N-699

LIGNES DE PARTAGE DES EAUX.
COMMENT L'EXPLICITER EN TERMES
DE TRANSFORMATION FONCTIONNELLE ?

-=-=-=-=-

S. BEUCHER

FONTAINEBLEAU MAI 1981

LIGNES DE PARTAGE DES EAUX. COMMENT L'EXPLICITER EN TERMES DE TRANSFORMATION FONCTIONNELLE ?

-=-=-=-=-=-

INTRODUCTION

Les algorithmes de lignes de partage des eaux tels qu'ils sont définis, font intervenir des transformations sur des seuils de fonctions. Cette procédure a l'inconvénient d'être longue lorsque le nombre de niveaux de gris de l'image à traiter est assez important. Il peut donc être intéressant de chercher une procédure plus rapide qui ne prendrait pas en compte à chaque étape les seuils de la fonction, mais directement la fonction elle-même. Cette note montre comment on peut y parvenir, et quelles sont les relations qui existent entre ce type de transformations et les amincissements de fonctions.

LIGNE DE PARTAGE DES EAUX. RAPPEL DE LA DEFINITION

Dans tout ce qui suit, et sauf indication contraire, les algorithmes et les définitions seront donnés dans un cadre digital. Les images sont des fonctions digitalisées en trame hexagonale, positives et bornées. On désignera par m la plus grande valeur de gris prise par la fonction.

Rappelons quelques définitions et notations.

Désignons la fonction par f et par $\{X_i(f)\}$, l'ensemble de ses seuils :

$$X_i(f) = \{x \in Z^2,\ f(x) < i\}$$

Construire la ligne de partage des eaux consiste à "inonder" la surface topographique dessinée par le sous-graphe de f. C'est une procédure assez complexe. Avant de la décrire dans son intégralité, rappelons quelques notations.

Etant donné un doublet $T = (T_1, T_2)$, l'épaississement et l'amincissement de X par T seront notés respectivement : $X \odot T$ et $X \bigcirc T$. De la même façon, on désignera par $\{T^i\}$ la séquence d'éléments structurants obtenus par rotations successives de l'élément T. Deux transformations séquentielles peuvent être définies, et notées respectivement $X \odot \{T^i\}$ et $\{X \odot T^i\}$:

$$X \odot \{T^i\} = ((X \odot T^0) \odot T^1) \odot T^2) \odot \ldots\ldots \odot T^5$$

C'est l'épaississement de X par T, direction par direction.

$$\{X \odot T^i\{ = (X \odot T^0) \cup (X \odot T^1) \cup \ldots = \bigcup_{n=0}^{5} (X \odot T^n)$$

Cette deuxième transformation est encore appelée épaississement en permutation (Des définitions similaires existent pour l'amincissement).

On peut encore définir l'épaississement conditionnel de X, à l'intérieur d'un ensemble Y, noté $(X \odot T, Y)$:

$$(X \odot T, Y) = (X \odot T) \cap Y$$

De la même façon :

$$(X \odot \{T^i\}, Y) = (((X \odot T^0) \cap Y) \odot T^1) \cap Y) \odot \ldots) \odot T^5) \cap Y$$

La suite d'éléments structurants peut être infinie et répétitive. Ainsi, la suite :

T^0, T^1, $T^2, \ldots, T^5$, T^0, $T_1, \ldots$ etc... sera noté $\{T\}$ sans précision supplémentaire.

Ces notations étant précisées, explicitons l'algorithme de construction de la ligne de partage des eaux d'une fonction f. C'est un algorithme en deux étapes : la première consiste à épaissir l'ensemble des points inondés au niveau i à l'intérieur du niveau X_{i+1} (on propage en quelque sorte l'inondation), la deuxième consiste à rajouter à l'ensemble ainsi obtenu, l'ensemble des minima de la fonction apparus à cette altitude (figure 1).

En désignant par Y_i l'ensemble des points inondés au niveau i, et par Z_{i+1}, l'ensemble des minima à l'altitude i+1, la procédure de construction peut s'écrire :

$$Y_{i+1} = ((Y_i \odot \{M\}, X_{i+1}) \odot \{E\}, X_{i+1}) \cup Z_{i+1}, \text{ avec}$$

$$Z_{i+1} = X_{i+1} / (Y_i \oplus \{B\}, X_{i+1})$$

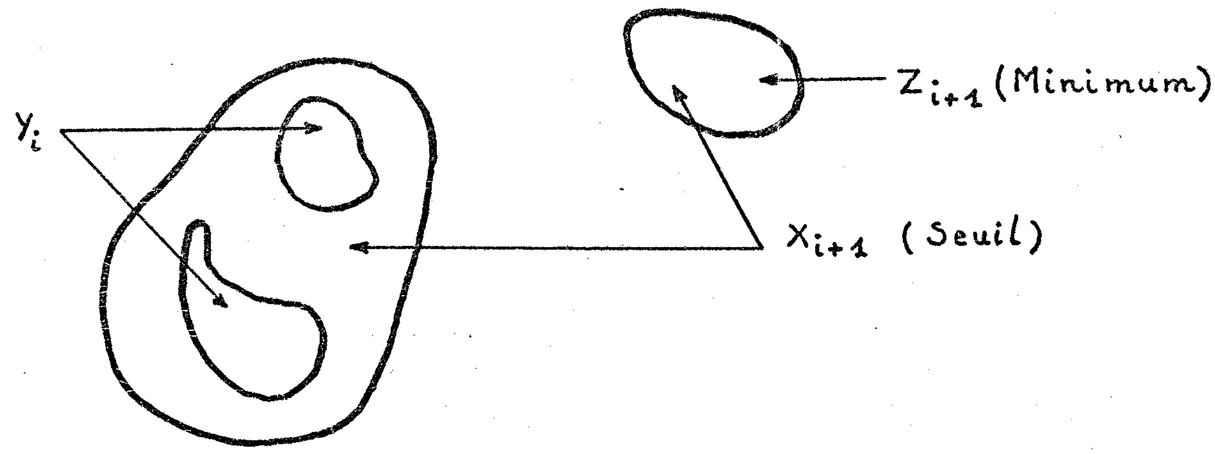
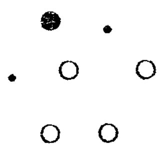


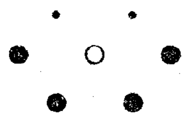
Figure 1 : Construction de la L.P.E.

Z_{i+1} est donc l'ensemble des points de X_{i+1} qui ne sont pas à une distance géodésique finie de Y_i (voir [1]). Ils s'obtiennent bien en reconstituant X_{i+1} à partir de Y_i, comme l'indique la formule précédente.

L'épaississement conditionnel de Y_i fait intervenir deux éléments structurants : l'un M, préservant l'homotopie, et l'autre E dont la fonction essentielle est l'ébarbulage :

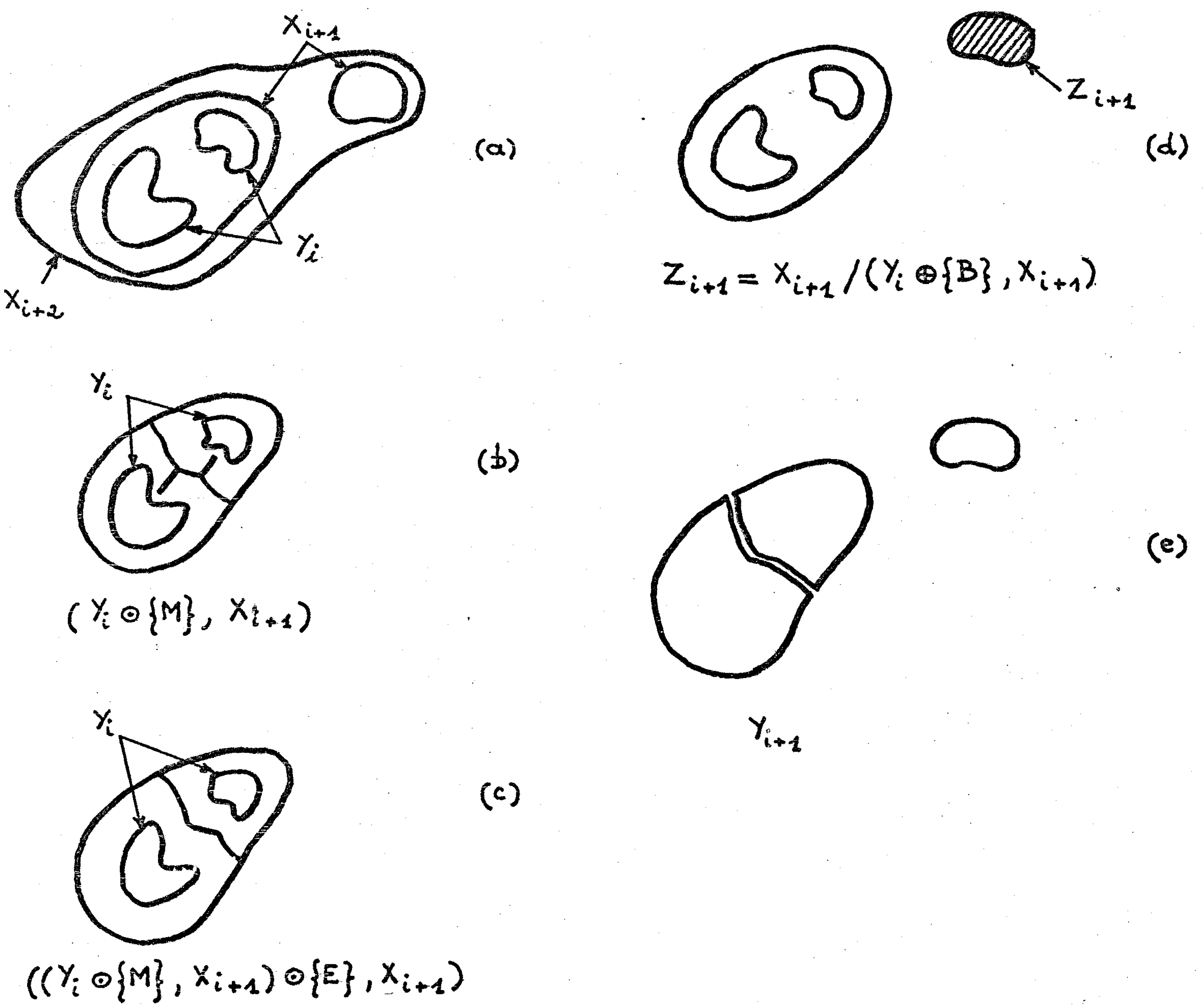


M



E

La figure 2 montre comment interviennent ces deux éléments structurants.



<u>Figure 2</u> : Détail de l'algorithme

La procédure doit être initialisée, en posant $Y_{-1} = \emptyset$.

LA LIGNE DE PARTAGE DES EAUX : ANALYSE LOCALE

L'algorithme tel qu'il a été décrit, présente un inconvénient majeur : il travaille sur les seuils de la fonction, et surtout il travaille par propagation d'une zone inondée (Y_i) : on part des niveaux les plus bas, et on inonde la topographie niveau par niveau. Du fait de la seconde caractéristique, l'algorithme semble donc a priori peu propice à une formulation explicite.

On peut néanmoins analyser le problème localement (c'est-à-dire dans un hexagone élémentaire), de la façon suivante :

Soit x un point quelconque du graphe de f, et H l'hexagone élémentaire centré en ce point. Supposons qu'après l'itération i, le point x ne soit pas "mouillé". Nous marquons d'un 1, les points du contour "mouillés" et d'un $\emptyset$ les points secs après l'itération i. La question à laquelle on doit répondre est : Quels seront les points x de G(f) qui seront, à coup sûr mouillés à l'itération i+1 ?

Ces points doivent répondre à plusieurs conditions :

- La première est de ne pas être mouillés à l'itération i. Si nous désignons par T_2 l'ensemble des points mouillés à l'itération i dans l'hexagone H centré en x, et par T_1 l'ensemble des points secs, on doit donc avoir :

$$\sup_{y \in T_2} f(y) < f(x)$$

- La deuxième est d'être mouillés à l'itération i+1. Pour cela, x doit être le point le moins élevé de l'ensemble des points secs à l'itération i, ce que l'on peut exprimer par :

$$f(x) \leq \inf_{y \in T_1} f(y)$$

Ensuite, son altitude doit être supérieure de une unité à l'altitude du point mouillé le plus élevé à l'itération i, soit :

$$f(x) = 1 + \sup_{y \in T_2} f(y)$$

On peut donc résumer ces deux conditions par la formule :

$$\sup_{y \in T_2} f(y) + 1 = f(x) \leq \inf_{y \in T_1} f(y)$$

- La troisième condition porte sur les configurations T_1 et T_2, et c'est de loin la plus importante. En effet, en dehors des deux conditions précédentes, le point x sera à coup sûr mouillé s'il n'est pas susceptible d'appartenir à la ligne de partage des eaux, c'est-à-dire s'il n'est pas à la jonction de plusieurs composantes mouillés. Explicitons cette condition sur un exemple :

Considérons à l'itération i, la configuration suivante :

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & & 1 & \\ 0 & & 0 & & 0 \\ & 1 & & 0 & \end{array}$$

L'ensemble T_2 des points mouillés est constitué de deux composantes connexes. Ces deux composantes connexes peuvent être connexées (figure 3-a) ou bien appartenir à deux bassins versants différents (figure 3-b), auquel cas x appartiendrait à la ligne de partage des eaux. Il est donc impossible de dire, avec l'information locale dont nous disposons, que x sera à coup sûr mouillé à l'itération i+1, même s'il vérifie les deux conditions précédentes. Le seul cas où il sera possible de répondre à la question sera lorsque T_2 (donc T_1) sera constitué d'une seule composante connexe.

Figure 3 : Comportement local

Parmi les 14 configurations possibles pour (T_1, T_2), 6 répondent à la condition. Ce sont

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & & \emptyset & \\ \emptyset & & \emptyset & & \emptyset \\ & \emptyset & & \emptyset & \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & 1 & & 1 & \\ \emptyset & & \emptyset & & \emptyset \\ & \emptyset & & \emptyset & \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & 1 & & 1 & \\ \emptyset & & \emptyset & & 1 \\ & \emptyset & & \emptyset & \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & 1 & & 1 & \\ \emptyset & & \emptyset & & 1 \\ & \emptyset & & 1 & \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & 1 & & 1 & \\ \emptyset & & \emptyset & & 1 \\ & 1 & & 1 & \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & 1 & & 1 & \\ 1 & & \emptyset & & 1 \\ & 1 & & 1 & \end{array}$$

Ces 6 configurations se résument à :

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & & . & \\ . & & \emptyset & & \emptyset \\ & \emptyset & & \emptyset & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccccc} & 1 & & 1 & \\ . & & \emptyset & & 1 \\ & . & & 1 & \end{array} \quad \text{(à une rotation près)}$$

c'est-à-dire M et E.

On peut donc condenser ces trois conditions en une seule formule :

x sera à coup sûr mouillé à l'itération i+1 si :

$$\sup_{y \in T_2} f(y)+1 = f(x) \leq \inf_{y \in T_1} f(y) \quad \text{avec } (T_1, T_2) \in \{M\} \cup \{E\}$$

On a donc une "condition d'inondation" exprimée non plus avec les seuils $X_i(f)$ mais directement à l'aide de f(x).

On peut à ce stade, éliminer la restriction à l'itération i+1 : En effet, on peut détecter les points de G(f) obéïssant à la condition précédente. Ces points seront donc des points susceptibles d'être inondés. Le complémentaire de cet ensemble sera donc constitué des points du graphe déjà mouillés ou appartenant à la ligne de partage des eaux ; On va donc incrémenter de 1 l'altitude des points déjà mouillés (la hauteur de l'inondation augmente) ainsi que l'altitude des points détectés comme faisant partie de la ligne de partage des eaux. Cette dernière façon de faire revient en quelque sorte à construire un barrage à partir des points de la LPE successivement apparus. C'est bien cette procédure qui en définitive va propager l'inondation et par là même générer la L.P.E.

LIGNE DE PARTAGE DES EAUX ET AMINCISSEMENT DE LA FONCTION f

La condition d'inondation vue précédemment rappelle la formule explicite de l'amincissement de f par un élément structurant T. En effet si nous désignons par f O T, la fonction amincie, on a :

$$f \circ T(x) = \sup_{y \in T_2} f(y)$$

$$\text{quand} \quad \sup_{y \in T_2} f(y) < f(x) \leq \inf_{z \in T_1} f(z)$$

$$\text{et} \quad f \circ T(x) = f(x), \text{ sinon} \qquad (T = (T_1, T_2))$$

L'algorithme exprimé précédemment peut s'écrire :
quand :

$$1 + \sup_{y \in T_2} f(y) = f(x) \leq \inf_{z \in T_1} f(z)$$

alors la valeur de la fonction au point x ne change pas. On écrira : f'(x) = f(x), où f'(x) est la fonction générée par l'algorithme (f'(x) est la fonction d'inondation).

Sinon, $f'(x) = f(x)+1$

Ces deux expressions mises en parallèle montrent que l'on peut écrire

$$f'(x) = \mathrm{Sup}[f \circ T(x),\ f(x)-1] + 1$$

Ainsi donc, l'algorithme de ligne de partage des eaux, en termes de fonctions pourra s'écrire :

faire : $f'(x) = f(x)$
calculer : $f(x) = \mathrm{Sup}[f' \circ \{T\}(x),\ f'(x)-1] + 1$

Réitérer les deux opérations précédentes.

En détaillant davantage le calcul de $f(x)$, on obtient :

$$f(x) = \mathrm{Sup}[[\mathrm{Sup}(f' \circ \{M\},\ f'-1)] \circ \{E\},\ f'-1] + 1$$

La condition d'arrêt est donnée par : $f(x) = f'(x) + 1$.

La figure 4 donne l'ordinogramme complet de la ligne de partage des eaux

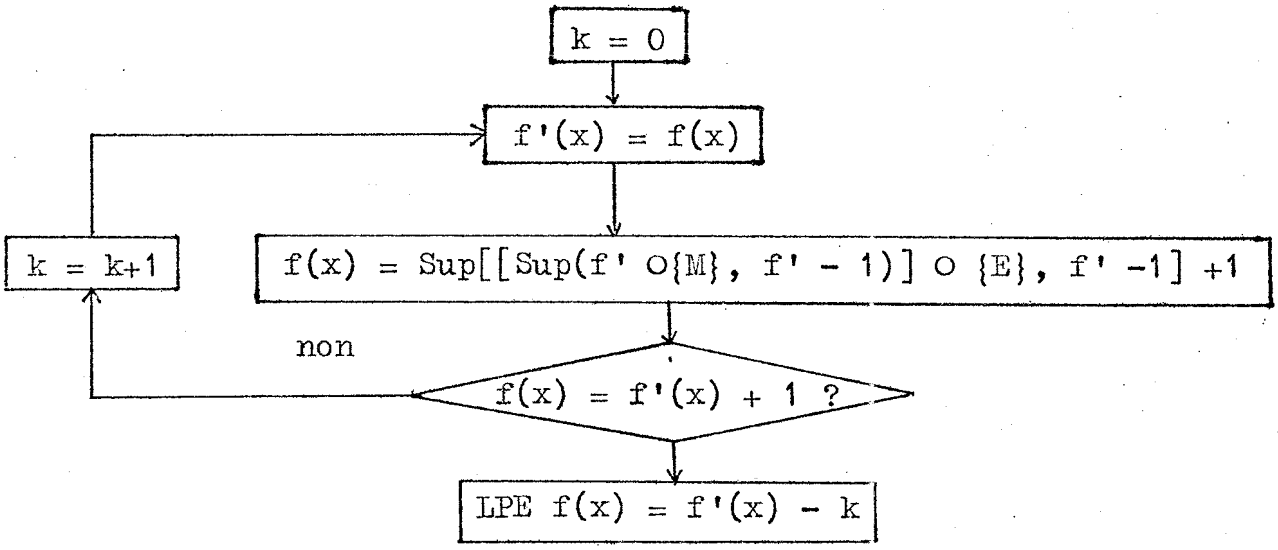


Figure 4 : Ordinogramme de la L.P.E. d'une fonction

On trouvera planche 5 un exemple de transformation. On peut également procéder par engloutissement de la surface topographique il suffit d'écrire la transformation sous la forme :

$$f(x) = \mathrm{Sup}[\mathrm{Sup}(f' \circ \{M\}, f' - 1) \circ \{E\}, f' - 1]$$

Cette formulation a l'avantage de ne pas incrémenter la fonction à chaque itération.

Toutes ces procédures permettent de construire la ligne de partage des eaux, ou du moins de mettre en évidence les points de Z^2 tels que les points de $G(f)$ qui leur correspondent appartiennent à la L.P.E.

Ces procédures font apparaître une nouvelle fonction définie à partir de f ; cette fonction que nous appellerons g peut s'écrire :

$$g(x) = \mathrm{Sup}\ [\ f \circ T,\ f-1]\ (x)$$

Il est intéressant d'exprimer $X_i(g)$ en fonction de $X_i(f)$. Le calcul montre que :

$$X_i(g) = X_i(f \circ T) \cap X_i(f-1)$$

Or, on sait que :

$$X_i(f-1) = X_{i+1}(f)$$

$$X_i(f \circ T) = \bigcap_{j \geq i} [X_j(f) \odot T^*],\ (T^* \text{ étant le dual de } T)$$

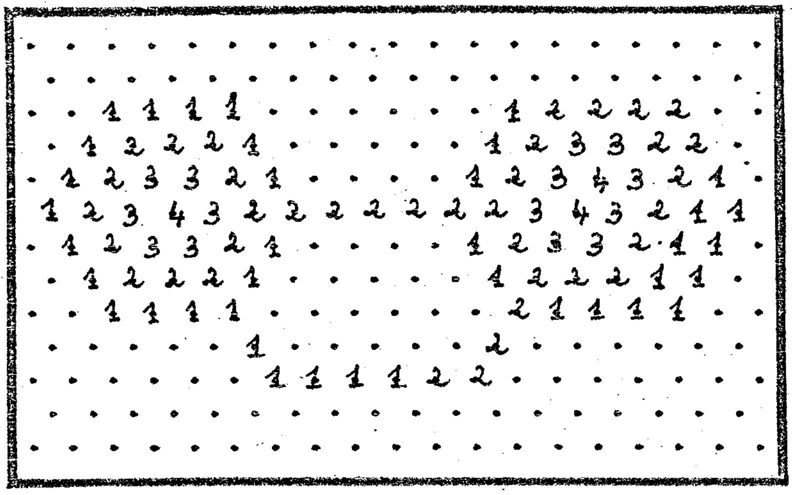
On a donc :

$$X_i(g) = X_{i+1}(f) \cap [\bigcap_{j \geq i} X_j(f) \odot T^*], \quad \text{soit}$$

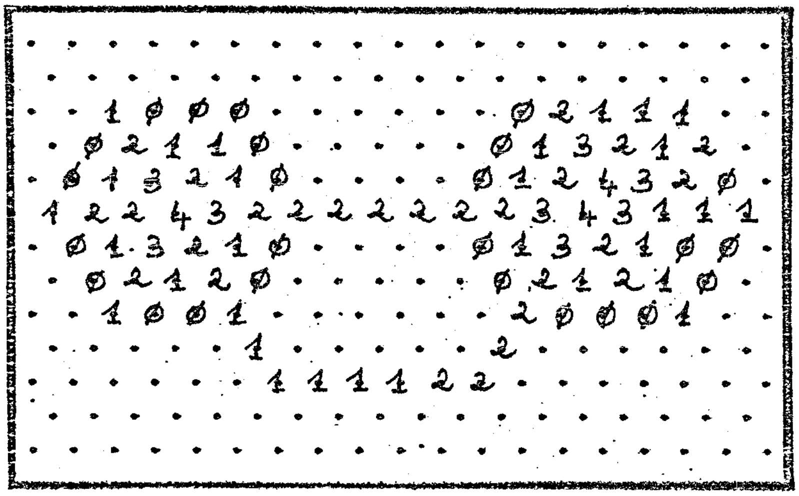
$$X_i(g) = X_{i+1}(f) \cap (X_i(f) \odot T^*) \cap (X_{i+1}(f) \odot T^*) \cap \ldots \text{ etc...}$$

Les inclusions suivantes étant vérifiées :

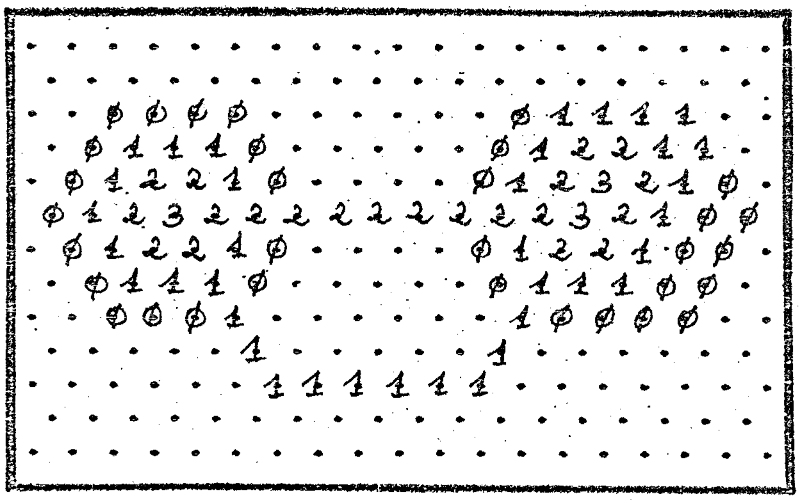
$$X_{i+1}(f) \subset X_j(f) \subset X_j(f) \odot T^* \quad , \quad \forall\ j > i+1$$



a) image initiale (les points non marqués sont à zéro)

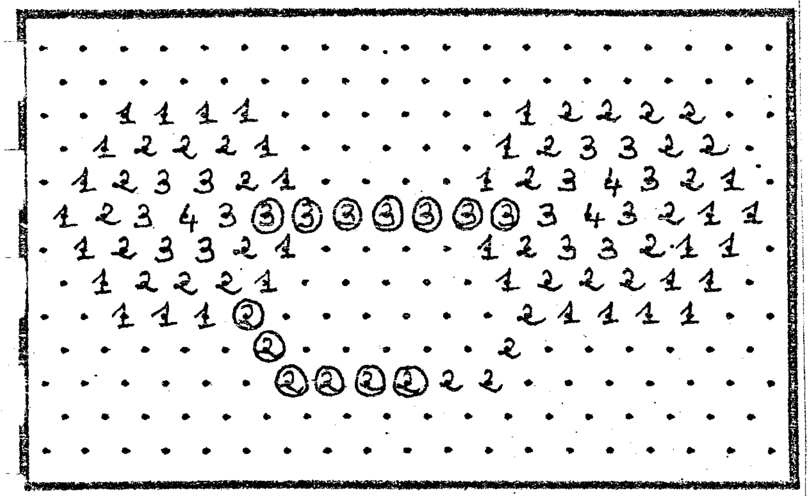


b) Sup[f ○ {M}, f-1] amincissement

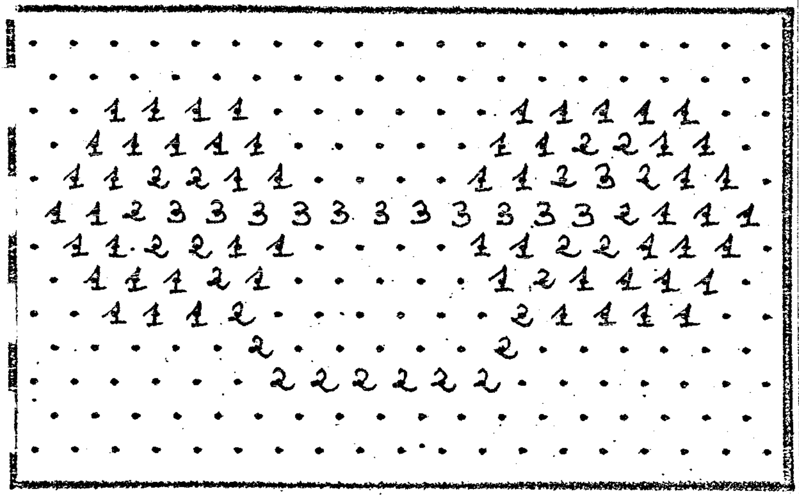


c) Sup[Sup(f ○ {M}, f-1) ○ {E}, f-1] ébarbulage

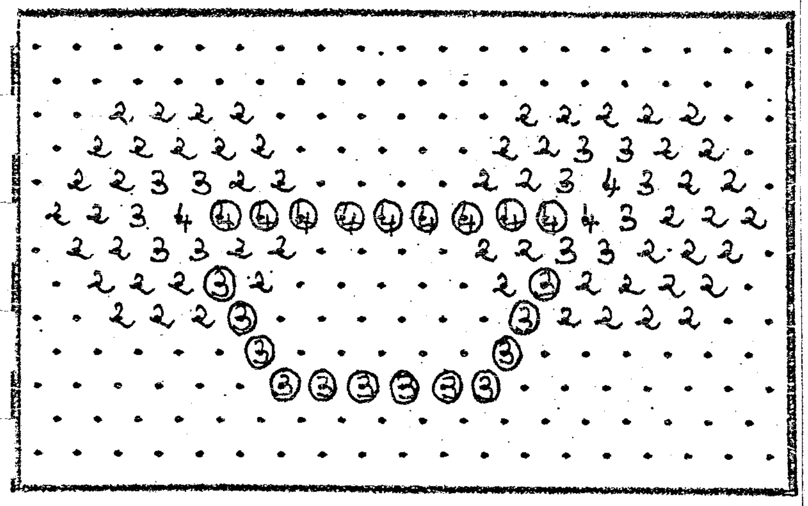
Planche 5



d) f = f + 1
(les points non marqués sont à 1).
Les points entourés sont ceux correspondant à la ligne de partage des eaux

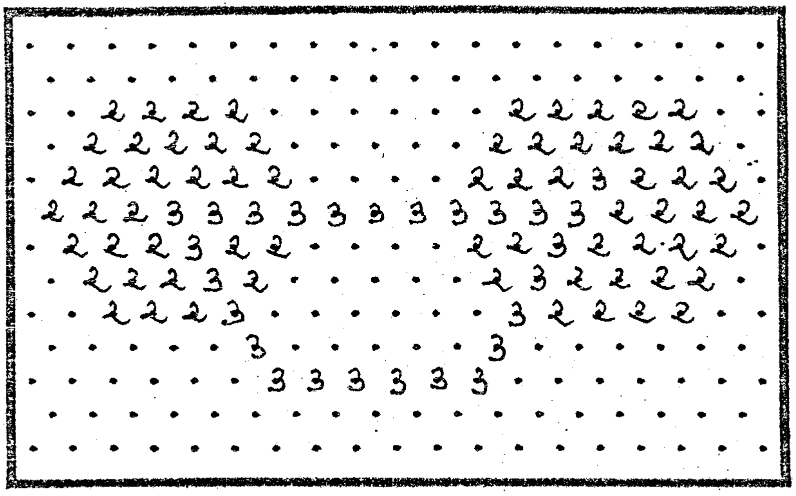


e) 2ème itération

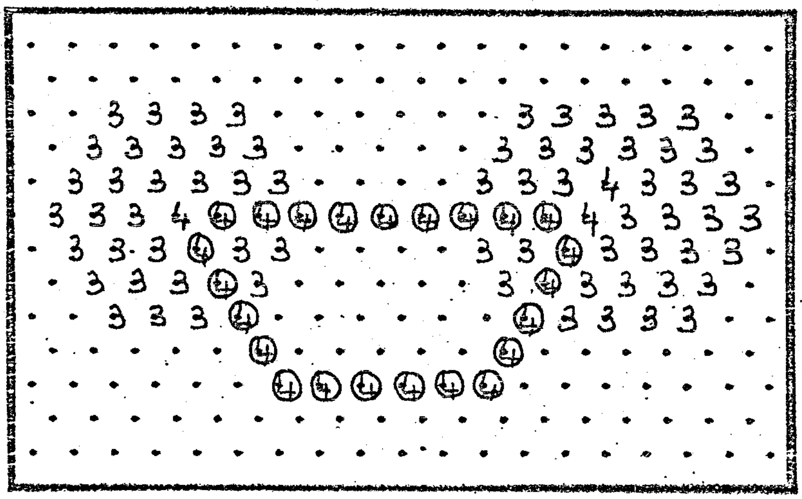


f) les points non marqués sont au niveau 2.

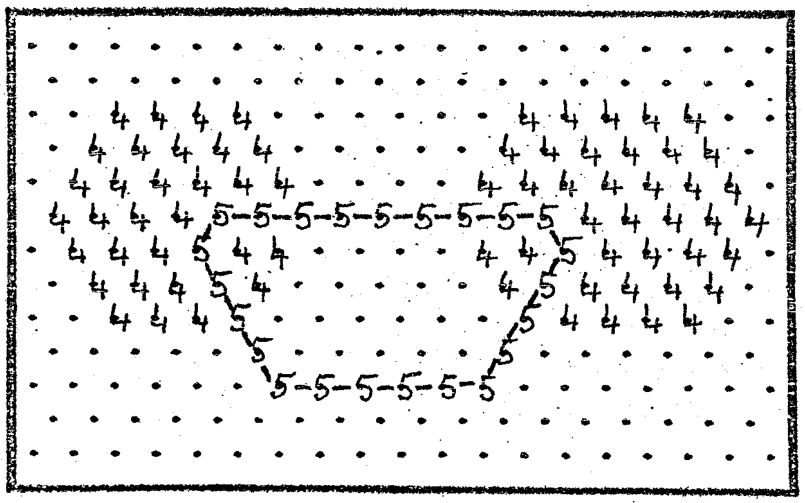
Planche 5 (suite)



g) 3ème itération



h) les points non marqués sont au niveau 3



i) 4ème itération et L.P.E.

Planche 5 : fin

on a finalement :

$$X_i(g) = X_{i+1}(f) \cap (X_i(f) \circ T^*)$$

ou encore :

$$X_i(g) = [X_i(f) \circ T^*, X_{i+1}(f)]$$

Cette transformation constitue un amincissement moins brutal de la fonction f, comme le montre la figure 6.

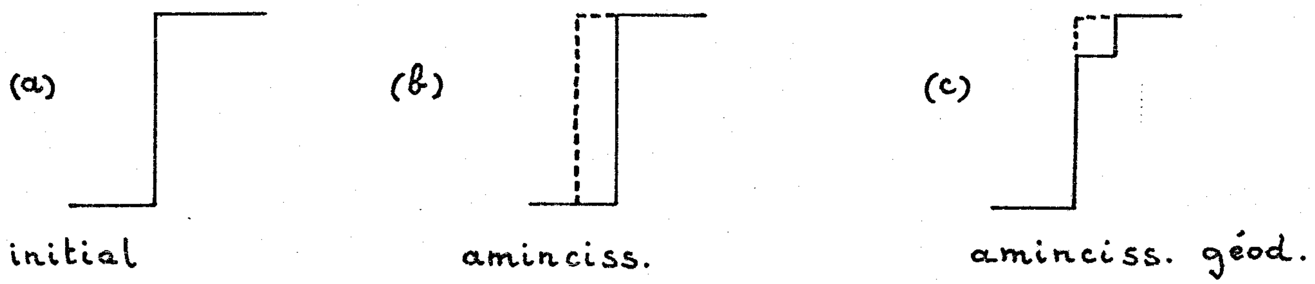


Figure 6 : Comparaison entre $f \circ T$ et $\mathrm{Sup}(f \circ T, f-1)$

Nous appellerons cette transformation "amincissement géodesique" ; la réitération de cette transformation génère une fonction dont les minima constituent les bassins versants de la fonction f.

SQUELETTE ET LIGNE DE PARTAGE DES EAUX

L'algorithme de L.P.E. tel qu'il a été décrit est certainement plus rapide que sa version ensembliste. Il est néanmoins plus lent qu'un algorithme de squelette classique, obtenu en réitérant un amincissement. Pourtant les deux processus sont très similaires, et on peut essayer de les comparer. En fait on peut montrer que les transformations $f \circ T$ et $\mathrm{Sup}(f \circ T, f-1)$ où f est une fonction bornée et T un élément structurant quelconque, tendent vers la même fonction limite g, lorsqu'on les réitère à l'infini.

Comme on travaille sur Z^2, les deux transformations convergent après un nombre fini d'itérations. Si on désigne par $(f \circ T)^{(n)} = h^{(n)}$, la composition de l'amincissement n fois, et par $\mathrm{Sup}(f \circ T, f-1)^{(n)} = g^{(n)}$ la composition de l'amincissement géodésique, on peut déjà écrire :

$$\exists\, n_1 \in N \ , \ \forall\, n > n_1 \qquad : \ h^{(n)} = h^{(n_1)}$$

$$\exists\, n_2 \in N \ , \ \forall\, n > n_2 \qquad : \ g^{(n)} = g^{(n_2)}$$

On doit donc montrer que $\quad : \ h^{(n_1)} = g^{(n_2)}$

Soit donc f, la fonction à amincir. f est bornée $0 \leq f \leq m$. Soit x un point de Z^2. Dans une première étape on essaiera de comparer $h^{(1)}(x)$ et $g^{(k)}(x)$, k étant une constante à déterminer.

Posons $f(x) = a_o$ et $h^{(1)}(x) = (f \circ T)(x) = a_1$

On a bien sûr : $a_1 \leq a_o$.

Supposons que $a_1 = a_o$ (le point x n'est pas aminci). Alors dans ce cas :

$$g^{(1)}(x) = \mathrm{Sup}[(f \circ T)(x), f(x)-1] = a_1 = f(x).$$

Supposons maintenant que $a_o > a_1$, et posons $k = a_o - a_1$. On a alors :

$$g^{(1)}(x) = \mathrm{Sup}[(f \circ T)(x), f(x)-1] = a_o-1 \ , \quad \text{si } k \geq 1$$

De même :

$$g^{(2)}(x) = \mathrm{Sup}[(g^{(1)} \circ T)(x), g^{(1)}(x)-1] = a_o-2, \quad \text{si } k \geq 2$$

etc...

En effet, à la première itération, on avait :

$$\sup_{y \in T_2} f(y) < f(y) < f(x) \leq \inf_{y \in T_1} f(y)$$

Après la première étape d'amincissement géodésique, les valeurs des points de T_1 ont au plus diminué de 1. On a donc :

$$\inf_{y \in T_1} f(y) - 1 \leq \inf_{y \in T_1} g^{(1)}(y) .$$

De la même façon, on a :

$$\sup_{y \in T_2} f(y) = a_1 \quad (\text{puisque } h^1(x) = \sup_{y \in T_2} f(y)$$

Les valeurs des points de T_2, après une étape d'amincissement géodésique peuvent ne pas avoir changé. On a donc :

$$\sup_{y \in T_2} g^{(1)}(y) \leq \sup_{y \in T_2} f(y) = a_1$$

On aura donc l'égalité :

$$\sup_{y \in T_2} g^{(1)}(y) < g^{(1)}(x) \leq \inf_{y \in T_1} g^{(1)}(y) \quad \text{et donc :}$$

$g^{(2)}(x) = g^{(1)}(x) - 1 = f(x) - 2$, uniquement si $a_o - a_1$ est plus grand ou égal à 2, d'après ce qui précède.

En réitérant le raisonnement, on peut donc écrire :

$$g^{(k)}(x) = a_o - k = a_1 = h^{(1)}(x)$$

On peut donc énoncer :

Si la perte d'altitude d'un point du graphe est égale à k après une étape d'amincissement, il faudra k itérations d'amincissement géodésique pour atteindre la même altitude.

De la même façon, si on considère i étapes d'amincissement, la perte d'altitude sera $a_o - a_i$. Elle est égale à la somme des pertes d'altitude $(a_j - a_{j+1})$ à chaque itération ($a_j - a_{j+1}$ pouvant être nul).

On aura donc :

$$h^{(i)}(x) = g^{(k)}(x), \quad \text{avec } k = \sum_{j=0}^{i-1} \operatorname{Sup}(a_j - a_{j+1}, 1)$$

En effet, il est important de constater que dès qu'un point est aminci par h, il l'est par g et réciproquement, et que les inégalités reliant les points de T_1 et T_2 sont conservées <u>bien que</u> les valeurs Sup_{T_2} et Inf_{T_1} varient. A chaque étape d'amincissement, correspondra $a_j - a_{j+1}$ amincissements géodésiques si l'altitude diminue, un seul amincissement géodésique sinon, d'où la formulation de k.

Donc, pour tout point x, il sera possible d'atteindre $h^{(i)}(x)$. Il suffira d'itérer l'amincissement géodésique k fois. En particulier, et comme f est bornée, on a :

$$h^{(n_1)}(x) \geq 0, \quad \forall\, x$$

$$n_1 \leq k = \sum_{j=\emptyset}^{n_{-1}-1} \sup(a_j - a_{j+1}, 1) < n_1 + m$$

Soit $h^{(n_1)}(x) = g^{(n_2)}(x), \quad \forall\, x, \quad \text{avec } n_1 \leq n_2 < n_1 + m$

Dès que le nombre d'itérations de l'amincissement géodésique dépassera $n_1 + m$, les deux fonctions seront égales.

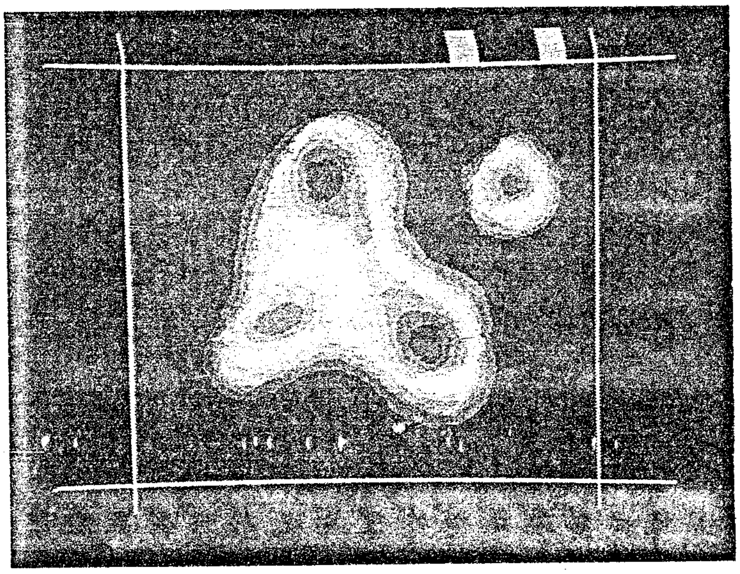
Il est facile de constater que le résultat obtenu ici pour les amincissements par T reste encore vrai pour toutes les combinaisons d'éléments structurants $\{T\}$.

Cela montre qu'il est équivalent d'effectuer, pour obtenir la L.P.E., un amincissement géodésique, ou bien un amincissement par $\{M\}$, combiné avec un ébarbulage (élément $\{E\}$).

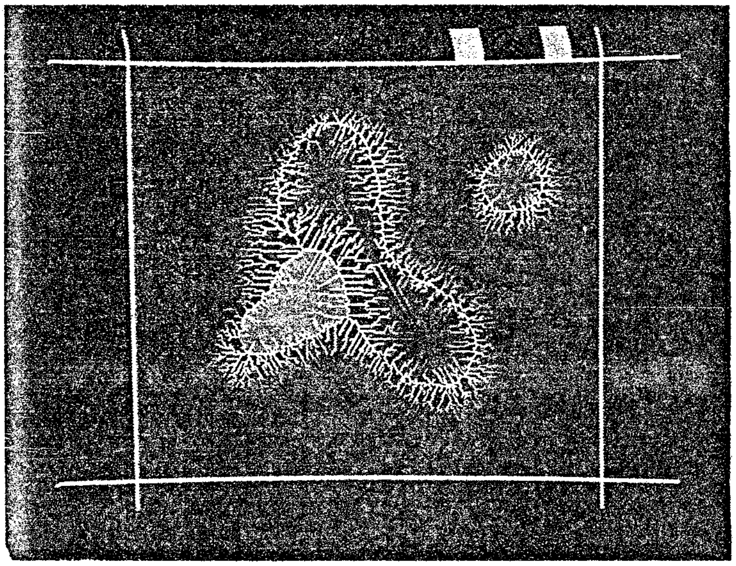
Les minima des deux fonctions seront identiques. Ces minima sont les bassins versants de la L.P.E.

Pour détecter les bassins versants de f, il suffira donc de détecter les minima du squelette ébarbulé de f.

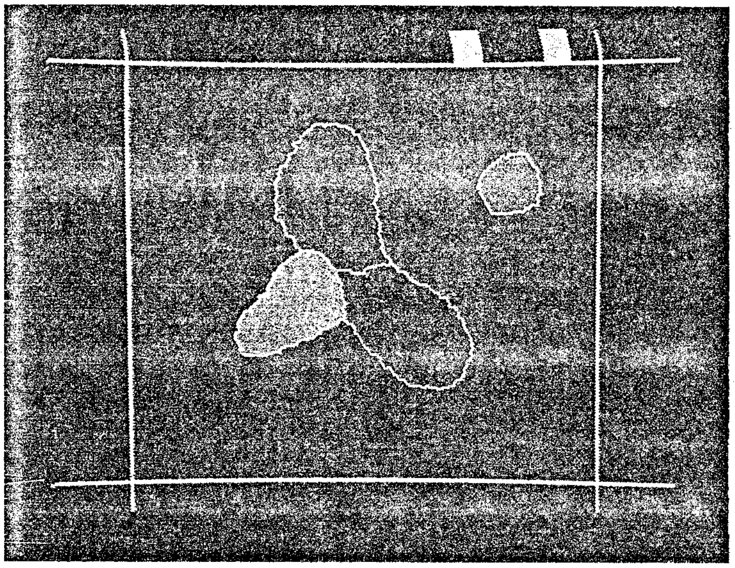
La figure 7 illustre la procédure.



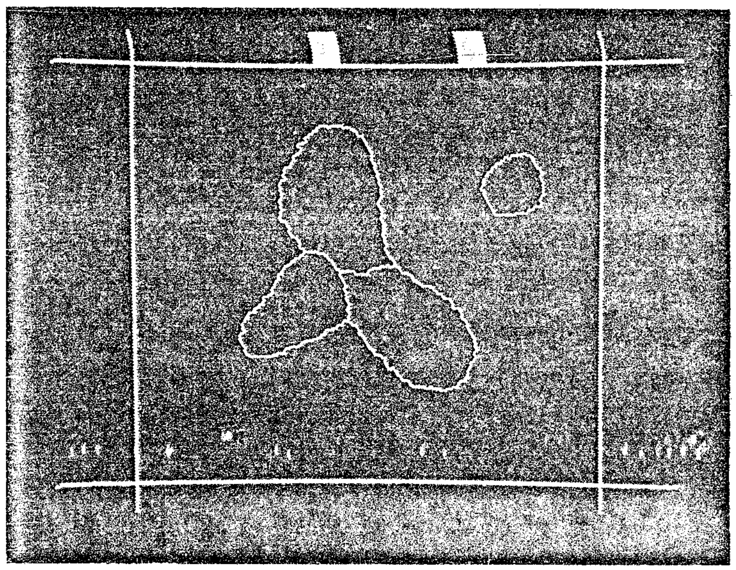
a) image initiale



b) squelette de la fonction



c) ébarbulage



d) ligne de partage des eaux

Figure 7 : construction de la ligne de partage des eaux à l'aide du squelette.

Il n'est d'ailleurs pas évident que cette dernière procédure soit plus rapide que l'amincissement géodésique. En effet, les opérations de squelette et d'ébarbulage doivent le plus souvent être réitérés avant d'atteindre l'idempotence (figure 8).

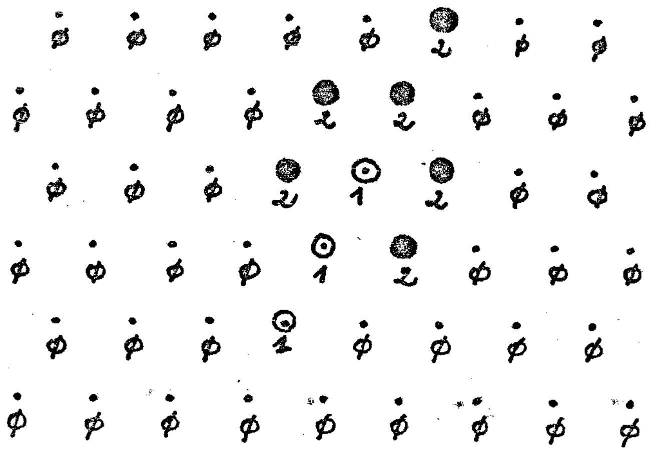


Figure 8 : fonction après squelette : Une autre étape de squelettisation est nécessaire après l'ébarbulage.

BIBLIOGRAPHIE

[1] - LANTUEJOUL-BEUCHER : Geodesic distance and image analysis - N 630.

[2] - BEUCHER-LANTUEJOUL : Sur l'utilisation de la ligne de partage des eaux en détection de contours - N 598.