans le cas des déformations, les dilatations successives sont données et on aimerait bien remonter à la métrique sous-jacente pour estimer les vecteurs-déplacements associés.

## 2. Interpolation d'ensembles

Toutes les interpolations décrites dans cette note sont basées sur une seule transformation morphologique: le squelette par zones d'influence (SQUIZ). D'autres approches basées sur des transformations géodésiques plus ou moins complexes ont été étudiées, cependant le SQUIZ est l'outil le plus simple à mettre en oeuvre, le plus universel (il fonctionne aussi bien pour les ensembles que pour les fonctions) et celui dont les résultats sont les plus esthétiques. On ne montrera pas ici que cette transformation produit bien une géodésique et les aspects théoriques liés à ce type de transformation seront laissés de côté au profit d'une démarche plus intuitive et algorithmique.

### 2.1. La transformation de base: le squelette par zones d'influence

Soient, dans un espace  $E$ , deux ensembles  $X$  et  $Y \in \mathcal{P}(E)$  tels que  $X \cap Y \neq \emptyset$  et  $X \cup Y \neq E$ . Considérons alors l'ensemble  $W$  formé des deux composantes suivantes (Figure 1):

$$W = \{X \cap Y, (X \cup Y)^c\} \quad (1)$$

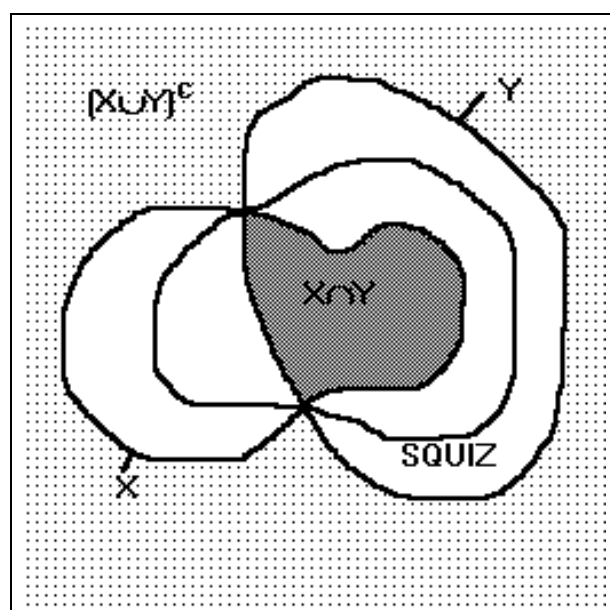


Figure 1: SQUIZ des ensembles  $X \cap Y$  et  $(X \cup Y)^c$

Le SQUIZ de  $W$  fournit les zones d'influence ( $IZ_W$ ) des deux composantes de  $W$  (notons que ces deux composantes ne sont pas forcément des composantes connexes). En particulier:

$$IZ_W(X \cap Y) = \{x \in E : d(x, X \cap Y) < d(x, (X \cup Y)^c)\} \quad (2)$$

où  $d$  est la pseudo-distance euclidienne d'un point à un ensemble.

On désigne par  $M(X, Y)$  la zone d'influence de  $X \cap Y$ . Cet ensemble est l'ensemble médian de  $X$  et  $Y$ . Il est, dans la géodésique engendrée par le SQUIZ, à égale distance de  $X$  et de  $Y$ :

$$M(X, Y) = IZ(X \cap Y) \quad (3)$$

Cette transformation est auto-duale. On constate en effet immédiatement que:

$$M(X, Y)^c = M(X^c, Y^c) \quad (4)$$

Cette propriété est intéressante car elle assure une certaine robustesse vis-à-vis de la complémentarité, ce qui n'est pas toujours le cas avec toutes les géodésiques. Ce n'est pas vrai en particulier pour la distance de Hausdorff.

En revanche, cette opération n'est pas associative. Si trois ensembles  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont choisis, on ne peut pas mettre en évidence l'ensemble médian de ces trois ensembles en déterminant  $M(X, Y)$  puis  $M[Z, M(X, Y)]$ . Le résultat (en supposant qu'il est non trivial) dépendra de l'ordre des opérations.

Pour définir le médian de  $n$  ensembles  $X_i$ , avec  $\bigcap_i X_i \neq \emptyset$  et  $\bigcup_i X_i \neq E$  (tous les ensembles doivent avoir au moins un point commun et ne pas recouvrir totalement l'espace), on peut écrire:

$$M(X_i) = IZ_W\left(\bigcap_i X_i\right) \quad (5)$$

avec:

$$W = \left\{ \bigcap_i X_i, \left[ \bigcup_i X_i \right]^c \right\} \quad (6)$$

## 2.2. Séquences de déformation

On peut, en réitérant cette transformation construire à partir des ensembles  $X$  et  $Y$  une séquence de  $n+1$  ensembles représentant les  $n$  étapes de déformation pour passer de  $X$  à  $Y$ . On a:

$$K_0 = X ; K_n = Y \quad (7)$$

Puis:

$$K_{n/2} = M(K_0, K_n) \quad (8)$$

$$K_{n/4} = M(K_0, K_{n/2}) ; K_{3n/4} = M(K_{n/2}, K_n) \quad (9)$$

et à la  $i+1$ ème itération:

$$K_{n/2^i} = M(K_0, K_{n/2^{i+1}}) ; \dots \quad (10)$$

Le nombre d'ensembles intermédiaires augmentant de  $2^{i-1}$  à l'itération  $i$ , le nombre  $n$  doit être une puissance de 2 pour que ce nombre corresponde à un nombre entier

d'itérations. On obtient alors une séquence de  $2^{i+1}$  ensembles, deux ensembles consécutifs étant à la distance  $1/2^i$  si on pose que la distance entre les ensembles extrêmes est égale à l'unité. Lorsque  $n$  n'est pas une puissance de 2, on peut encore construire les ensembles intermédiaires par le même procédé et les étiqueter avec les  $n-1$  valeurs entières comprises entre 0 et  $n$ . Cependant la distance entre deux ensembles consécutifs ne sera pas en toute rigueur égale à  $1/n$ .

Le tableau 1 représente une telle séquence de déformations. L'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée n'ont pas la même connexité. Cela, cependant, ne perturbe en rien la définition et la réalisation de la transformation.

### 2.3. L'algorithme

L'algorithme de calcul de  $M(X,Y)$  à partir de  $X$  et  $Y$  est simple à mettre en oeuvre. Il n'utilise pas, contrairement au SQUIZ classique, d'opérations d'épaississement mais de simples dilatations. En effet l'union de  $X \cap Y$  et de  $(X \cup Y)^c$  peut être connexe ce qui interdit l'usage d'épaississements. En contrepartie, l'utilisation de dilatations permet d'obtenir un SQUIZ beaucoup plus propre sans biais dû au choix de la composante connexe qui croît en premier puisque toutes les composantes connexes croissent en même temps. On a :

$$Z_0 = X \cap Y \text{ et } W_0 = (X \cup Y)^c \quad (11)$$

Il suffit alors de réitérer jusqu'à idempotence les opérations suivantes ( $B$  est la boule élémentaire):

$$Z_i = [(Z_{i-1} \oplus B)/(W_{i-1} \oplus B)] \cup Z_{i-1} \quad (12)$$

$$W_i = [(W_{i-1} \oplus B)/(Z_{i-1} \oplus B)] \cup W_{i-1} \quad (13)$$

On a alors:

$$M(X, Y) = Z_\infty \quad (14)$$

L'union à chaque itération avec le résultat précédent est indispensable pour être assuré, à cause de problèmes de parité sur la trame, que l'opération est extensive. Pour les mêmes raisons, on n'a généralement pas l'égalité  $Z_\infty = (W_\infty)^c$ . Ce défaut devra être pris en compte si on alterne les ensembles de départ et d'arrivée dans les applications de cette transformation.

On a vu ci-dessus qu'on ne pouvait pas obtenir directement l'ensemble situé à la distance  $d_1$  de  $X$  et  $d_2$  de  $Y$  avec  $d_1+d_2=1$  sans passer par des itérations de l'algorithme. Cependant la structure de l'algorithme suggère d'y parvenir directement en modifiant les vitesses de croissance des ensembles  $Z_i$  et  $W_i$ , c'est-à-dire la taille des dilatations. En effet, si  $v_1$  est la taille du dilaté élémentaire de  $Z_i$  et  $v_2$  celle du dilaté de  $W_i$ , si  $k$  est un facteur de normation, on a :

$$d_1 = k v_1 \text{ et } d_2 = k v_2 \text{ avec } d_1 + d_2 = 1 \quad (15)$$

ce qui donne:

$$d_1 = \frac{v_1}{v_1+v_2} ; d_2 = \frac{v_2}{v_1+v_2} \text{ et } v_1/v_2 = d_1/d_2 \quad (16)$$

Cette approche cependant amène une importante remarque et soulève une difficulté algorithmique.

L'importante remarque est que la métrique induite par cette méthode est différente de la métrique générée par l'approche dichotomique. Pour s'en convaincre, il suffit de calculer le

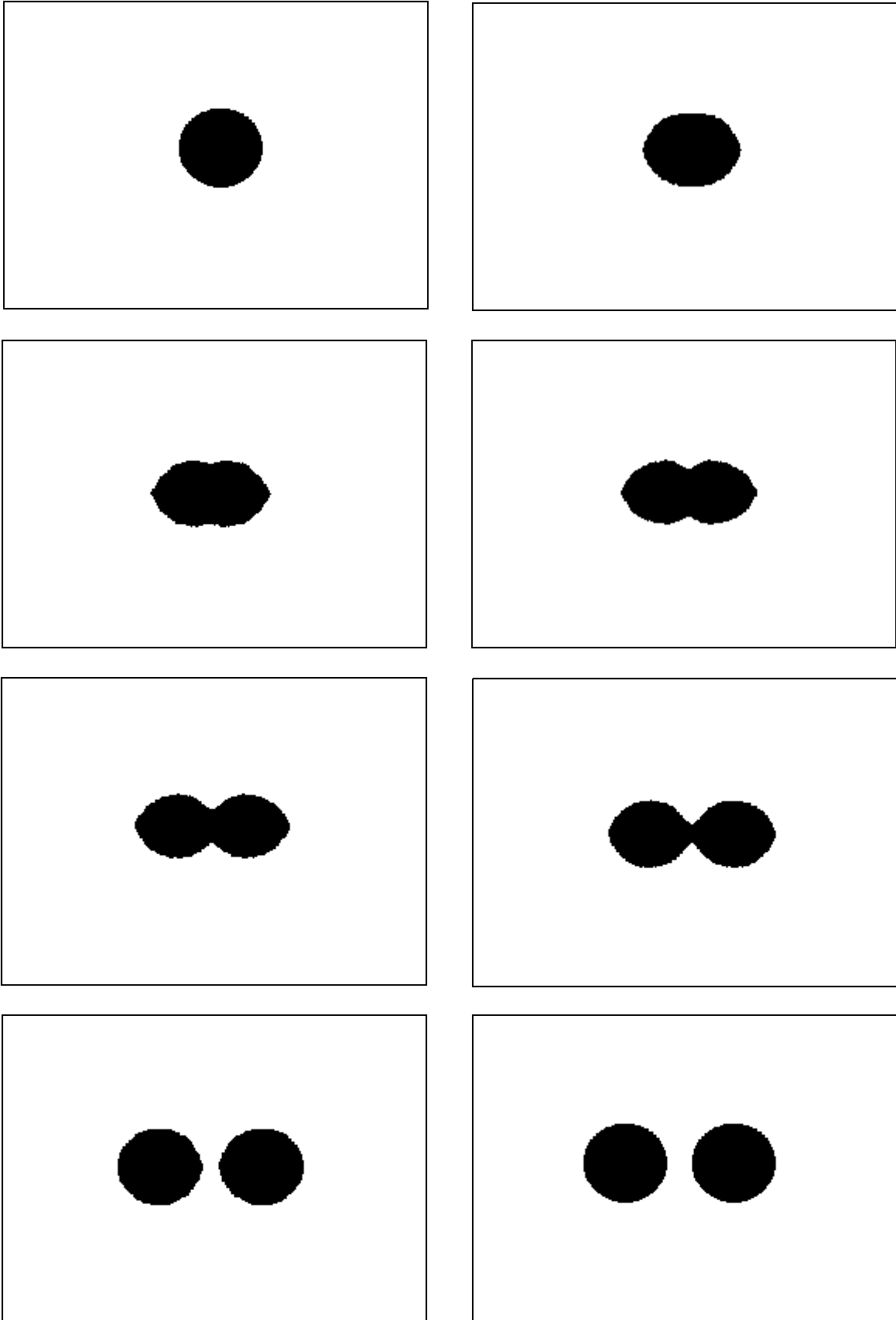


Tableau 1: Séquence d'interpolations entre les ensembles X (en haut à gauche) et Y (en bas à droite).

SQUIZ de deux points A et B - c'est la droite médiatrice du segment AB - puis le SQUIZ du point A et du demi-plan contenant B. Le SQUIZ final est une parabole. Le point C est à la distance 1/4 de A et 3/4 de B (si  $d(A,B)=1$ ). Mais si on construit le SQUIZ des points A et B en affectant une vitesse de progression égale à 1 pour les dilatations de A et de 3 pour celles de B, ce SQUIZ sera une hyperbole.

La difficulté algorithmique est la suivante: avec des dilatations de tailles respectives  $v_1$  et  $v_2$ , le SQUIZ obtenu peut être d'épaisseur supérieure à 1. C'est en particulier le cas si à la fois  $v_1$  et  $v_2$  sont supérieurs à 1. Théoriquement, seul le rapport  $v_1/v_2$  importe mais, en pratique, il convient de toujours choisir la fraction irréductible de ce rapport afin de minimiser l'épaisseur du SQUIZ. Cependant, comme ce rapport ne peut pas toujours être de la forme  $1/n$  ou  $n/1$ , le SQUIZ résultant sera épais et des rapports croissants peuvent très bien ne pas conduire à des zones d'influence incluses les unes dans les autres (Figure 2). Pour minimiser cette épaisseur, il faudra calculer le SQUIZ avec le rapport  $v_1/v_2$  réduit à sa fraction irréductible, puis lorsque l'idempotence sera atteinte pour ce rapport, continuer avec la fraction irréductible du rapport  $(v_1 - 1)/v_2'$  avec  $v_2' = E[v_2(v_1 - 1)/v_1 + 0.5]$  et ainsi de suite jusqu'à ce que ce rapport soit de la forme  $1/n$ .

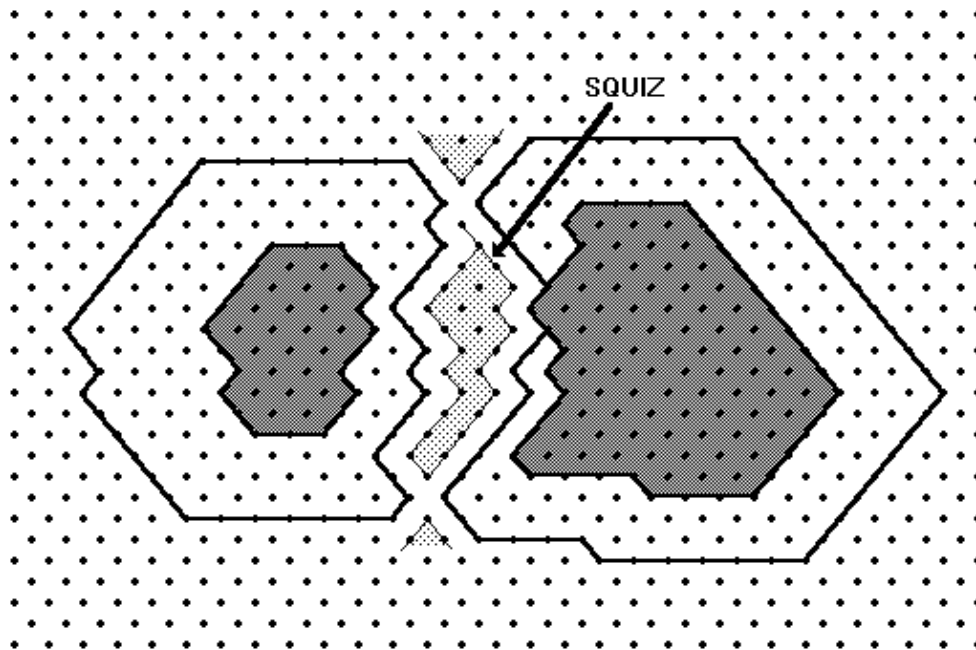


Figure 2: SQUIZ épais lorsque les rapports de taille des dilatations sont premiers entre eux

Cette métrique est cependant intéressante, mais elle n'est pas aussi simple à utiliser qu'on pourrait le penser a priori.

### 3. Le cas des partitions

#### 3.1. Généralités

Considérons deux partitions T et T' :

$$T = \{C_i\}, T' = \{C'_i\} \quad (17)$$

Nous supposons qu'il y a une correspondance biunivoque entre les cellules  $C_i$  de la première partition et les cellules  $C'_i$  de la seconde. Plus précisément, on peut écrire (Figure 3):

$$\forall C_i \in T, \exists C'_i \in T' : C_i \cap C'_i \neq \emptyset \quad (18)$$

Soit  $W$  l'ensemble constitué par toutes les composantes  $C_i \cap C'_i$ :

$$W = \{C_i \cap C'_i\} \quad (19)$$

On peut alors définir la partition médiane  $M(T, T')$  comme la partition constituée par les zones d'influence des  $(C_i \cap C'_i)$ :

$$M(T, T') = \{IZ_W(C_i \cap C'_i)\} \quad (20)$$

Le médian de deux partitions est donc, d'une certaine manière, encore plus simple à définir que le médian de deux ensembles.

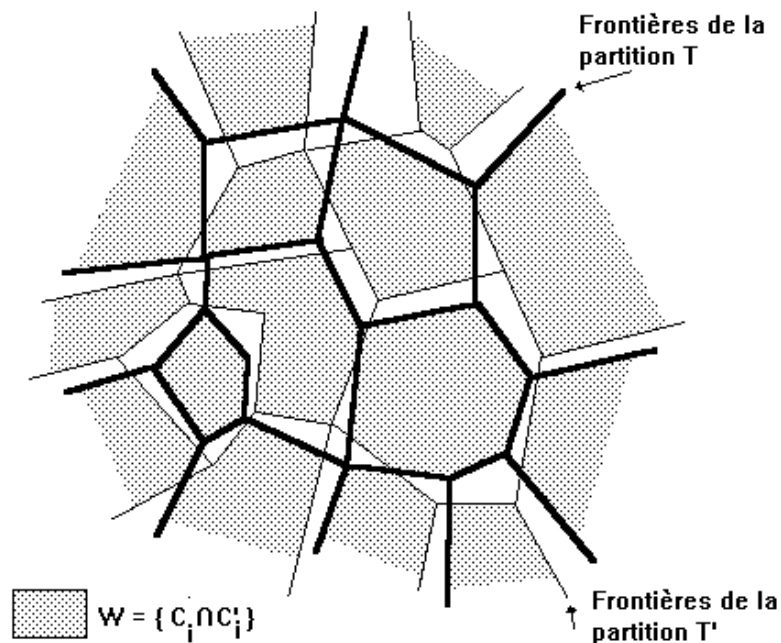


Figure 3: Partitions avec correspondance biunivoque des cellules

## 3.2. Algorithmes

Deux types d'algorithmes sont utilisés pour construire  $M(T, T')$  selon que les partitions ont une frontière (les cellules sont séparées par une frontière d'épaisseur un pixel) ou sont sans frontière (les cellules sont jointes).

### 3.2.1. Partitions avec frontières

Dans ce cas, la partition médiane s'obtient par un simple squelette par zones d'influence de  $W$  à l'aide d'épaississements, avec toutes les imperfections liées à ce genre de transformation.

### 3.2.2. Partitions sans frontières

Si la partition est sans frontière, les cellules sont représentées avec des couleurs ou des niveaux de gris distincts. Chaque cellule possède donc une étiquette. La cellule  $C_i \in T$  et sa correspondante  $C'_i \in T'$  ont la même étiquette  $i$ . Les partitions  $T$  et  $T'$  deviennent alors deux fonctions étagées  $f$  et  $f'$ :

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow \mathbb{N}^+ \\ x &\rightarrow f(x) = i, x \in C_i \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} f' : E &\rightarrow \mathbb{N}^+ \\ x &\rightarrow f'(x) = i, x \in C'_i \end{aligned} \quad (22)$$

Nous allons construire  $M(T, T')$  en fabricant à l'aide de simples dilatations la fonction  $g$  telle que:

$$\begin{aligned} g : E &\rightarrow \mathbb{N}^+ \\ x &\rightarrow g(x) = i, x \in IZ_w(C_i \cap C'_i) \end{aligned} \quad (23)$$

L'algorithme utilise un double étiquetage des partitions  $T$  et  $T'$ . On supposera que ces partitions contiennent  $n$  cellules. Les étapes du traitement sont les suivantes:

- on calcule  $g_0$ :

$$\begin{aligned} g_0(x) = f(x) = f'(x) &\text{ ssi } f(x) = f'(x) \Leftrightarrow x \in C_i \cap C'_i, \forall i \\ g_0(x) = 0 &\text{ sinon} \end{aligned} \quad (24)$$

- on calcule alors la fonction  $g'_0$ :

$$\begin{aligned} g'_0(x) = n - g_0(x) &\text{ ssi } g_0(x) \neq 0 \\ g'_0(x) = 0 &\text{ sinon} \end{aligned} \quad (25)$$

Cette fonction est en fait similaire à  $g_0$ . La différence provient de ce que les étiquettes  $i$  des ensembles  $C_i \cap C'_i$  sont devenues  $(n - i)$ .

Cette phase d'initialisation étant terminée, pour chaque  $g_i$  et  $g'_i$ , on effectue les opérations suivantes:

- calcul de la fonction  $h_i$ :

$$h_i = (g_i \oplus B) + (g'_i \oplus B) \quad (26)$$

$B$  étant la boule élémentaire de  $E$ .

- on détermine alors une fonction  $h$  caractéristique de l'ensemble des points pour lesquels  $h_i$  est inférieure ou égale à  $n$ :

$$\begin{aligned} h = 1 &\text{ ssi } h_i \leq n \\ h = 0 &\text{ sinon} \end{aligned} \quad (27)$$

- on calcule alors les fonctions  $g_{i+1}$  et  $g'_{i+1}$ :

$$g_{i+1} = \sup[(g_i \oplus B) \times h, g_i] \quad (28)$$

$$g'_{i+1} = \sup[(g'_i \oplus B) \times h, g'_i] \quad (29)$$

L'algorithme est alors réitéré jusqu'à idempotence. On obtient finalement:

$$g = g_\infty \quad (30)$$



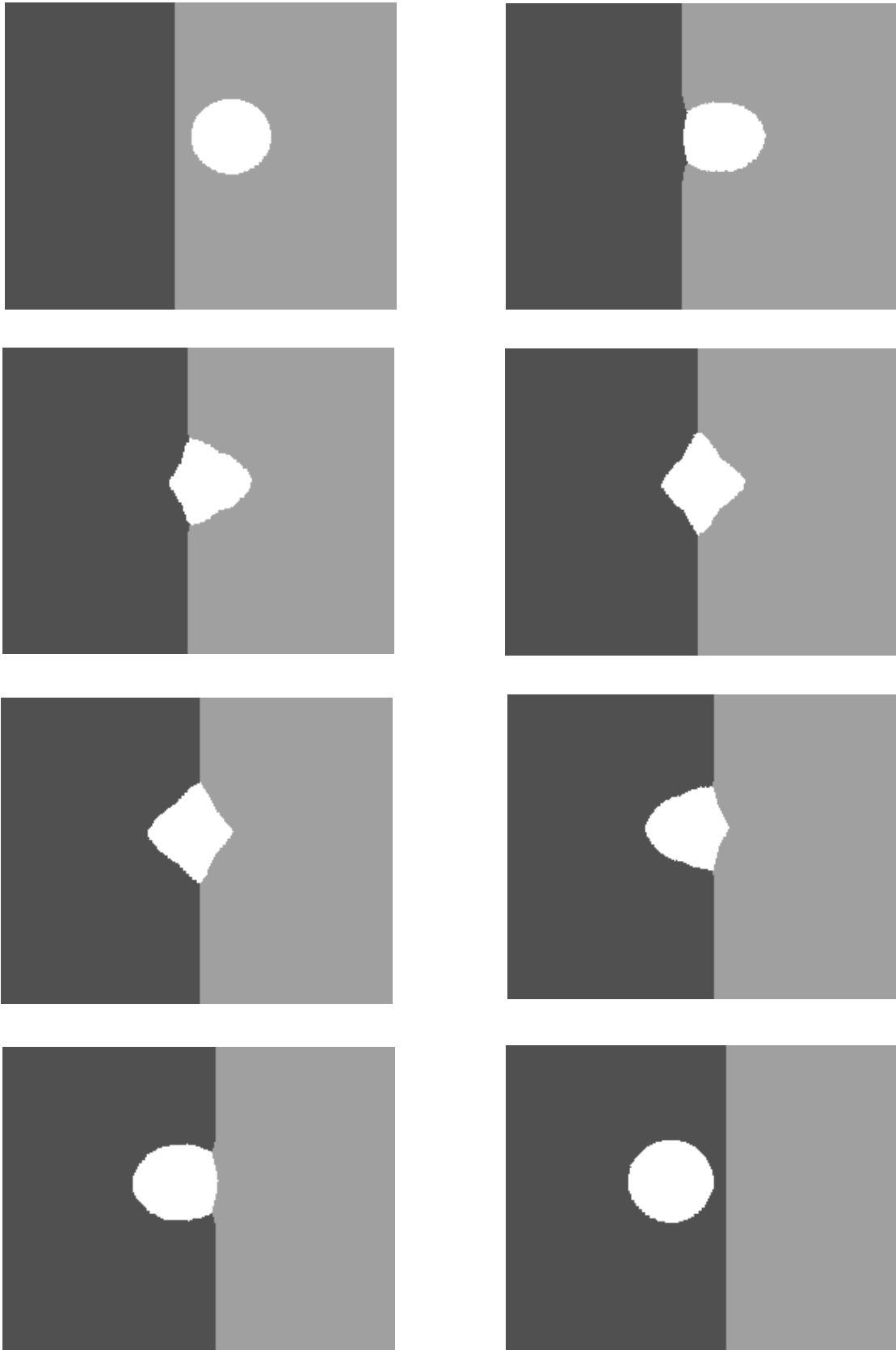


Tableau 2: Séquence d'interpolation d'une partition formée de trois cellules  
La première image est en haut à gauche, la dernière en bas à droite.

Cet algorithme, transposé aux fonctions étagées, est tout-à-fait identique à l'algorithme ensembliste. On peut en particulier utiliser des dilatations de taille différentes pour  $g_i$  et  $g'_i$  pour engendrer la métrique déjà introduite plus haut, avec les mêmes remarques et difficultés algorithmiques déjà évoquées. Le double étiquetage initial évite un traitement individuel des cellules en détectant leur connexion par débordement de la fonction  $h_i$  (Figure 4).

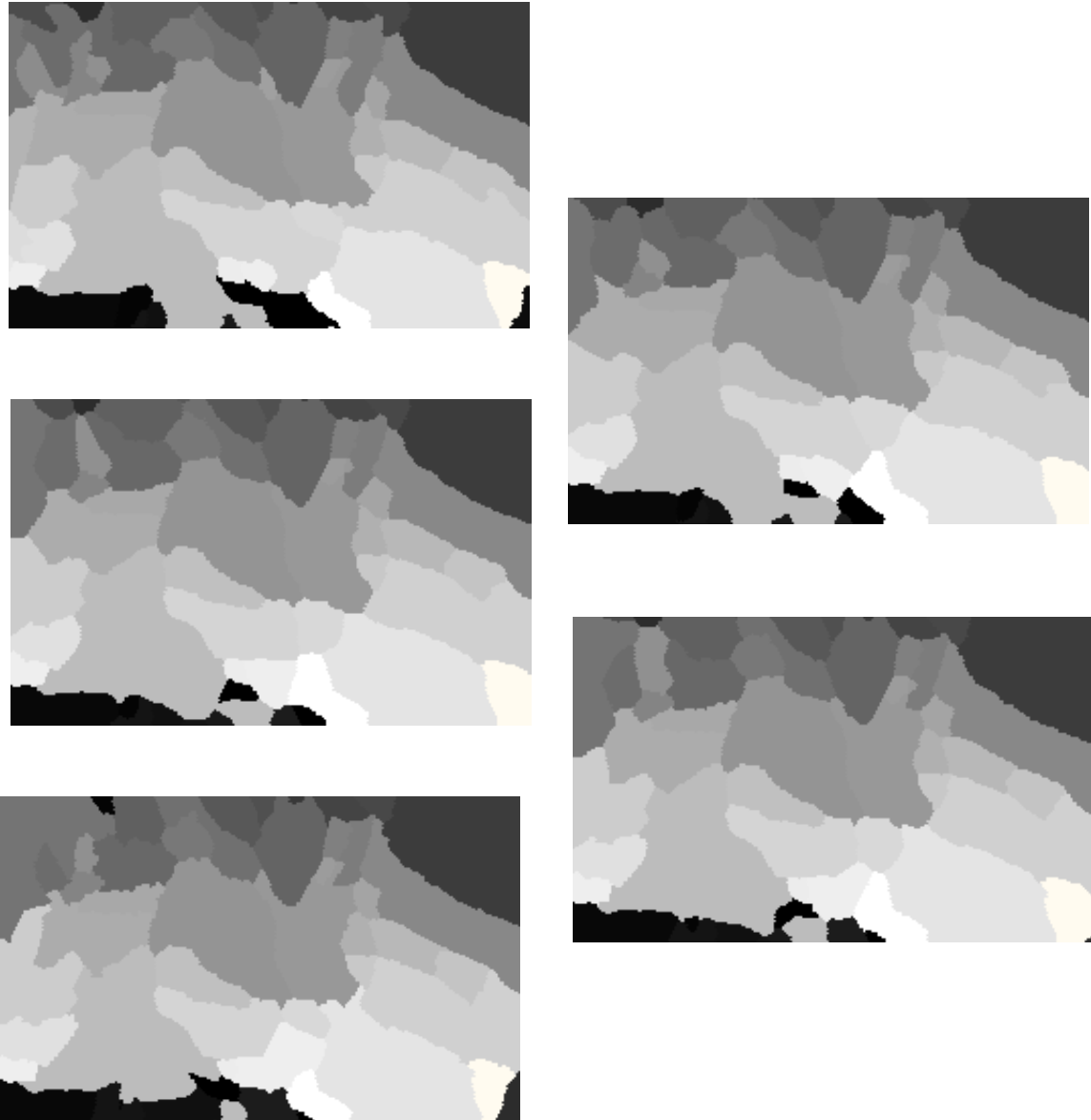


Tableau 3: Interpolation entre deux partitions

L'image du haut et celle du bas sont extraites d'une paire stéréo d'images de fractures métalliques après segmentation des facettes de clivage.

Les tableaux 2 et 3 représentent des séquences de déformation d'une partition. La partition du tableau 2 est assez simple. Celle du tableau 3 correspond à deux images d'une

paire stéréoscopique.

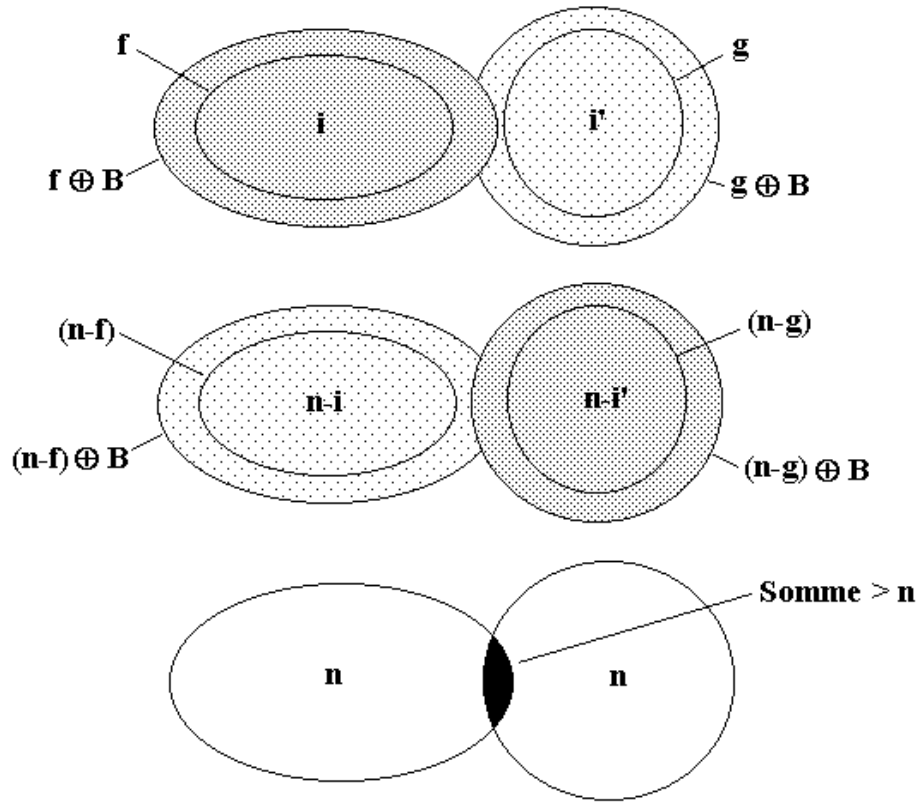


Figure 4: Utilisation du double étiquetage dans le SQUIZ par dilatation

#### 4. Extension aux fonctions

La notion de médian donnée dans le cas ensembliste s'étend immédiatement aux fonctions même non étagées par le biais des sur-graphes et des sous-graphes.

##### 4.1. Cas général

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $E$ . Considérons, d'une part, le sous-graphe de  $\inf(f,g)$ :

$$D[\inf(f, g)] = D(f) \cap D(g) \quad (31)$$

et, d'autre part, le sur-graphe de  $\sup(f,g)$ :

$$U[\sup(f, g)] = [D(f) \cup D(g)]^c \quad (32)$$

Considérons l'ensemble  $W$  formé des deux composantes suivantes:

$$W = \{D[\inf(f, g)], U[\sup(f, g)]\} \quad (33)$$

On définit la fonction médiane de  $f$  et  $g$  comme la fonction  $M(f,g)$  dont le sous-graphe est la zone d'influence du sous-graphe de  $\inf(f,g)$  dans le SQUIZ tri-dimensionnel de  $W$  (Figure 5):

$$D[M(f, g)] = IZ_W[D[\inf(f, g)]] \quad (34)$$

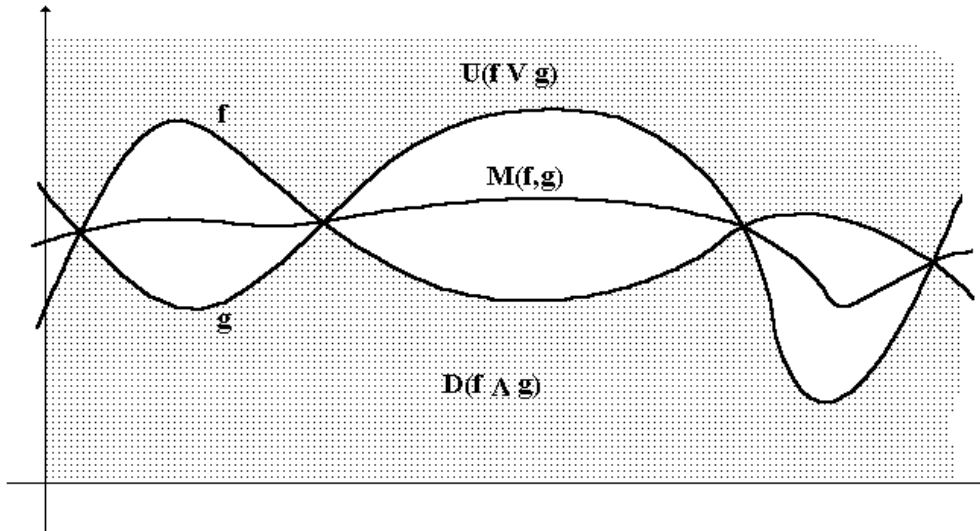


Figure 5: Médian de deux fonctions par SQUIZ du sous-graphe de  $\inf(f,g)$  et du sur-graphe de  $\sup(f,g)$

#### 4.2. Algorithme

Comme dans le cas ensembliste, l'algorithme consiste à dilater avec une boule tri-dimensionnelle élémentaire  $B$  les ensembles  $U$  et  $D$ . En posant:

$$Z_0 = D[\inf(f, g)]; W_0 = U[\sup(f, g)] \quad (35)$$

on utilise les formules (12) et (13) pour obtenir  $Z_i$  et  $W_i$ .

On peut écrire, en posant  $z_0 = \inf(f, g)$  et  $w_0 = \sup(f, g)$ :

$$Z_1 = D[\sup(\inf(z_0 \oplus B, w_0 \ominus B), z_0)] \quad (36)$$

$$W_1^c = D[\inf(\sup(w_0 \ominus B, z_0 \oplus B), w_0)] \quad (37)$$

$Z_1$  et  $W_1$  sont respectivement le sous-graphe de  $z_1 = \sup(\inf(z_0 \oplus B, w_0 \ominus B), z_0)$  et le sur-graphe de  $w_1 = \inf(\sup(w_0 \ominus B, z_0 \oplus B), w_0)$

Ceci est vrai également à l'itération  $i$ :

$$z_i = \sup(\inf(z_{i-1} \oplus B, w_{i-1} \ominus B), z_{i-1}) \quad (38)$$

$$w_i = \inf(\sup(w_{i-1} \ominus B, z_{i-1} \oplus B), w_{i-1}) \quad (39)$$

Finalement, on a:

$$M(f, g) = z_\infty = w_\infty \quad (40)$$

Le tableau 4 représente une séquence d'interpolations entre les deux images formant les extrémités de la série.

### 4.3. Remarques

- Le médian de deux fonctions est, comme le montre les formules ci-dessus, une fonction. En effet, la construction du SQUIZ de U et de D produit toujours des sous-graphes, ceux des fonctions  $z_i$  et  $w_i$ .
- Le médian n'est pas compatible avec les changements d'échelle et en particulier avec les affinités comme l'illustre l'exemple ci-dessous (Figure 6):

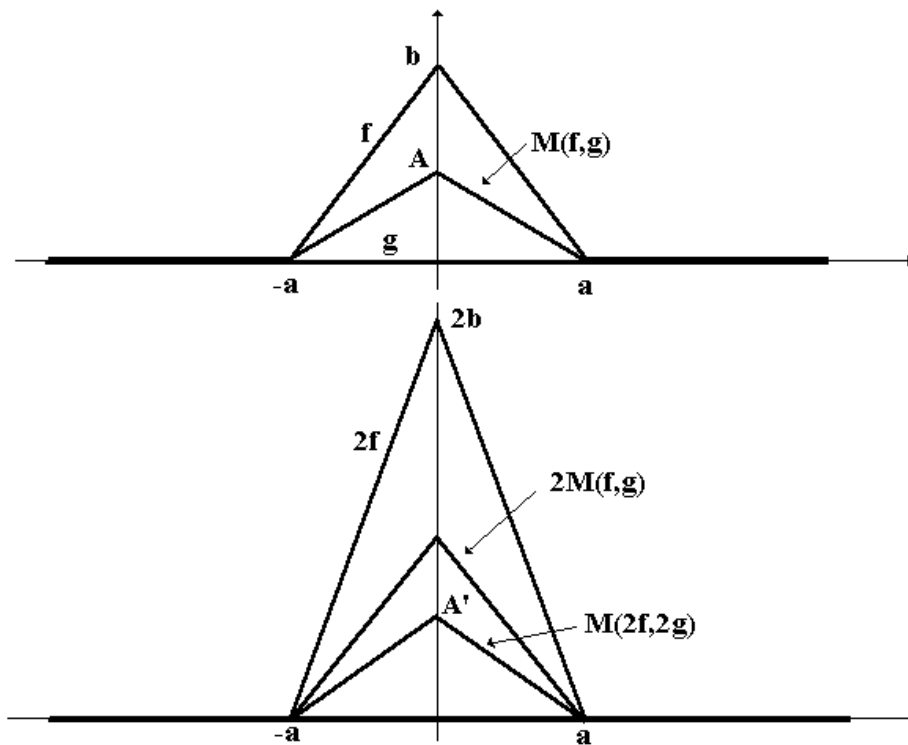


Figure 6: Lorsque les fonctions  $f$  et  $g$  sont multipliées par 2,  $M(2f, 2g)$  n'est pas le double de  $M(f, g)$

- Le médian de deux fonctions produit un effet de lissage assez important en supprimant les pics clairs et sombres des fonctions  $f$  et  $g$ . Ce médian n'est pas un filtre morphologique.

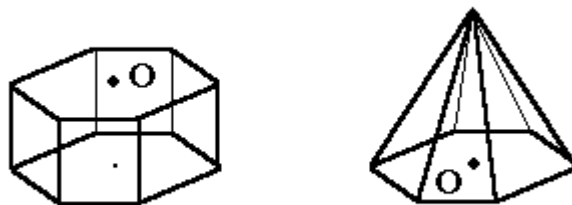


Figure 7: Éléments structurants utilisés dans le SQUIZ tridimensionnel



Tableau 4: Interpolation de deux fonctions: images intermédiaires dans la séquence

- Dans le cas digital, la boule élémentaire est le plus souvent un "diamant" ou un cylindre de hauteur unité (Figure 7).
- Contrairement au cas ensembliste, le médian de deux fonctions définies sur le même espace  $E$  existe toujours. En effet, si dans le cas ensembliste  $X$  et  $Y$  doivent avoir une intersection non vide pour que  $M(X,Y)$  soit non vide,  $\inf(f,g)$  et  $\sup(f,g)$  en revanche existent toujours.

#### 4.4. Les ensembles et partitions considérés comme fonctions

La remarque précédente suggère d'utiliser les fonctions indicatrices des ensembles lorsque l'intersection de  $X$  et de  $Y$  est vide. Considérant les indicatrices  $k_X$  et  $k_Y$  de  $X$  et de  $Y$ , on peut calculer  $M(k_X, k_Y)$ . La fonction résultante ne sera pas cependant une fonction indicatrice. Mais on peut s'y ramener en calculant l'image-mosaïque de  $M(k_X, k_Y)$ . L'image-mosaïque s'obtient en déterminant la ligne de partage des eaux du gradient morphologique de  $M(k_X, k_Y)$  et en affectant à chaque bassin versant la valeur de la fonction  $M(k_X, k_Y)$  à l'endroit du minimum de gradient correspondant à ce bassin versant. Dans le cas particulier de la fonction  $M(k_X, k_Y)$ , des zones de plateau peuvent apparaître (Figure 8). Leur apparition est liée en fait à la largeur relative des régions  $X/Y$  et  $Y/X$  par rapport à la hauteur des fonctions indicatrices et est l'illustration de l'incompatibilité de la transformation médian avec les affinités. Pour conserver la cohérence du résultat par rapport au médian ensembliste  $M(X,Y)$  lorsque l'intersection de  $X$  et de  $Y$  n'est pas vide et surtout pour rendre le résultat invariant avec les changements d'échelle verticale, il faut que la ligne de partage des eaux du gradient soit réalisée avec les marqueurs qui correspondent aux extrema de  $M(k_X, k_Y)$  et non à toutes les zones plates de la fonction (Figure 9).

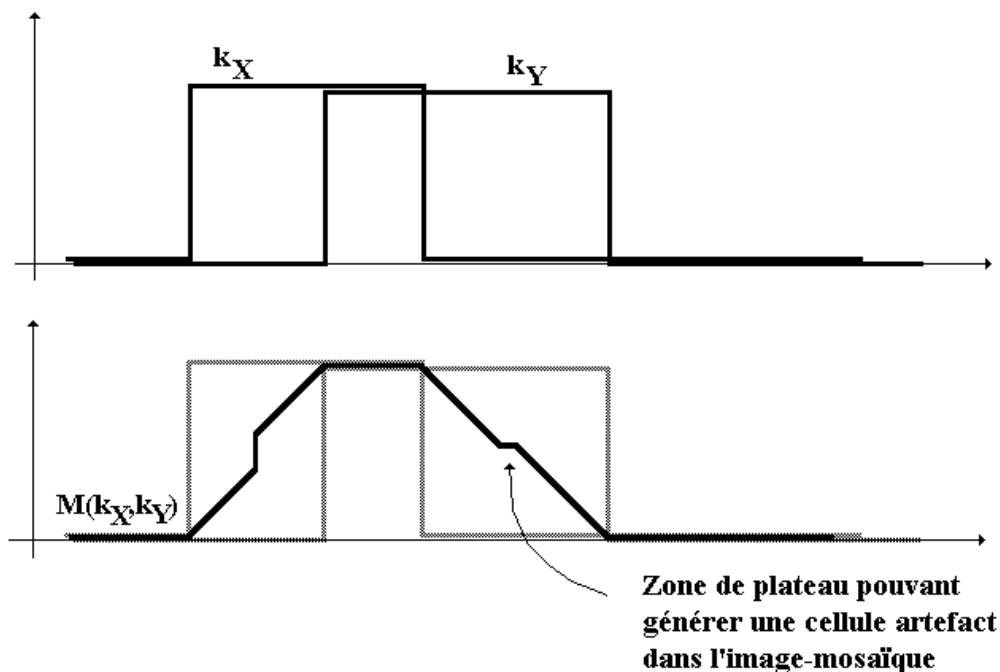


Figure 8: Apparition de plateaux artificiels dans l'image médian de deux fonctions indicatrices d'ensembles

Cette solution est plus difficile à mettre en oeuvre pour les partitions, car certains plateaux de la fonction médian peuvent correspondre effectivement à des marqueurs. Il devient nécessaire dans ce cas de définir (ce qui n'a pas été fait) les critères de correspondance entre les cellules des deux partitions pour choisir parmi les minima du gradient de la fonction médian ceux qui peuvent être conservés dans la fabrication de l'image mosaïque. On peut aussi, faute d'une meilleure approche, se contenter de calculer l'image mosaïque classique. Des cellules artefacts risquent d'apparaître, mais si les interpolations sont utilisées pour calculer des images intermédiaires dans une séquence destinée à être visualisée, cet inconvénient est mineur.

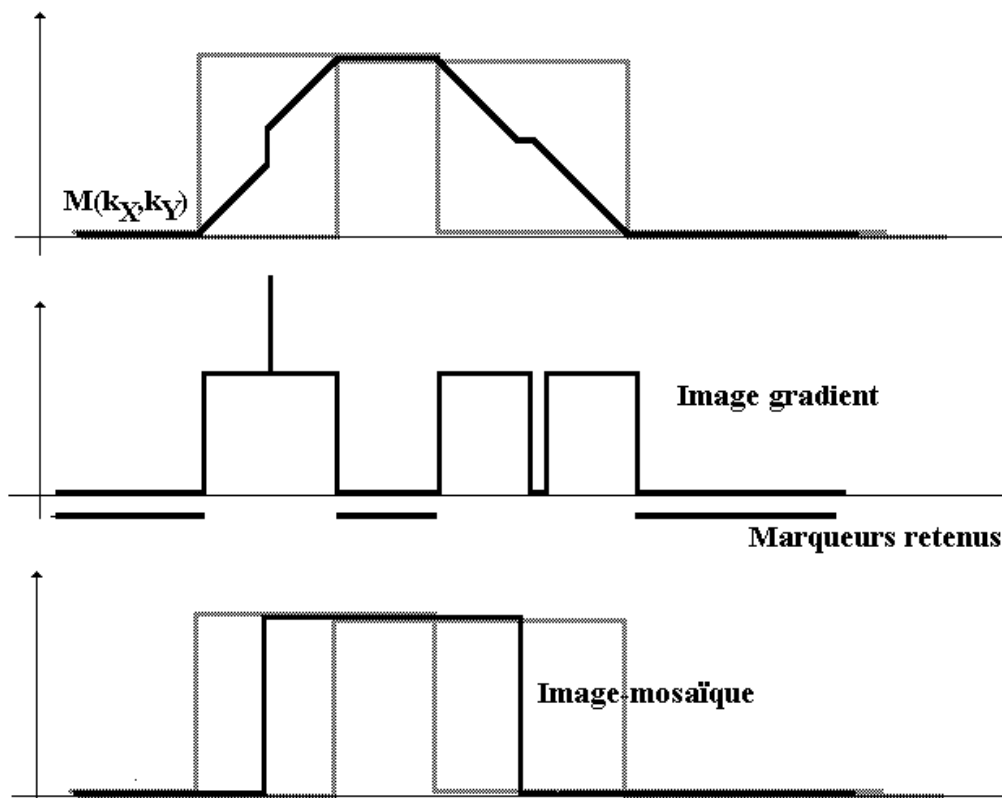


Figure 9: Sélection des marqueurs utilisés pour la LPE du gradient de l'image-médian et la fabrication de l'image-mosaïque.

## 5. Fonctions distance

Revenons aux interpolations ensemblistes. On a vu que, partant de deux ensembles  $X$  et  $Y$  vérifiant  $X \cap Y \neq \emptyset$  et  $X \cup Y \neq E$ , on pouvait générer les ensembles intermédiaires  $M_\lambda(X, Y)$  dépendant du paramètre  $\lambda$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ), avec  $M_0(X, Y) = X$  et  $M_1(X, Y) = Y$ . Cette transformation n'est pas monotone par rapport à  $\lambda$ . On peut cependant séparer  $M_\lambda(X, Y)$  en deux composantes, une qui est extensive, l'autre étant anti-extensive en fonction de  $\lambda$ . Considérons en effet les ensembles  $X \cap Y$  et  $X^c$ . On peut effectuer le SQUIZ de ces deux ensembles disjoints. Appelons  $M(X, Y)$  la zone d'influence de  $X \cap Y$ . On constate immédiatement que le SQUIZ obtenu correspond à la partie du SQUIZ associé à  $M(X, Y)$  située dans  $X/Y$ . On peut également réitérer cette opération et définir ainsi une suite



d'ensembles  $M_\lambda(X,Y)$  avec  $M_0(X,Y) = X$  et  $M_1(X,Y) = X \cap Y$ . La suite  $M_\lambda(X,Y)$  est monotone décroissante en fonction de  $\lambda$ . On peut lui associer une fonction  $d^-$  définie sur  $X$ , chaque  $M_\lambda$  correspondant au seuil au niveau  $\lambda$  de  $d^-$ :

$$M_\lambda = \{x \in X: d^-(x) \geq \lambda\} \quad (41)$$

De la même façon, considérons maintenant les ensembles  $X \cap Y$  et  $Y^c$ . Le SQUIZ de ces deux ensembles disjoints produit l'ensemble  $M^+(X,Y)$  correspondant à la zone d'influence de  $X \cap Y$ . On peut également définir la suite d'ensembles  $M^+_\lambda(X,Y)$ , suite cette fois monotone croissante en fonction de  $\lambda$ . A cette suite correspond la fonction  $d^+$  définie sur  $Y$ . On a:

$$M^+_\lambda = \{x \in Y: d^+(x) \leq \lambda\} \quad (42)$$

Les ensembles  $M_\lambda$  et  $M^+_\lambda$  permettent de séparer la déformation des ensembles  $X$  et  $Y$  en une composante anti-extensive (c'est en fait une érosion) et une composante extensive (une dilatation).

La fonction  $d$  égale à  $(d^+ + d^-)/2$  a comme support  $X \cup Y$  et elle présente un plateau correspondant à  $X \cap Y$  (Figure 10).

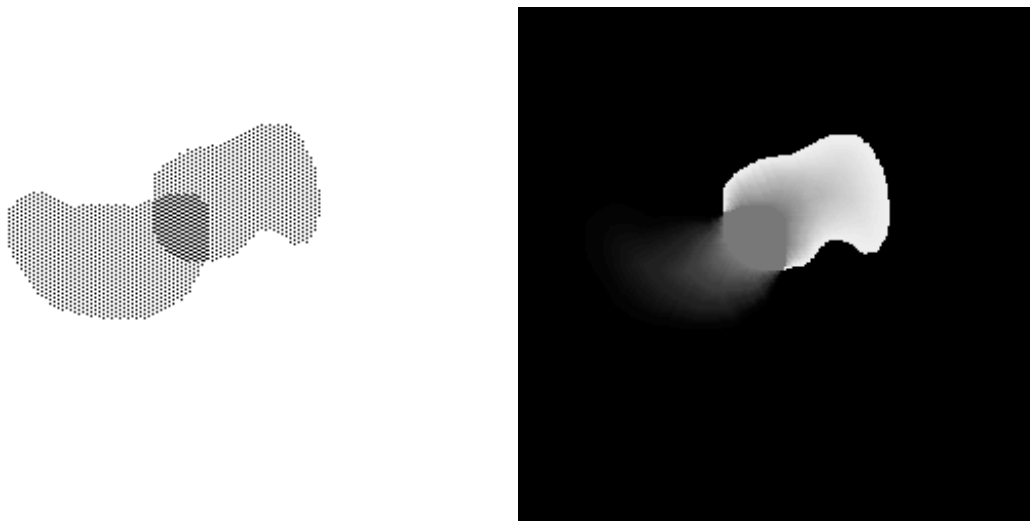


Figure 10: Les ensembles  $X$  et  $Y$  et la distance  $d$ .

Si l'intersection de  $X$  et de  $Y$  est vide,  $d$  n'est pas définie. Mais on peut également définir une distance à la fois sur  $X \cap Y$  et sur le complémentaire de leur union par le biais d'un autre ensemble intermédiaire non plus entre  $X$  et  $Y$  mais entre  $X$  et  $Y^c$ . Considérons en effet deux ensembles  $X$  et  $Y$ . On constate que, quelque soit  $X$  et  $Y$ , les ensembles  $X \cap Y$ ,  $X/Y$ ,  $Y/X$  et  $(X \cup Y)^c$  constituent une partition de l'espace  $E$ . La définition de l'ensemble  $M(X,Y)$  est basée sur le SQUIZ des ensembles  $X \cap Y$  et  $(X \cup Y)^c$ . Mais on pourrait choisir deux autres ensembles de la partition. Parmi les autres choix possibles, seuls les ensembles  $X/Y$  et  $Y/X$  présentent de l'intérêt. Définissons alors l'ensemble  $M^*(X,Y)$  comme la zone d'influence de  $X/Y$  dans le SQUIZ de  $X/Y$  et de  $Y/X$ :

$$W = \{X/Y, Y/X\} \quad (43)$$

$$M^*(X,Y) = IZ_w(X/Y) \quad (44)$$

On constate immédiatement que  $M^*(X, Y)$  est égal à  $M(X, Y^c)$ . En effet:

$$M^*(X, Y) = IZ_W(X/Y) \quad (45)$$

$$M(X, Y^c) = IZ_{W'}(X \cap Y^c) \quad (46)$$

avec:

$$W' = \{X \cap Y^c, (X \cup Y^c)^c\} = \{X/Y, Y/X\} = W \quad (47)$$

L'ensemble  $M^*(X, Y)$  est donc l'ensemble médian de  $X$  et de  $Y^c$ . En réitérant la transformation, on peut donc générer la séquence  $M^*_\lambda$  des déformations permettant de passer de  $X$  au complémentaire de  $Y$ . Cette séquence n'est pas monotone. Cependant, comme pour la séquence  $M_\lambda$ , elle peut être découpée en deux parties, l'une extensive et l'autre anti-extensive. Posons:

$$W = \{X/Y, X^c\} \quad (48)$$

On a alors:

$$M^{*-}(X, Y) = IZ_W(X/Y) \quad (49)$$

De la même façon, avec:

$$W = \{X/Y, Y\} \quad (50)$$

on a:

$$M^{*+}(X, Y) = IZ_W(X/Y) \quad (51)$$

On définit ainsi, grâce à ces deux séquences, deux nouvelles fonctions distances  $d^*$  et  $d^{*+}$ . Ces deux fonctions sont combinées pour donner la fonction  $d^*$  (Figure 11):

$$M^*_{\lambda} = \{x \in X: d^*(x) \geq \lambda\} \quad (52)$$

$$M^{*+}_{\lambda} = \{x \in Y^c: d^{*+}(x) \leq \lambda\} \quad (53)$$

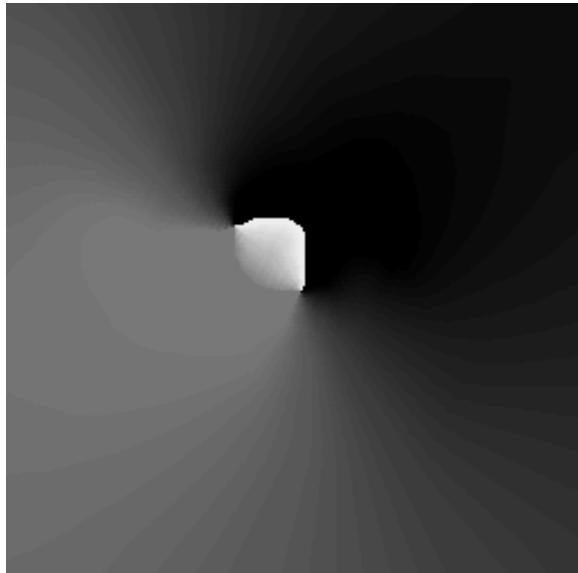


Figure 11: La distance  $d^*$

L'intérêt de ces fonctions est qu'elles peuvent être utilisées pour définir des champs de déformation d'un ensemble  $X$  vers un ensemble  $Y$ . La façon la plus simple de le faire est de



Tableau 5: Interpolation d'images dans une séquence en mouvement.  
A gauche et au milieu, la séquence initiale, à droite, les images interpolées.



Tableau 6: Interpolations dans une séquence, en prenant une image sur huit.  
Seules les images paires sont représentées.

dérivée les fonctions  $d$  et  $d^*$ . Le vecteur gradient matérialise ce champ de déformation. L'utilisation de  $d$  et de  $d^*$  garantit l'existence d'au moins un tel champ permettant de passer soit de  $X$  à  $Y$ , soit de  $X$  à  $Y^c$ , même quand  $X$  et  $Y$  n'ont pas de point commun.

## 6. Application à la compression: une illustration sur les images-mosaïque

L'application la plus immédiate de l'interpolation d'images réside dans la compression d'images dans une séquence en mouvement. Plutôt que de transmettre l'ensemble de la séquence, on peut se limiter à la transmission d'une image sur  $n$ , les images manquantes étant interpolées. Le taux de compression brut obtenu est alors égal à  $n$  avec une grande économie de moyens. On a vu que, malheureusement, l'interpolation avait tendance à fortement lisser les images intermédiaires de la séquence. C'est pourquoi, plutôt que d'utiliser les images brutes, on a préféré dans cet exemple interpoler des images-mosaïque. Cette approche limite la dégradation des images car, d'une part, une image-mosaïque ne présente pas de régions trop fines et d'autre part, le fait de calculer l'image mosaïque de l'image intermédiaire interpolée permet de régénérer les contrastes dégradés par l'interpolation. L'image-mosaïque calculée dans cette application utilise l'ensemble des minima du gradient. On n'a pas cherché à éliminer les plateaux-artefacts décrits plus haut. La séquence utilisée est la séquence intitulée "Miss América". Elle comprend 25 images. Deux tests ont été réalisés. Dans le premier, une image sur quatre est extraite, les trois autres sont interpolées. Dans le deuxième, on a conservé une image sur huit.

Le tableau 5 représente quelques images interpolées lors du premier test, ainsi que les images-mosaïque initiales de la séquence. Le tableau 6 représente les interpolations lorsqu'une image sur huit a été retenue.

Dans les deux cas, on constate que le mouvement d'ensemble est bien conservé. Ce résultat assez étonnant, surtout dans le deuxième test, provient essentiellement du fait que, comme on l'a vu, lorsque deux cellules des images-mosaïque initiale et finale ont des points communs, l'interpolation se traduit par un déplacement de la cellule. S'il existe suffisamment de cellules associées dans les deux images, cette impression visuelle de déplacement sera dominante, même si un mouvement d'émergence et d'immersion apparaît pour les cellules isolées.

Dans l'exemple utilisé, si on compresse les images retenues dans la séquence pour l'interpolation (compression cette fois sans perte d'information), le taux de compression brut final (nombre d'octets initiaux de la séquence/Nombre d'octets transmis) est dans le premier test égal à 10 et à 21 dans le second. Cette approche paraît donc assez prometteuse d'autant qu'on peut lui associer des techniques de segmentation hiérarchique.

## 7. Conclusion

L'interpolation d'images par SQUIZ s'avère être un outil assez performant et relativement facile à mettre en oeuvre. Son intérêt dans la compression d'images, associé à des transformations comme la LPE et les mosaïques n'est plus à démontrer. Dans le cas où la visualisation directe d'une séquence est l'unique finalité (vidéotéléphone, télésurveillance, etc...), on arrive déjà, à peu de frais, à des taux de compression assez importants.

L'utilisation de ces interpolations dans l'analyse du mouvement est certes moins immédiate même si on pressent l'intérêt de cette technique. L'inconvénient majeur des

interpolations dans ce domaine est la nécessité d'avoir une intersection non vide des régions constitutives des images successives de la séquence. Or, quand le mouvement est important, cette correspondance n'est plus assurée. Cependant, le couplage de cette technique avec les méthodes de segmentation hiérarchique peut contribuer à évacuer ce problème, la segmentation hiérarchique permettant d'associer des régions suffisamment larges dans lesquelles les distances  $d$  et  $d^*$  introduites plus haut pourraient être calculées, déterminant ainsi les mouvements différentiels des objets inclus dans ces régions.