SEGMENTATION D'IMAGES
ET
MORPHOLOGIE MATHEMATIQUE

THESE

présentée à
l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris
par

Serge BEUCHER

pour obtenir le titre de

DOCTEUR
en
MORPHOLOGIE MATHEMATIQUE

Soutenance le 5 Juin 1990
devant le Jury composé de :

MM.	Jean SERRA	Président
	Dominique JEULIN	Rapporteur
	Claude LABIT	Rapporteur extérieur
	Thierry FERRE	Examinateur
	Georges MATHERON	Examinateur
	Georges STAMON	Examinateur

RESUME

La segmentation d'images par la morphologie mathématique est une méthodologie basée sur les concepts de ligne de partage des eaux et de modification de l'homotopie. Ces deux outils sont construits à partir de transformations morphologiques élémentaires présentées dans la première partie de ce mémoire. Ces transformations élémentaires sont les transformations morphologiques sur images à teintes de gris et en particulier les opérations d'amincissement et d'épaississement, ainsi que les transformées géodésiques. Ces outils de base permettent l'élaboration de transformations plus sophistiqués. Parmi elles, le gradient morphologique et sa régularisation, opérateurs importants dans la segmentation d'images de gris et la ligne de partage des eaux. Après avoir introduit cette notion et mis en lumière ces liens avec les opérateurs géodésiques et les épaississements homotopiques, divers algorithmes permettant de la réaliser sont présentés par le biais du squelette de fonction et surtout au moyen d'une représentation des images à teintes de gris sous forme d'un graphe de fléchage.

La deuxième partie est consacrée à l'usage de ces outils. On montre en particulier comment le concept de marquage des régions à segmenter permet d'obtenir, en combinant la modification d'homotopie et la ligne de partage des eaux, une segmentation de l'image de bonne qualité. L'usage de ces outils est illustré dans le cas de segmentations plus complexes. On introduit alors une hiérarchisation de l'image, toujours basée sur la ligne de partage des eaux, et on montre comment cette hiérarchie permet la segmentation de certaines scènes où le marquage est moins évident. Un autre exemple, montrant la difficulté du marquage mais aussi les avantages de ce concept est également présenté.

ABSTRACT

Image segmentation by mathematical morphology is a mothodology based on the notions of watershed and homotopy modification. These tools are built starting from elementary morphological transformations which are presented in the first part of this thesis. These basic transformations are the morphological operations applied to grey-tone images and, in particular, the thinning and thickening operators together with the geodesic transformations. These tools lead to the design of more sophisticated transforms. Among them, the morphological gradient and its regularization, and the watershed transform. The latter transformation is introduced and its relationship with the geodesic operators and the homotopic thickenings is emphasized. Then various watershed algorithms are presented using the skeleton of a function and the representation of grey-tone images as a graph of arrows.

The second part is devoted to the use of these tools. A fair segmentation can be obtained when we use markers of the regions to be extracted to change the homotopy. These tools are also used for more complex segmentation. An image hierarchy is defined through the watershed transform. This hierarchy allows the segmentation of images where region marking is more difficult. Another example is given showing the difficulties as well as the advantages of this methodology.

A **Hélène**

avec tout mon amour

A **Nicolas**

pour son indéfectible soutien

A **Yannick**

que j'ai rendu, malgré lui, sage comme... une image

A **Fanny**

parce que c'est Fanny!

REMERCIEMENTS

Mon intention n’est pas de déroger à la traditionnelle page de remerciements introduisant tout mémoire de thèse. Après tout, c’est l’une des rares opportunités pour l’auteur de rappeler, comme se plaît à le dire certain fabricant d’ordinateurs dans un langage incisif que d’aucuns n’hésitent pas à qualifier de "langue de bois de Cupertino", que toute entreprise est avant tout une aventure humaine ! Cependant, ma situation me confronte à un léger problème. Je ne suis pas, en effet, un jeune chercheur ayant passé deux ou trois années au Centre de Morphologie Mathématique s’abreuvant des bonnes paroles et des conseils avisés de quelques anciens, avant de restituer le fruit de ses cogitations sous forme d’une thèse où il est naturel, sinon obligatoire, d’affirmer dès la première page tout le profit que l’on a tiré de cette promiscuité intellectuelle. La liste des heureux récipiendaires de ces remerciements est alors suffisamment brève pour que sa lecture n’ennuie pas ceux qui ont le malheur de n’en point faire partie. Pour ma part, voilà plus de treize ans que je fréquente le monde de l’analyse d’images en général et de la morphologie mathématique en particulier. S’il me fallait alors nommer toutes les personnes qui, durant ce long laps de temps, m’ont témoigné leur intérêt, leur amitié sur les plans intellectuel, professionnel ou humain, la liste en serait d’une longueur... monotone. De plus, ma mémoire pouvant me faire défaut, je risquerais, ô drame, d’en oublier. C’est pourquoi, afin de ne pas me mettre dans une situation aussi compromettante, je ne citerai nommément personne. Je ne doute pas un seul instant que chacun néanmoins se reconnaîtra dans cette foule anonyme.

Ma profonde gratitude ira donc :

- Tout d'abord aux membres de mon jury qui ont tous accepté avec gentillesse de lire ma prose et de commenter mon travail.

- A tous mes collègues du Centre de Morphologie Mathématique, chercheurs, techniciens, secrétaires, présents ou anciens, pour leur amitié, leur disponibilité et l'agréable ambiance de travail que tous ont contribué à entretenir au sein de l'équipe.

- A toutes les personnes des centres de recherche de Fontainebleau, de l'Ecole des Mines de Paris, d'ARMINES et de TRANSVALOR, pour les rapports cordiaux que nous avons toujours entretenus.

A tous les chercheurs en analyse d'images qui, en France ou à l'étranger, m'ont gratifié de leur savoir et m'ont fait l'honneur de s'intéresser à mon travail.

A tous les industriels de l'analyse d'images, que j'ai beaucoup côtoyé durant cette décennie, et qui ont contribué à l'essor de la morphologie mathématique par le biais de l'industrialisation de systèmes de traitement d'images, ce qui a permis à de nombreux outils morphologiques élaborés par les chercheurs du CMM de "passer la porte du laboratoire".

A tous mes interlocuteurs, partenaires industriels ou universitaires, qui m'ont sollicité pour résoudre de nombreux problèmes en imagerie et qui, par là même, ont su me montrer clairement les limites de ma compétence, mais aussi m'ont donné la volonté de la perfectionner.

Enfin, à mes proches, pour l'amour et le soutien qu'ils m'ont témoigné lors de la rédaction de cette thèse. Qu'ils me pardonnent si je les ai un peu délaissés durant cette période.

TABLE DES MATIERES

AVANT - PROPOS

Imaginez deux hommes qui tirent chacun à une extrémité d'une corde, maintenant de cette façon un puma en son milieu. S'ils veulent s'approcher en même temps l'un de l'autre, le puma les attaquera car la corde ne sera plus tendue; il faut donc garder la corde bien raide afin que le puma reste à égale distance de chacun d'eux. C'est pour la même raison que l'écrivain et le lecteur arrivent difficilement à se rapprocher : leur pensée commune est maintenue serrée par un fil que chacun tire de son côté. Si nous demandions au puma, c'est-à-dire à la pensée, comment il voit les deux autres, il pourrait dire que les deux proies mangeables tirent à chaque extrémité d'une corde celui qu'elles ne peuvent pas manger.

Milorad PAVIĆ
("Le dictionnaire Khazar")

Il m'a paru important, avant d'entrer dans le vif du sujet, de tenter d'expliciter les raisons qui m'ont amené à rédiger ce mémoire. Ces raisons sont au nombre de trois.

La première est de réunir dans un même ouvrage un ensemble d'outils morphologiques, outils forgés pendant ces dix dernières années, et qui se révèlent maintenant être d'un usage reconnu et performant. Les transformations d'images dont il sera question ici ne sont en effet pas toutes récentes. Beaucoup ont été inventées entre 1979 et 1984 par différents chercheurs du Centre de Morphologie Mathématique de Fontainebleau, au premier rang desquels il faut citer C. LANTUEJOUL,

F. MAISONNEUVE et F. MEYER. Qu’il me soit permis de faire ici un rapide historique de la génèse de ces transformations (malgré toute la subjectivité de ce genre d’exercice). La segmentation d’image en morphologie mathématique est basée sur une transformation, la ligne de partage des eaux. Cette transformation fut élaborée pour la première fois en 1978 (du moins à l’aide de transformations morphologiques) par C. LANTUEJOUL et H. DIGABEL [34] pour résoudre un problème de quantification de cupules rétentrices d’eau dans un enduit bitumineux. A la même époque, F. MEYER et moi-même nous préoccupions de résoudre deux problèmes différents d’analyse d’images : la détection de cellules cancéreuses pour F. MEYER [64] et la mise en évidence de facettes de fractures dans un acier pour ce qui me concerne [19]. Ces deux problèmes en apparence très éloignés l’un de l’autre, avaient néanmoins deux points communs : ils avaient pour support des images à teintes de gris, et ils étaient liés à des problèmes de segmentation. Nous fumes donc amenés à élaborer des outils permettant de mettre en évidence les variations de contraste dans les images. Ce furent le gradient morphologique (pour les fractures métalliques) et la transformée chapeau Haut-de-Forme (pour les cellules cancéreuses) [23]. A cette époque également, C. LANTUEJOUL était lui aussi confronté à un problème de segmentation de bulles de radon dans un matériau fissile [48]. Je lui suggérai alors de contourer les bulles en effectuant la ligne de partage des eaux du gradient morphologique de l’image, remarquant que les bassins versants de la ligne de partage devaient correspondre aux régions homogènes. L’usage de cette technique sur les images de fractures métalliques devait conduire à la première formalisation du partage des eaux comme outil de segmentation (S. BEUCHER, C. LANTUEJOUL, [21]). Par la suite, F. MAISONNEUVE introduisit la représentation sous forme de fléchage des fonctions pour réaliser la LPE [57]. Cette représentation montra que plusieurs définitions de la LPE sont possibles. Plusieurs algorithmes de ligne de partage utilisant le fléchage furent réalisés (F. MAISONNEUVE, 1982, S. BEUCHER, 1982). La ligne de partage des eaux présentait cependant encore bien des défauts, en particulier une grande sensibilité au bruit dans l’image, ayant pour conséquence une sur-segmentation importante de l’image, comme l’illustra le problème de la segmentation de gels d’éléctrophorèse sur lequel je travaillais en 1982. F. MEYER eut alors l’idée de construire la ligne de partage des eaux du gradient en sélectionnant a priori certains marqueurs des objets présents dans l’image. Le premier algorithme basé sur ce principe (S. BEUCHER [06]) était construit à partir des seuils de la fonction gradient. Plus tard,

F. MEYER montra que cette opération consistait en fait à modifier l'homotopie du gradient et qu'elle pouvait être réalisée à l'aide de la reconstruction géodésique d'une fonction. La formalisation de ces opérateurs en termes de transformations morphologiques numériques se fit en effet peu à peu, à partir des travaux de J. SERRA sur les transformées numériques de base (1975, [79], 1982, [80]) et à partir de la notion de transformation géodésique binaire (C. LANTUEJOUL & S. BEUCHER ,1979, [49,51]) puis numérique (S. BEUCHER, 1980, [03]). Les derniers développements en la matière concernent la segmentation d'images complexes, en particulier lorsque la mise en évidence des marqueurs n'est pas aisée. Ces développements sont basés sur une approche hiérarchique de la segmentation (S. BEUCHER, 1989, [12]). Cette démarche hiérarchique permet de s'élever du niveau du pixel à celui de régions homogènes dans l'image. Elle ne modifie cependant pas le contexte général de la segmentation. Ces dernières transformations formalisent sur les graphes-partitions de l'image des algorithmes élaborés dès 1981 (S. BEUCHER, [14]).

La deuxième raison qui m'incite à rédiger ce mémoire est plus difficile à exprimer. Elle est motivée par certaines critiques (cf. par exemple [75]) concernant l'adéquation des transformations morphologiques pour la segmentation d'images macroscopiques. Ainsi la ligne de partage des eaux ne serait qu'une technique de segmentation "ad hoc", bien adaptée à certains types d'images (objets simples constitués de taches essentiellement) mais ne serait pas généralisable. Que répondre à cette critique ? D'abord, par un argument de fond : une technique générale de segmentation existe-t-elle vraiment ? L'affirmer, parce qu'après tout, l'être humain y parvient très bien, semble peu convaincant. C'est voir dans la segmentation, les prémisses, le mécanisme de base, de la compréhension d'une image. Dans cette approche, la segmentation devient un outil de l'intelligence artificielle, outil chargé en quelque sorte de digérer l'image, afin d'en transmettre une représentation simplifiée mais pertinente à des niveaux de perception supérieurs. La segmentation devrait donc, toujours dans cette optique, être un outil général fonctionnant sans information a priori sur la nature de l'image traitée. Dans ce schéma, il n'y a pas de place pour la prise en compte du contexte, et pour les mécanismes moteurs de la perception. Les principes de la segmentation d'images qui seront décrits dans ce mémoire nécessitent, au contraire, une connaissance a priori des objets que l'on désire extraire. La détection de ces objets fait appel à des processus divers, certes, mais c'est uniquement parce que les mécanismes réels généraux de cette perception, si tant est qu'ils existent, sont encore largement inconnus. Le deuxième argument est fourni par les faits : de plus en plus de problèmes de segmentation, dans le domaine macroscopique ou microscopique, sont résolus, et souvent de façon élégante, par ces procédés. On aura l'occasion d'en donner une liste non exhaustive. C'est, qu'en effet, la plupart des problèmes d'analyse d'images rencontrés dans la pratique quotidienne sont plus des problèmes qui relèvent de l'ingénierie que des sciences cognitives. Nul n'est besoin, lorsqu'on cherche à mettre en évidence des véhicules sur une chaussée par exemple, de chercher à comprendre l'image. On ne cherche pas à singer l'homme, à répondre à la question : que voit le système d'analyse d'images ? On le voudrait qu'en l'état actuel de nos connaissances en matière de perception, on ne le pourrait pas, à part peut-être dans des situations très simplifiées et sans commune mesure avec le monde réel. Il est beaucoup plus efficace d'élaborer des transformations spécialement taillées pour extraire les véhicules, et une fois ceci réalisé, et seulement si cela est nécessaire pour mesurer certains paramètres (emprise au sol des véhicules par exemple), segmenter, contourer ces véhicules. La segmentation par ligne de partage des eaux constitue alors un outil parfaitement adapté à ce type de méthodologie, et se présente comme une alternative aux méthodes classiques de segmentation d'images.

Enfin, la troisième motivation de cette rédaction est d'ordre pratique. Il sera, bien sûr, question de segmentation dans ce mémoire. Cependant, les algorithmes fondamentaux de la segmentation sont relativement aisés à présenter et à réaliser, dès lors que les outils morphologiques élémentaires qu'ils utilisent ont été compris et surtout implantés de façon à ce que leur comportement soit conforme à ce qu'on attend d'eux. Or, disons-le tout net : entre le formalisme ou la définition théorique d'un concept ou d'un outil et son implantation sous forme d'algorithme, il y a parfois un nombre d'à-peu-près tel qu'on peut légitimement se demander si on a affaire au même objet. De plus, et par malheur, il ne suffit pas qu'un algorithme fonctionne conformément à son cahier des charges, il faut encore qu'il le fasse le plus rapidement possible. Ces deux exigences apparaissent à beaucoup comme contradictoires. En fait, rien n'est plus faux. On peut très bien concilier rapidité et exactitude. C'est pourquoi, un effort particulièrement important a été porté sur la description des outils élémentaires et sur leur implantation algorithmique. Ainsi, les transformations comme les épaississements et amincissements aussi bien binaires que numériques ont été utilisées avec des ensembles d'éléments structurants, car cette approche fournit des résultats beaucoup plus propres, et surtout car elle donne un cadre formel plus intéressant pour l'extension de ces transformations à des espaces géodésiques. Néanmoins, ce mémoire n'est pas un recueil d'algorithmes, car toutes les transformations utilisées n'ont pas été décortiquées, comme il conviendrait de le faire en pareil cas. C'eût été trop long et trop fastidieux. Seules, les opérations les plus importantes ont été décrites en détail. La morphologie mathématique a un avantage remarquable : la plupart des transformations utilisées peuvent être illustrées facilement et leur résultat visualisé immédiatement même si l'algorithmique sous-jacente est parfois complexe. Cette propriété facilite grandement l'élaboration de transformations d'images de plus en plus complexes dans leur écriture, mais sans que cette complexité transparaisse dans leur finalité. On construit des outils de plus en plus élaborés comme on construit des phrases à partir de mots, puis des livres à partir de phrases, etc... Cette élaboration du "bas vers le haut" (les anglo-saxons disent Botton-Up !) a d'ailleurs été utilisée pour réaliser un logiciel d'apprentissage de la morphologie mathématique qui a fait ses preuves comme outil pédagogique (S. BEUCHER, [08]). On verra, par exemple, que des transformations comme la ligne de partage des eaux et la reconstruction de fonctions, dont la définition et la réalisation occuperont la première partie de cet ouvrage, seront utilisées comme un tout dans la deuxième partie, un peu comme des boîtes noires, sachant que ce qui se passe à l'intérieur a été correctement défini et est conforme à ce qu'on en attend.

INTRODUCTION

DEFINITION ET ROLE DE LA SEGMENTATION EN ANALYSE D'IMAGES

La segmentation est sans doute la tâche qui, en analyse d'images, mobilise le plus d'efforts. Certes, cette étape importante du traitement n'apparaît pas toujours de façon explicite, mais on peut affirmer qu'elle est toujours présente, même lorsque les images à analyser sont simples. Le terme segmentation a en fait plusieurs acceptions, selon le type d'images sur lequel on travaille, selon la nature des outils de segmentation utilisés et surtout selon ce que l'on attend de cette procédure. Et de ce dernier point naît sans doute une première confusion : celle qui consiste à penser qu'il existe, pour une image donnée, une seule segmentation valable, exacte, parfaite de cette image et qu'un bon algorithme est celui qui tend à se rapprocher le plus de cette segmentation idéale. De ce point de vue, une définition adéquate de la segmentation d'images pourrait être : segmenter une image consiste à extraire, de façon aussi exacte que possible, les "objets" présents dans cette image. Cette définition n'est pas très opératoire puisqu'elle ne fournit aucun moyen de caractériser les objets intéressants dans l'image si ce n'est en affirmant que ce sont précisément ceux qui seront exhibés par la segmentation. On aboutit ainsi à une seconde confusion, qui procède du même schéma de pensée que la première, et qui consiste à croire que la segmentation permet de comprendre l'image analysée. l'ensemble de la procédure a alors une finalité évidente : mimer le mécanisme de la compréhension d'une image ou d'une scène en général, mécanisme dont l'étape primordiale est une segmentation. Ce mécanisme serait général et surtout ne nécessiterait aucune connaissance a priori de l'image traitée. L'approche dont il sera question ici prend à l'inverse pour hypothèse que la segmentation d'images n'est aucunement associée à sa compréhension et qu'en tout cas, elle n'en constitue pas les prémisses. Au contraire, on ne segmente correctement une image que si elle a été comprise, c'est-à-dire si l'on est capable de désigner les objets que l'on juge intéressants dans cette image. Avec cette restriction importante, la segmentation d'image consistera à cerner, à des fins de quantification, les limites d'objets présents dans le champ d'analyse, objets préalablement désignés, marqués par des procédures (transformations d'images) adéquates.

Les méthodes de segmentation d'images décrites dans ce mémoire feront largement appel à cette approche. la connaissance a priori que l'on a des objets ou des régions que l'on désire extraire permet (du moins on l'espère !) de définir des procédures de marquage, de désignation, marquages utilisés par d'autres procédures chargées elles de segmenter (au sens strict) c'est-à-dire de fournir avec le maximum de précision, les limites des objets ou des régions en question.

PLAN ET CONTENU DE L'OUVRAGE

La pratique quotidienne de la segmentation confronte l'utilisateur à des problèmes qui l'amènent, bon gré mal gré, à prendre ses distances par rapport à la présentation relativement dogmatique de la segmentation qui vient d'être décrite. Cependant, on verra que ces grands principes restent valables, et que si variations il y a, elles se situent davantage au niveau du marquage des objets à extraire, que de leur segmentation proprement dite. L'ensemble des procédures et des transformations utilisées dans ce qui va suivre est constitué de ou bâti à partir d'outils morphologiques. La disparité des situations rencontrées fait qu'il sera sans doute nécessaire de mettre en oeuvre la totalité des outils morphologiques disponibles. Comme leur présentation exhaustive serait trop fastidieuse, on se contentera de décrire les outils communs à toutes les procédures de segmentation présentées. Cette description de la boîte à outils constitue la première partie de ce mémoire.

Le premier chapitre sera consacré à des rappels de définitions de transformées élémentaires, aussi bien binaires que numériques. Si en effet, la segmentation d'images est essentiellement orientée vers les images à teintes de gris, de nombreuses transformations morphologiques numériques ont leur origine en morphologie binaire. De plus, certains opérateurs seront révisés, de façon à en présenter des améliorations propres à fournir de meilleurs algorithmes.

Le chapitre Deux présentera le gradient morphologique et ses différentes variations. Cet opérateur est, en effet, couramment utilisé dans les problèmes de segmentation d'images à teintes de gris.

Le troisième chapitre abordera les transformations géodésiques. Ce groupe de transformations est d'un usage constant dans les algorithmes de segmentation, aussi bien dans le cas binaire, où elles constituent les rouages élémentaires d'opérations de plus haut niveau, que pour les transformées numériques, où leur rôle, notamment dans les procédures de reconstruction d'images, est fondamental. Ces transformations seront également généralisées, cette généralisation fournissant divers outils intéressants dans le marquage des objets.

Le chapitre Quatre introduira la transformation appelée ligne de partage des eaux. Cette transformation est par excellence la machine-outil de la segmentation en morphologie mathématique. On donnera sa définition, ses principales propriétés, et certains algorithmes permettant de la réaliser.

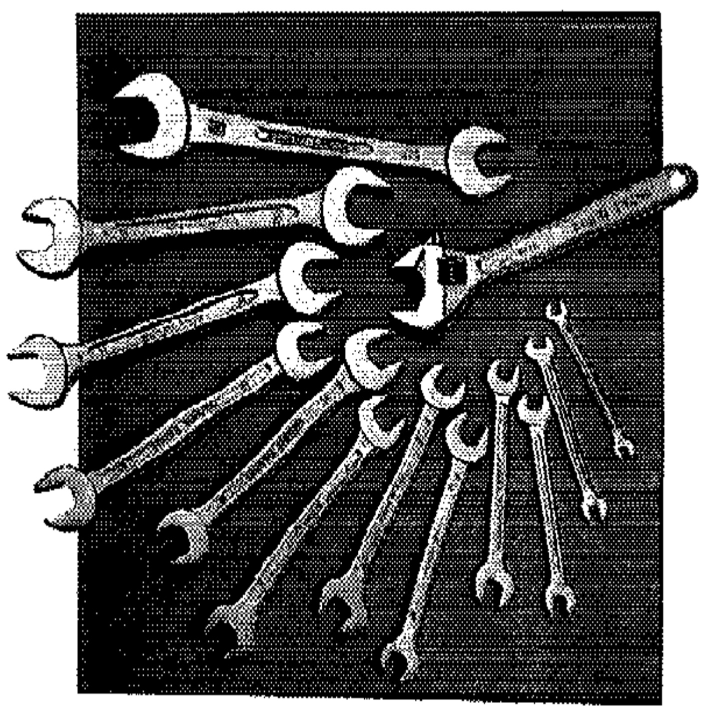
Le chapitre Cinq sera réservé à l'introduction d'un algorithme rapide de ligne de partage des eaux basé sur une représentation des fonctions sous forme de fléchage. Cette représentation et son utilisation seront largement décrites. On présentera également certains résultats sous l'éclairage fourni par les notions de fonctions structurantes. Ce chapitre clôturera la présentation générale des outils pour la segmentation.

La seconde partie de l'ouvrage sera consacrée à l'utilisation de ces outils. Le bon usage des outils de segmentation sera discuté à travers des exemples d'utilisation.

Le chapitre Six notamment présentera la méthodologie générale de la segmentation d'images dans des cas relativement simples. Cette simplicité relative se caractérise par le fait que le marquage des objets procède d'une algorithmique simple ou immédiate, essentiellement parce que les caractéristiques de teinte, de géométrie de ces objets sont faciles à appréhender.

Enfin, dans le dernier chapitre, on se préoccupera de la segmentation d'images complexes. Ces images se caractérisent par la difficulté à la fois du marquage ou de la désignation des régions intéressantes et de la segmentation succédant à ce marquage. Ces exemples proviennent de scènes réelles où la complexité des objets à extraire est importante, où le bruit et des phénomènes parasites perturbent les processus de segmentation. On montrera néanmoins, que même dans ce cas, la méthodologie générale n'est pas remise en cause. Il faudra cependant l'adapter à ces cas particuliers. L'approche décrite dans ce dernier chapitre aura quelques analogies avec les algorithmes classiques de segmentation par croissance de régions. Mais on insistera sur les avantages de cette algorithmique et en particulier sur sa plus grande robustesse.

A LA DECOUVERTE DES OUTILS DE SEGMENTATION



L'essentiel est de rendre correctes les désignations.
CONFUCIUS

CHAPITRE 1

QUELQUES OUTILS ÉLÉMENTAIRES

INTRODUCTION

Que le lecteur se rassure ! Il ne trouvera pas dans ce premier chapitre une nouvelle présentation de la morphologie mathématique, où défilent successivement les transformations élémentaires, les opérateurs complexes, à la fois pour les images binaires et numériques. Ce serait fastidieux, tout autant pour le lecteur que pour le rédacteur. De nombreuses introductions à la morphologie mathématique existent par ailleurs (MATHERON [60], SERRA [80],[84], COSTER et CHERMANT [33]). De plus, il existe des présentations plus algorithmiques de ces outils de base, qui insistent davantage sur l'assemblage et le bon usage de ces opérations élémentaires (GRATIN, BEUCHER [38],[18]).

On se contentera donc d'introduire certaines notions binaires indispensables, en insistant sur l'aspect algorithmique, ainsi que les opérateurs élémentaires sur les images numériques.

On rappellera également certaines notions mathématiques élémentaires, et on en profitera pour établir le cadre mathématique utilisé dans cette étude. Ce cadre sera d'ailleurs très souvent digital, étant donné que les descriptions algorithmiques des outils présentés seront privilégiées.

I) TRANSFORMATIONS HOMOTOPIQUES, SQUELETTE, SQUELETTE PAR ZONES D'INFLUENCE

Les principales transformations binaires qui seront révisées concernent les opérations dites homotopiques et en particulier le squelette d'un ensemble et ses différents avatars. Cette révision est d'importance parce que, d'une part, les principaux outils de segmentation développés dans cet ouvrage, qu'ils soient binaires ou numériques, feront largement usage de ces opérateurs, et seront même la généralisation numérique de transformations binaires, parce que, d'autre part, on s'attachera à redéfinir les liens unissant les notions formelles avec leur implantation sous forme d'algorithmes.

I-1) Transformée en tout ou rien, épaississement, amincissement

Soit $X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ un ensemble et $T = (T_1, T_2)$ un élément structurant constitué de deux parties disjointes T_1 et T_2. On définit la *transformation en tout ou rien* de X par T, notée *, de la manière suivante :

$$\forall \; X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \qquad X * T = (X \ominus \check{T}_1) \cap (X^c \ominus \check{T}_2)$$

On peut alors définir l'*amincissement*, noté $\circ$, et l'*épaississement*, noté $\odot$:

$$X \circ T = X / (X * T)$$
$$X \odot T = X \cup (X * T)$$

L'amincissement est une opération anti-extensive (c'est-à-dire que $X \circ T \subseteq X$) tandis que l'épaississement est extensif. En outre, l'opération duale vis-à-vis de la complémentation de l'amincissement par $T = (T_1, T_2)$ est l'épaississement par $T' = (T_2, T_1)$:

$$X \circ T = (X^c \odot T')^c$$

Amincissement et épaississement sont surtout utilisés en morphologie pour effectuer des transformations homotopiques et en particulier des squelettes.

I-2) Transformations homotopiques

Une *transformation homotopique* est une transformation Φ qui, partant d'un ensemble X le transforme en un ensemble $\Phi(X)$ en préservant une propriété topologique de X appelée *homotopie*. L'homotopie est définie à partir de classes de chemins parcourant l'ensemble X.

Soit $X \subseteq \mathbb{R}^2$ un ensemble connexe, et x et y deux points de X. Considérons deux chemins différents C_1 et C_2 reliant x à y. C_1 et C_2 sont dits homotopiques si et seulement si il est possible de passer de C_1 à C_2 par une suite continue de déformations continues. Ainsi, sur la figure I-1, les chemins C_2 et C_3 sont homotopiques ; ce n'est en revanche pas le cas pour C_1 et C_2, car il est impossible d'appliquer C_2 sur C_1 par déformations continues à cause du trou existant dans l'ensemble. On montre que la relation d'homotopie entre chemins de X est une relation d'équivalence.

X sera dit *simplement connexe* si et seulement si il n'existe qu'une et une seule classe d'équivalence de chemins entre deux points quelconques de X. Ceci revient à dire que X est connexe et sans trou.

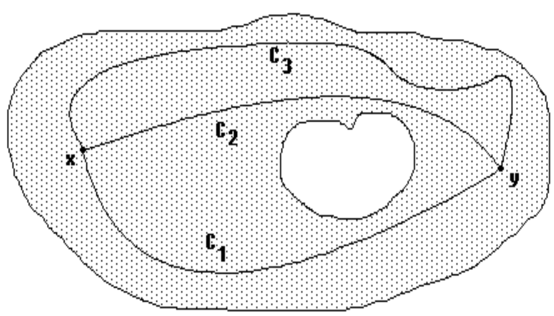


Figure I-1

La paire de chemins (C_2,C_3) est homotopique alors que la paire (C_1,C_2) ne l'est pas

Une transformation $\Phi : \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ sera dite homotopique si et seulement si :

$$\forall x \subseteq \mathbb{R}^2,\ \exists\ \Psi : \mathbb{R}^2 \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ \text{application continue,}$$

$$\text{telle que} \qquad \begin{cases} \Psi(X,0) = X \\ \Psi(X,1) = \Phi(X) \end{cases}$$

De façon plus imagée, une transformation homotopique transforme un ensemble X en un ensemble Y par une suite continue de déformations continues. Ainsi, un ensemble simplement connexe sera transformé en un ensemble simplement connexe, un ensemble avec un trou, en un ensemble avec un trou, etc... . Plus généralement, si $X \subseteq \mathbb{R}^2$ est composé de plusieurs composantes connexes $\{X_i\}_{i\in[1,n]}$, le nombre et les positions relatives de ces X_i seront préservés (une transformation homotopique conserve les classes de chemins à la fois pour X et pour X^c, Figure I-2).

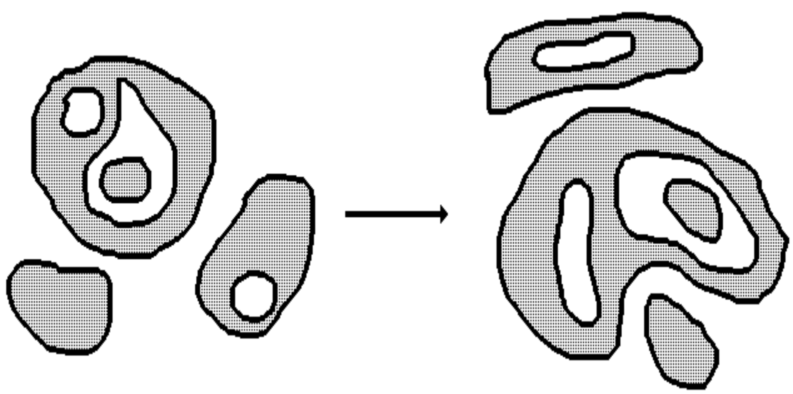


Figure I-2
Un exemple de transformation homotopique

Un exemple classique de transformation homotopique est fourni par le *squelette* d'un ensemble ouvert. On dispose d'algorithmes de squelette capables par amincissement d'effectuer une suite de transformations homotopiques d'un ensemble X.

Cependant, on peut se demander si le résultat obtenu est conforme à la définition formelle du squelette d'un ensemble. La réponse, on va le voir est mitigée, et va nous conduire à définir un algorithme de squelette beaucoup plus propre.

I-3) Squelette : définition, algorithmes

La notion de squelette d'un ensemble X a été introduite par divers auteurs, dont CALABI & HARTNETT [29], BLUM [27]. Différentes méthodes peuvent être utilisées pour définir un squelette. Elles sont souvent équivalentes. L'une d'elles fait intervenir la notion de *boule maximale* d'un ensemble X.

Une boule B incluse dans X est dite maximale si et seulement si il n'existe aucune autre boule de X la contenant :

$$\forall \ B' \text{ boule}, \ B' \subseteq X, \qquad B \subseteq B' \Rightarrow B' = B$$

On peut alors montrer que tout ensemble X ouvert (resp. fermé) peut s'exprimer comme la réunion de ses boules maximales ouvertes (resp. fermées) :

$$X = \bigcup_{B,\text{boule max de } X} B$$

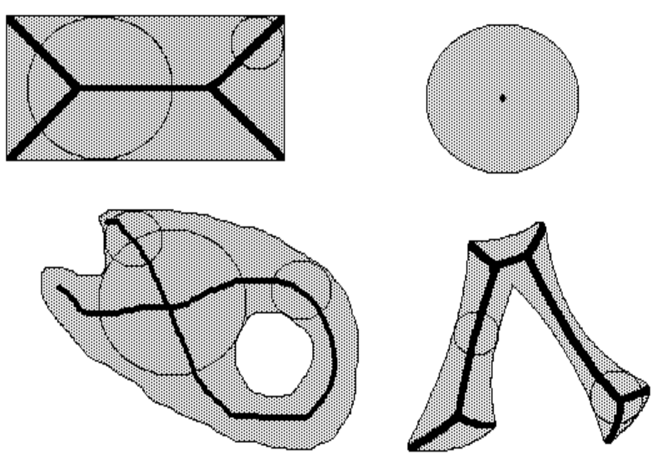


Figure I-3

Quelques exemples de squelettes et de boules maximales

En fait, on peut encore simplifier la représentation : seuls suffisent les centres des boules maximales et les rayons associés. On appellera squelette de X le lieu des centres des boules maximales [29] :

$$S(X) = \cup\{x \in X, \exists\ r \geq 0 \text{ tel que } B(x,r) \text{ maximale dans } X\}$$

La figure I-3 présente quelques exemples de squelettes et de boules maximales. A tout point du squelette S(X), on peut associer le rayon de la boule maximale correspondante. On définit ainsi une fonction q_x sur S(X), à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, qui est appelée *fonction d'étanchéité* ou encore *fonction d'extinction* :

$$q_x \begin{cases} S(X) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \quad x \longrightarrow r \quad , \quad B(x,r) \text{ maximale} \end{cases}$$

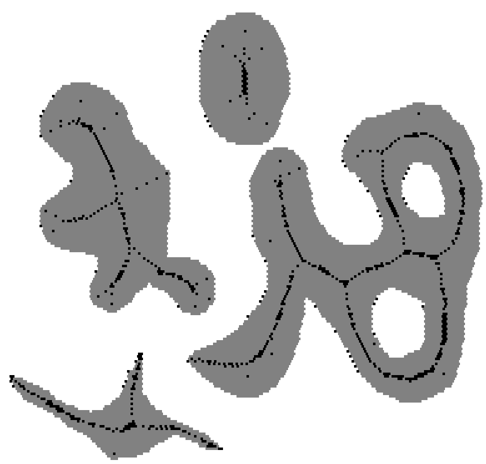


Figure I-4
Exemple de squelette par ouvertures

De plus, on montre que le squelette de X peut s'écrire comme l'union des *résidus* des ouverts successifs de X [61]. Le résidu d'un ouvert $(X)_B$ de X est l'ensemble $X/(X)_B$. Dans le cas digital, la formule est la suivante :

$$S(X) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [(X \ominus nB)/(X \ominus nB)_B]$$

En effet, pour $n \geq 0$ donné, $X \ominus nB$ est le lieu des centres des boules de taille n incluses dans X; $(X \ominus nB)_B$ est lui le lieu des centres des boules de taille n qui sont incluses dans une boule de taille n+1. Ces boules ne sont donc pas maximales. $(X \ominus nB)/(X \ominus nB)_B$ est donc le lieu des centres des boules maximales de taille n, et en faisant l'union pour tous les $n \geq 0$, on obtient le squelette de X.

La formule précédente fournit une définition du squelette à l'aide de transformations morphologiques simples (érosions et ouvertures par des boules). Cependant, le squelette ainsi obtenu n'est pas connexe (Figure I-4). C'est la raison pour laquelle on préfère le construire à l'aide d'amincissements homotopiques. En effet, parmi les éléments structurants biphasés que l'on peut définir dans l'espace digital sur la "boule élémentaire" (hexagone si le graphe digital est hexagonal, carré si la trame est carrée), certains produisent des amincissements et épaississements homotopiques. Ainsi, en trame hexagonale, ils peuvent être regroupés en trois catégories, aux six rotations près. Ces trois éléments structurants sont dénommés L, M et D (Figure I-5).

1	1		1	1		1	·	
·	·	·	·	·	1	·	·	0
0	0		0	·		0	0	
L			M			D		

Figure I-5

Eléments structurants utilisés pour construire des squelettes connexes

Le squelette d'un ensemble X est réalisé ordinairement à l'aide d'itérations, direction par direction, d'amincissements par l'un de ces trois éléments structurants. En fait, seuls L et M sont utilisés, car le résultat présente quelque analogie avec la définition formelle du squelette

(Figure I-6).

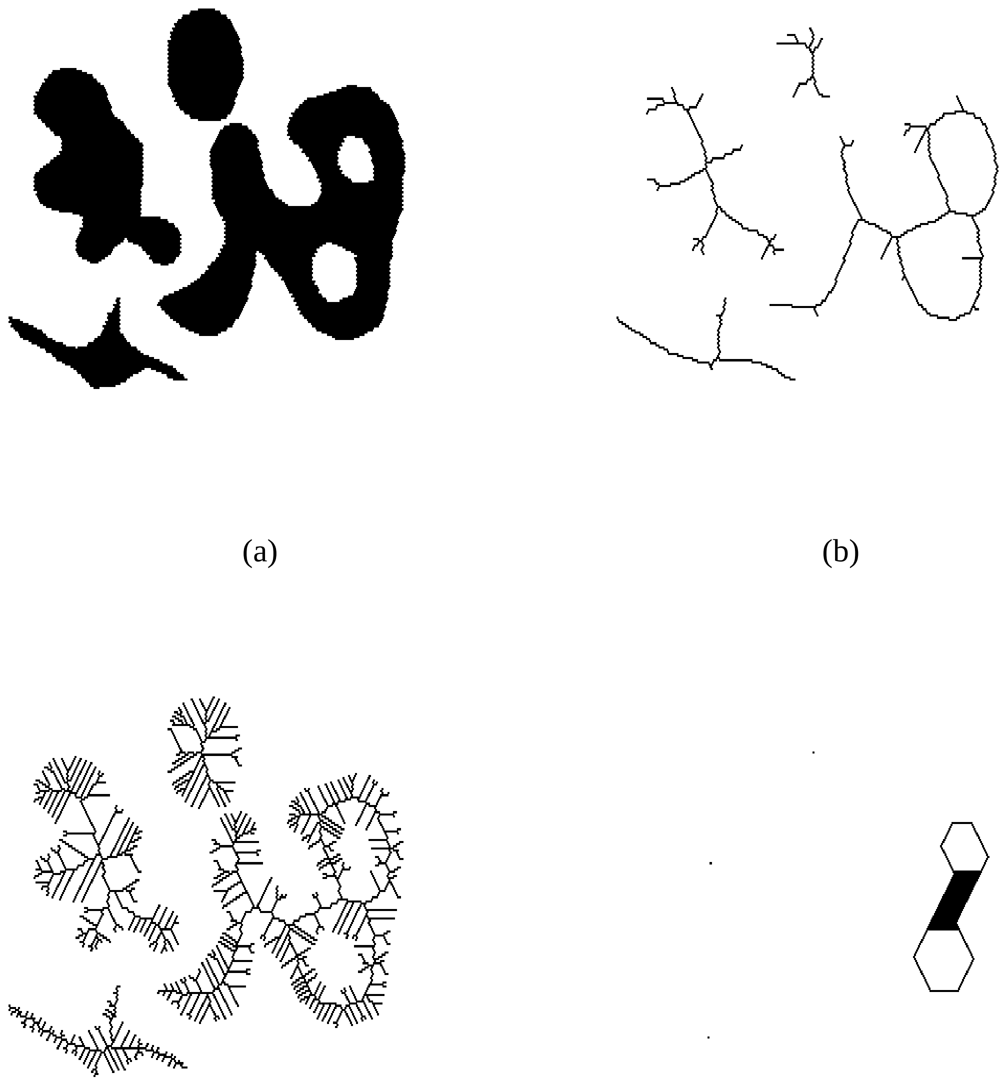


Figure I-6

Amincissements homotopiques réalisés avec les éléments structurants L, M et D utilisés en séquence : (a) image originale, (b) "squelette" L, (c) "squelette" M, (d) "squelette" D

Soit L^i, l'élément structurant L orienté dans une direction i quelconque. Le squelette de X est obtenu par itérations jusqu'à idempotence de l'opération :

$$\{X \circ L^i\} = (X \circ L^1) \circ L^2 \circ \ldots \circ L^n$$

n étant le nombre de rotations de l'élément (6 en hexagonal, 4 ou 8 en carré selon le graphe choisi).

L'algorithme de squelette est alors :

$$\begin{array}{ccc} & \longrightarrow & Y = \{X \circ L^i\} \\ X = Y & & \downarrow \\ \uparrow & \xleftarrow[\text{non}]{} & Y = X \ ? \qquad \text{(Test d'idempotence)} \\ & & \downarrow \text{oui} \\ & & S_c(X) = Y \end{array}$$

Ce squelette $S_c(X)$ est certes connexe, mais rien n'indique qu'il ait quelque parenté avec le squelette par ouvertures S(X). En fait, on sait que S(X) n'est pas inclus dans $S_c(X)$. Bien plus, il n'y a pas qu'un seul ensemble $S_c(X)$ puisque le résultat dépend énormément de l'ordre d'utilisation de chacun des L^i, sans d'ailleurs qu'une séquence particulière soit meilleure que les autres (cf [80], page 399). On peut néanmoins définir un algorithme de squelette connexe qui contienne S(X), en partant de ce dernier et en montrant qu'il peut s'écrire sous forme d'amincissement non pas par une séquence mais par une union d'éléments structurants. L'extraction d'un sous-ensemble d'éléments préservant la connexité permet alors de réaliser un squelette connexe $S_c(X)$ unique et tel que $S(X) \subseteq S_c(X)$ (BEUCHER [10], 1989). Sans rappeler la démonstration, on peut en résumer les grandes lignes.

Donnons d'abord la définition d'un amincissement par un *ensemble d'éléments structurants*. Il s'agit bien d'un ensemble et non pas d'une séquence, en ce sens que la transformée ainsi obtenue ne dépend pas de l'ordre dans lequel ont été pris les divers éléments structurants utilisés.

Soit $\mathcal{F} = \{T_a, T_b, \ldots\}$ un ensemble d'éléments structurants. Chaque élément T_i est la combinaison de deux éléments T_i^1 et T_i^2. La transformation par tout ou rien d'un ensemble X par cet ensemble d'éléments est définie par :

$$X * \mathcal{F} = \bigcup_i (X * T_i)$$

De même, on définit l'épaississement et l'amincissement de X par $\mathcal{F}$:

$$X \circ \mathcal{F} = X \;/\; (X * \mathcal{F}) = X \;/ \bigcup_i (X * T_i)$$

$$= X \cap [\bigcap_i (X * T_i)^c] = \bigcap_i (X \circ T_i]$$

$$X \odot \mathcal{F} = X \cup [X * \mathcal{F}) = \bigcup_i (X \odot T_i)$$

Pour exprimer l'algorithme de squelette par ouvertures sous forme d'itérations d'amincissements, il suffit de pouvoir l'écrire comme suit :

$$S(X) = ((((X \circ \mathcal{F}) \circ \mathcal{F}) \circ \ldots) \circ \mathcal{F})$$

où $\mathcal{F}$ représente un ensemble d'éléments structurants biphasés.

En posant :

$$Z_o = X$$

et en définissant l'opération itérative suivante :

$$Z_n = (Z_{n-1} \ominus B) \cup (Z_{n-1}/(Z_{n-1})_B)$$

on montre qu'elle peut s'écrire :

$$Z_n = (X \ominus nB) \cup [\bigcup_{i=0}^{n-1} (X \ominus iB)/(X \ominus iB)_B]$$

ou encore :

$$Z_n = (X \ominus nB) \cup S_{n-1}(X)$$

en désignant par $S_{n-1}(X)$ le second terme de la formule précédente, correspondant aux n premières étapes du squelette par ouvertures.

Cela entraîne :

$$Z_\infty = S(X)$$

Montrons que l'opération $(Z \ominus B) \cup (Z/Z_B)$ est un amincissement. On peut écrire :

$$(Z \ominus B) \cup [Z \cap (Z_B)^c] = Z \cap [(Z \ominus B) \cup (Z_B)^c] = Z \cap [(Z \ominus B)^c \cap (Z_B)]^c$$

ce qui amène à montrer que $(Z \ominus B)^c \cap Z_B$ est une transformée en tout ou rien.

On a :

$$Z_B = (Z \ominus B) \oplus B = \bigcup_{a \in B} (Z \ominus B)_a = \bigcup_{a \in B} [\bigcap_{b \in B} Z_{a+b}]$$

$$Z_B = \bigcup_{a \in B} (Z \ominus B_a)$$

De la même façon :

$$(Z \ominus B)^c = Z^c \oplus B = \bigcup_{b \in B} (Z^c)_b = \bigcup_{b \in B} (Z_b)^c = \bigcup_{b \in B} (Z^c \ominus L_b)$$

où L_b est le translaté d'un point dans la direction b.

On a alors :

$$(Z \ominus B)^c \cap Z_B = \bigcup_{a \in B,\ b \in B} [(Z \ominus B_a) \cap (Z^c \ominus L_b)]$$

$$= \bigcup_{a,b} (Z * T_{a,b}) \qquad \text{avec} \qquad T_{a,b} = (B_a, L_b)$$

L'opération de squelettisation est donc un amincissement par un ensemble $\mathcal{F}$ d'éléments structurants :

$$\mathcal{F} = \{T_{a,b} = (B_a, L_b),\ \forall a,b \in B\}$$

On remarquera que ce résultat demeure valable quelle que soit la dimension de l'espace. Il est vrai en particulier dans $\mathbb{R}^3$.

En trame hexagonale, ces configurations se ramènent aux trois suivantes, et à toutes leurs rotations :

$$\begin{array}{c} \cdot \quad 0 \\ 1 \quad \mathbf{1} \quad \cdot \\ 1 \quad 1 \quad 1 \\ 1 \quad 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \cdot \quad \cdot \\ 1 \quad \mathbf{1} \quad 0 \\ 1 \quad 1 \quad 1 \\ 1 \quad 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} 0 \quad \cdot \\ 1 \quad \mathbf{1} \quad \cdot \\ 1 \quad 1 \quad 1 \\ 1 \quad 1 \end{array}$$

Quant à la trame carrée, elle fournit les configurations suivantes (à une rotation ou symétrie près) :

$$\begin{array}{ccc} 0 & \cdot & \cdot \\ 1 & \mathbf{1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \cdot & 0 & \cdot \\ 1 & \mathbf{1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \mathbf{1} & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & \mathbf{1} & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & 1 & \mathbf{1} & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

(le chiffre en gras correspond à l'origine de l'élément structurant)

Ces amincissements ne fournissent bien sûr pas un squelette connexe. Mais on peut, en triant les différentes configurations, extraire celles qui correspondent à des amincissements homotopiques. Cette analyse (laborieuse mais pas compliquée) conduit aux résultats suivants. En trame hexagonale, on montre que de toutes les configurations analysées, seules les configurations du type :

$$\begin{array}{c} \bar{2} \quad 0 \\ 1 \quad \mathbf{1} \quad \bar{2} \\ 1 \quad 1 \quad 1 \\ 1 \quad 1 \end{array}$$

ainsi que toutes leurs rotations préservent la connexité du squelette par ouverture. Les points désignés par 1 doivent être inclus dans X et les points marqué $\bar{2}$ ne doivent pas appartenir au résidu $X/(X)_B$ de B. Le point marqué 0 doit être inclus dans X^c.

Cette configuration peut aussi s'écrire :

$$\begin{array}{c} \bar{2} \quad 0 \\ \cdot \quad \bullet \quad \bar{2} \\ 3 \quad \cdot \end{array}$$

où 3 désigne les points de l'érodé $X \ominus B$. En effet si le point indiqué appartient à l’érodé, il est centre d’un hexagone inclus dans X, donc par définition tous ses voisins appartiennent à l’ouvert.

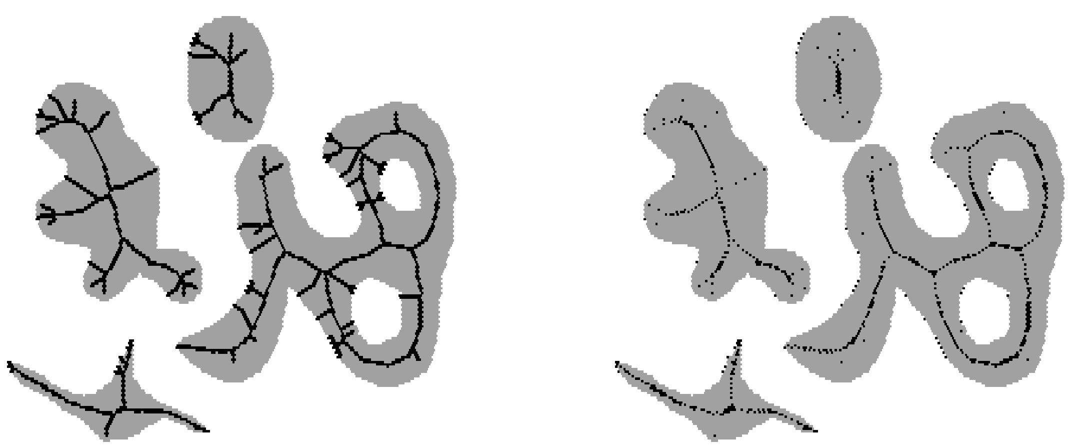
En trame carrée, les configurations sont encore plus simples. Elles sont divisées en deux groupes selon que l’on travaille en 4-connexité ou en 8-connexité. En 4-connexité, on a :

$$
\begin{array}{ccc}
0 & 0 & 0 \\
1 & \mathbf{1} & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccc}
 & \cdot & 0 & \cdot \\
1 & 1 & \mathbf{1} & 0 \\
1 & 1 & 1 & \cdot \\
1 & 1 & 1 &
\end{array}
$$

et en 8-connexité :

$$
\begin{array}{ccc}
\cdot & 0 & \cdot \\
1 & \mathbf{1} & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccc}
 & \cdot & 0 & 0 \\
1 & 1 & \mathbf{1} & 0 \\
1 & 1 & 1 & \cdot \\
1 & 1 & 1 &
\end{array}
$$

ainsi que toutes leurs rotations et symétries.



(a) (b)

Figure I-7

Squelette connexe (a) et comparaison avec le squelette par ouvertures (b)

La figure I-7 montre quelques exemples de squelettes obtenus par ces amincissements. On constate que $S_c(X)$ contient bien le squelette par ouverture $S(X)$.

D'autres types de "squelettes" sont accessibles par ce type d'opérations ([10]). On n'en discutera pas ici, car ils ne seront pas utilisés par la suite.

On remarquera incidemment pourquoi, en trame hexagonale, les séquences d'éléments structurants L ou M conviennent mieux que l'élément D pour construire un squelette. En effet ils sont contenus dans la séquence exacte définie précédemment; ce n'est pas le cas pour D.

Cette construction d'un squelette connexe exact démontre que des outils simples peuvent fournir des algorithmes performants, et des transformations conformes à leur définition formelle. Le fait de disposer d'un algorithme de squelette exact est particulièrement intéressant lorsque l'on veut obtenir le squelette par zones d'influence d'un ensemble.

I-4) <u>Squelette par zones d'influence</u>

Ce squelette a été introduit par LANTUEJOUL ([47], 1978), pour étudier des relations de voisinage entre particules et plus généralement pour des problèmes liés à des partitions de l'espace.

Ce *squelette par zones d'influence* ou SKIZ est défini de la manière suivante :

Soit $X \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble formé de n composantes connexes $\{X_i\}_{i \in [1,n]}$. On définit la *zone d'influence* $z(X_i)$ de X_i comme l'ensemble de points de $\mathbb{R}^2$ qui sont plus proches de X_i que de toute autre composante connexe de X :

$$z(X_i) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \forall\ j \neq i,\ \ d(x,X_i) < d(x,X_j)\}$$

$d(x,X)$ étant la distance d'un point x à l'ensemble X.

Remarquons que la zone d'influence d'une composante connexe X_i de X n'est en général pas homotopique à X_i. L'ensemble constitué des frontières des différentes zones d'influence est par définition le squelette par zones d’influence de X. La figure I-8 en présente un exemple.

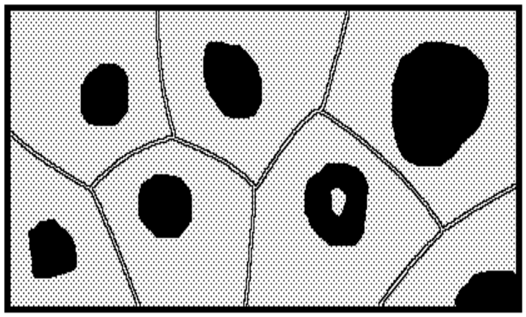


Figure I-8

Squelette par zones d’influence d’un ensemble

Cette notion est définie par le biais d’une métrique d (ou pseudo-métrique puisqu’il ne s’agit pas réellement de la distance entre points, mais entre un point et un ensemble). On peut cependant obtenir la transformée à l’aide du squelette par épaississement de X. Les configurations utilisées sont du type :

$$\begin{array}{cccccc} & & \bar{2} & & 1 & \\ & 0 & & \mathbf{0} & & \bar{2} \\ 0 & & 0 & & 0 & \\ & 0 & & 0 & & \end{array}$$

(en trame hexagonale)

avec 0 désignant les points de X^c

1 " " de X

$\bar{2}$ " " n’appartenant pas au résidu par fermeture X^B/X.

Le SKIZ est généralement obtenu en ne conservant du squelette par épaississements de X (*exo-squelette*) que les arcs fermés. Pour supprimer les arcs en trop, on utilise un épaississement particulier de $S_c(X^c)$ appelé *ébarbulage*. Soulignons que l'ensemble produit après cette étape peut encore dans certains cas particuliers être un sous-ensemble du SKIZ vrai (voir Figure I-9). L'ébarbulage est réalisé par un épaississement par un ensemble $\mathcal{T}'$ d'éléments structurants E_i du type (en hexagonal) :

$$\begin{array}{ccccc} & \cdot & & \cdot & \\ 1 & & \mathbf{0} & & 1 \\ & 1 & & 1 & \end{array}$$

On peut d'ailleurs adjoindre directement à l'ensemble des éléments $\mathcal{T}$ du squelette par épaississement cet ensemble $\mathcal{T}'$. On écrit alors :

$$\mathrm{SKIZ}(X) = \{X \odot (\mathcal{T} \cup \mathcal{T}')\}^{\infty}$$

cette notation désignant l'itération infinie (en fait jusqu'à idempotence) de l'épaississement. Il est plus judicieux de réaliser ce squelette par zones d'influence à l'aide d'épaississement, car on évite ainsi certains effets de bord désagréables.

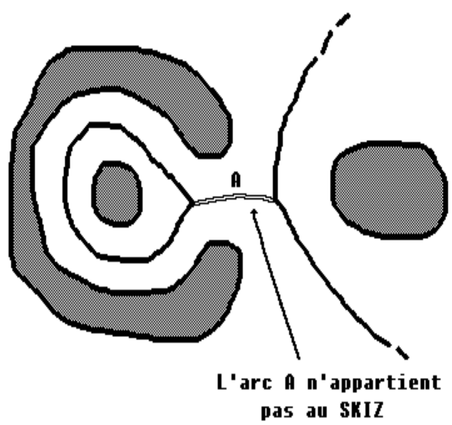


Figure I-9

SKIZ vrai et résultat obtenu par épaississement

Le SKIZ, on l'a vu plus haut, n'est pas une transformée homotopique. Elle conserve cependant les composantes connexes de l'ensemble initial et leurs relations de voisinage.

On introduira par la suite (au chapitre 4) une transformation très importante dans la segmentation d'images à teintes de gris (on peut même affirmer qu'elle en constitue la cheville ouvrière) : la ligne de partage des eaux. On verra alors qu'elle constitue une généralisation de la notion de squelette par zones d'influence à des fonctions quelconques.

II) OPERATIONS ELEMENTAIRES SUR LES IMAGES NUMERIQUES

La morphologie mathématique est une méthodologie ensembliste. Cependant, l'extension des notions élémentaires à des images à teintes de gris est relativement aisée. Une *image à teintes de gris* peut se représenter par une fonction numérique f. Pour étendre les notions morphologiques de base aux images de gris, il suffit d'introduire la notion de *sous-graphe* d'une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Son sous-graphe G(f) est l'ensemble des points (x,y) de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ tels que $y \leq f(x)$. Ce sous-graphe est donc un ensemble particulier de $\mathbb{R}^3$ sur lequel on peut effectuer des transformations morphologiques par un élément structurant tridimensionnel B. En fait, les transformations morphologiques sur les images à teintes de gris peuvent être présentées selon deux points de vue : un point de vue ensembliste, et dans ce cas chaque transformation a une interprétation géométrique, ou un point de vue fonctionnel, et dans ce cas une transformation doit pouvoir s'exprimer sous forme d'une fonctionnelle Φ agissant sur f et produisant une nouvelle fonction $g = \Phi(f)$. Enfin, on est amené également à considérer ces transformations comme agissant sur les sections de la fonction f, à la fois parce que cette approche est opératoire (elle permet de définir à partir des sections de nouvelles transformations comme nous le verrons au chapitre 4), et aussi parce que cette représentation constitue un pont entre les ensembles et les fonctions. On peut, en particulier, définir des fonctions à l'aide d'un empilage adéquat d'ensembles, technique qui sera utilisée dans la deuxième partie. Ces trois aspects de la morphologie numérique sont reliées par des passerelles, dont on fera un bref résumé. On trouvera une présentation détaillée des propriétés théoriques qui fondent la légitimité et l'équivalence de ces trois présentations de la morphologie numérique dans [24],[80].

II-1) Des ensembles aux fonctions

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Une *section* ou *seuil* au niveau λ de cette fonction produit deux ensembles :

$$X_\lambda(f) = \{x : f(x) \geq \lambda\}$$
$$Y_\lambda(f) = \{x : f(x) > \lambda\}$$

On peut donc définir une fonction par sa formulation explicite ou bien encore par la suite complète des seuils $\{X_\lambda(f)\}$, $\forall \lambda$.

Aucune hypothèse de nature topologique n'a été faite en ce qui concerne les ensembles $X_\lambda(f)$ et $Y_\lambda(f)$. On montre [31] que $X_\lambda(f)$ est un fermé et, en même temps, $Y_\lambda(f)$ un ouvert si et seulement si f est continue. Si une de ces conditions tombe, on aboutit à la notion de fonction semi-continue (supérieure ou inférieure).

Inversement, partant d'une suite d'ensemble $\{X_\lambda\}$, à quelles conditions cette suite peut définir une fonction? Une première condition est que la suite $\{X_\lambda\}$ soit décroissante :

$$\forall \lambda_1 \geq \lambda_2 \quad , \quad X_{\lambda_1} \subset X_{\lambda_2}$$

Est-ce la seule condition? La réponse est, semble-t'il, non, si on se réfère à l'exemple suivant :

Soit la suite $\{X_\lambda\}$:
$$\begin{array}{lll} X_\lambda = \mathbb{R}^2 & \text{quand } \lambda \leq 0 & \\ X_\lambda = X & \text{quand } 0 < \lambda < 1 & (X \text{ fermé de } \mathbb{R}^2) \\ X_\lambda = \emptyset & \text{quand } \lambda \geq 1 & \end{array}$$

Cette suite ne définit malheureusement pas une fonction. En effet, pour tout point $x \in X$, on ne peut définir la valeur f(x). Tout ce qu'on peut dire est que $f(x) < 1$ et que pour tout $\lambda < 1$, $f(x) \geq \lambda$. Cependant, le théorème suivant montre que la donnée de la suite $\{X_\lambda\}$ suffit pour définir une fonction f unique :

Soit f, une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}$) et $\{X_\lambda(f)\}$ une suite d'ensemble associée à f par seuillage. Les ensembles $X_\lambda(f)$ forment une suite monotone décroissante :

$$\lambda' \leq \lambda, \quad X_\lambda \subset X_{\lambda'} \quad \text{et} \quad X_\lambda = \lim_{\lambda' \uparrow \lambda} X_{\lambda'} = \bigcap_{\lambda' < \lambda} X_{\lambda'}$$

Inversement, une suite monotone décroissante $\{X_\lambda\}$ d'ensembles génère une fonction f unique, et on peut écrire :

$$f(x) = \mathrm{Sup}\ \{\lambda \ ; \ x \in X_\lambda\}$$

Ce théorème montre que pour définir une fonction, il suffit d'empiler des ensembles inclus les uns dans les autres. La limite (la frontière) de cet empilement suivant l'axe vertical est fournie par le sup qui munit en quelque sorte cet empilement d'un "couvercle".

En fait, ces considérations topologiques sont de peu d'importance en pratique. Les fonctions que l'on manipule dans ce cas sont des fonctions digitalisées définies sur $\mathbb{Z}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{Z}$, et la seule condition qui doit être respectée par la suite $\{X_i(f)\}$, $i \in \mathbb{Z}$, est la condition d'inclusion. De plus, on peut écrire :

$$X_i(f) = \{x : f(x) \geq i\} = \{x : f(x) > i\text{-}1\} = Y_{i-1}(f)$$

Dans tout ce qui suit, on supposera que les fonctions digitalisées dont on aura à se préoccuper peuvent être représentées dans $\mathbb{R}^2$ par des fonctions qui remplissent les conditions définies ci-dessus. En particulier, on sera très souvent amené à considérer que l'on a affaire à des fonctions de $\mathbb{R}^2$ continues. C'est en effet la seule représentation qui garantit dans cet espace l'existence à la fois de minima et de maxima de fonctions (cf. chapitre 3).

Un autre problème important concerne les transformations elles-mêmes. En effet, si une transformation Φ sur une image à teintes de gris peut être réalisée sur le sous-graphe G(f) de la fonction f, encore faut-il que le résultat soit une image g, autrement dit que :

$$\Phi\ [G(f)] = G(g)$$

Or ce n'est pas le cas pour toutes les transformations morphologiques.

En particulier lorsque Φ n'est pas une transformation croissante, il n'y a aucune raison pour que la règle d'inclusion des sections de Φ[G(f)] soit respectée.

On pourrait alors se contenter d'utiliser sur les sous-graphes des opérations morphologiques croissantes. mais ce serait une limitation bien trop grande. Avec une telle restriction, tout ce qui va suivre en particulier sur les outils de segmentation n'aurait pas lieu d'être, puisqu'on utilisera en majeure partie des transformations non croissantes (gradients, ligne de partage des eaux, reconstructions géodésiques, etc...). On préfère donc étendre l'adéquation des transformées bidimensionnelles aux espaces de fonctions par le biais d'un outil performant : l'ombre d'un ensemble.

Soit Y un ensemble fermé de $\mathbb{R}^3$. L'*ombre* de Y, notée $\mathcal{U}(Y)$ est le dilaté de Y par la demi-droite fermée $[0,+\infty]$:

$$\mathcal{U}(Y) = Y \oplus \check{[0,+\infty]} = Y \oplus [0,-\infty]$$

Toutes les sections de l'ombre d'un ensemble vérifient la règle de décroissance monotone énoncé plus haut. L'ombre est donc assimilable au sous-graphe G(g) d'une fonction g unique associée à Y.

On peut donc utiliser l'ombre pour étendre aux fonctions des transformations définies sur les ensembles. Le schéma utilisé dans le cas digital est le suivant :

$$\begin{tikzcd}
\underline{\text{Fonctions de } \mathbb{Z}^2} & \underline{\text{Ensembles de } \mathbb{Z}^3} \\
f \arrow[r] \arrow[dd, "\Phi"'] & G(f) \arrow[d, "\Psi"] \\
 & \Psi[G(f)] \arrow[d, "\mathcal{U}"] \\
g = \Phi(f) & \mathcal{U}[\Psi[G(f)]] = G(g) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

A une transformée ensembliste Ψ agissant sur les ensembles, il lui correspond une transformation Φ telle que $G(\Phi) = \mathcal{U} \circ \Psi$ agissant sur les fonctions.

On reviendra sur cette procédure lorsqu'on généralisera les épaississements et amincissements aux fonctions. Présentement, on introduira seulement les transformations élémentaires numériques.

II-2) Transformations numériques de base

II-2-1) Union, intersection, complémentation pour les fonctions

Soient f et g, deux fonctions et G(f), G(g) leurs sous-graphes respectifs. L'union des sous-graphes est encore un sous-graphe, celui de la fonction sup(f,g) :

$$G[\sup(f,g)] = G(f) \cup G(g)$$

De la même façon, l'intersection des sous-graphes est le sous-graphe de inf(f,g) :

$$G[\inf(f,g)] = G(f) \cap G(g)$$

L'équivalent numérique de l'union d'ensembles est donc le *sup* de fonctions, celui de l'intersection est l'*inf*.

En ce qui concerne la complémentation d'ensemble, les choses sont moins évidentes. En effet, le complémentaire d'un sous-graphe n'est aucunement un sous-graphe, et son ombre est généralement égale à $\mathbb{R}^3$. Pour expliciter le rôle de la complémentation, il faut faire intervenir un autre opérateur : la *réflexion* par rapport au plan horizontal.

Soit $B \subset \mathbb{R}^3$. On définit le réfléchi de B par rapport au plan horizontal, et on le note $\hat{B}$, par :

$$\hat{B} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 x\ \mathbb{R} : (x,-t) \in B\}$$

On peut alors écrire (Figure I-10) :

$$[G^c(f)]^{\wedge} = [G(-f)] = [\hat{G}(f)]^c$$

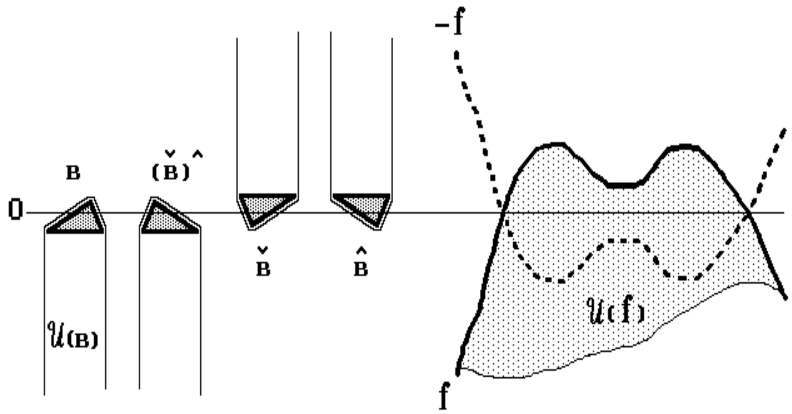


Figure I-10

Relation entre la réflexion et la complémentation d'un sous-graphe de fonction

La complémentation d'ensembles s'étend donc à la complémentation de fonctions, mais par le biais de la réflexion, donc d'une manière moins élémentaire que pour les opérateurs union et intersection.

II-2-2) Dilatation et érosion de fonction

On peut définir la *dilatation d'une fonction* f par un élément structurant B tridimensionnel, comme une nouvelle fonction notée $f \oplus \check{B}$ dont le sous-graphe est le dilaté du sous-graphe de f par B :

$$G(f \oplus \check{B}) = G(f) \oplus \check{B}$$

On peut montrer que le dilaté d'un sous-graphe est un sous-graphe.

On peut également écrire (cf. Figure I-11) :

$$G(f \oplus \check{B}) = G(f) \oplus [\hat{\mathcal{U}}(\hat{B})]^{\vee} = G(f) \oplus \mathcal{U}(\check{B})$$

Mais on a vu que l'ombre de $\check{B}$ peut être considérée comme le sous-graphe d'une fonction g :

$$G(g) = \mathcal{U}(\check{B})$$

On peut donc définir l'*addition de Minkowski* de f par g comme la fonction dont le sous-graphe est donné par :

$$G(f \oplus g) = G(f) \oplus G(g)$$

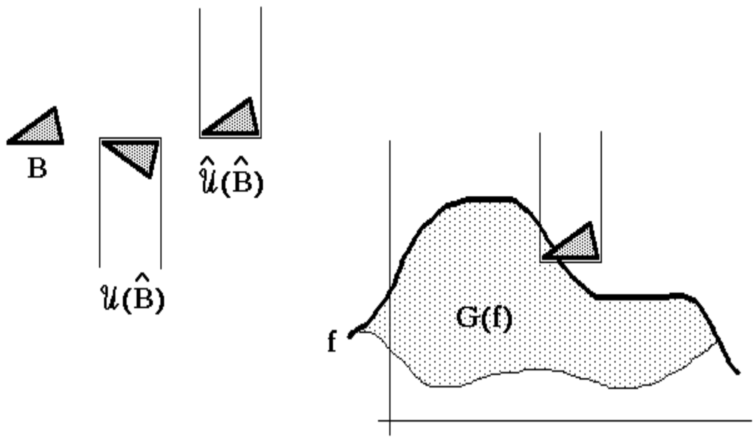


Figure I-11

Relations entre le dilaté d'une fonction et l'ombre de l'élément structurant

On peut donner de cette transformation une formulation explicite en écrivant qu'un point $(x,t) \in \mathbb{R}^2 x \mathbb{R}$ appartiendra au sous-graphe de $f \oplus g$, si le transposé de G(g) implanté en ce point coupe G(f) (Figure I-12).

Ceci est vrai s'il existe $y \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$f(y) + g(x-y) \geq t$$

Soit (avec certaines conditions sur f et g supposées vérifiées) :

$$\operatorname*{Sup}_{y \in \mathbb{R}^2} [\, f(y) + g(x-y) \,] \geq t$$

La valeur de $f \oplus g$ au point x sera donc égale à :

$$(f \oplus g)(x) = \operatorname*{Sup}_{y \in \mathbb{R}^2} [\, f(y) + g(x-y) \,]$$

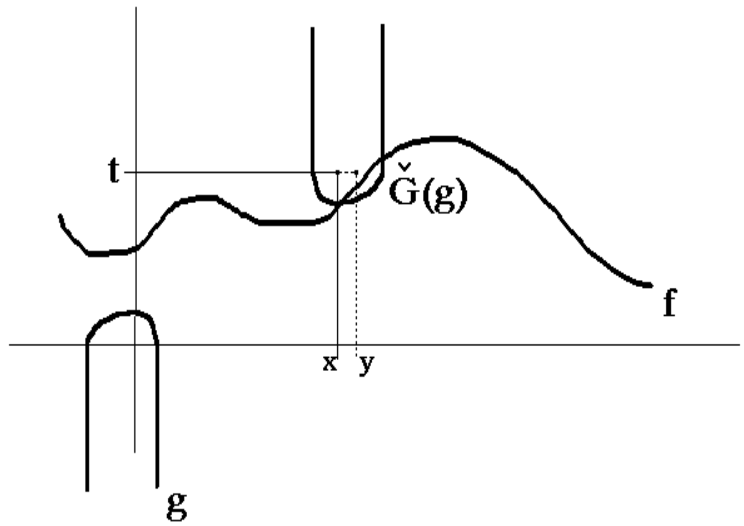


Figure I-12
Dilatation d'une fonction par une autre

De la même façon, on peut définir l'*érosion d'une fonction* f par un élément structurant tridimensionnel B. Cette transformation notée $f \ominus \check{B}$ doit donc être duale de la dilatation vis-à-vis de la complémentation de fonction. Le sous-graphe de $f \ominus \check{B}$ devra donc être égal au sous-graphe de $(-f \oplus \check{B})$ complémenté et réfléchi :

$$G(f \ominus \check{B}) = [\hat{G}(-f \oplus \check{B})]^c$$

Soit :

$$G(f \ominus \check{B}) = [\hat{G}(-f) \oplus \hat{\check{B}}]^c = [\hat{G}(-f)]^c \ominus \hat{\check{B}}$$

$$G(f \ominus \check{B}) = G(f) \ominus \hat{\check{B}}$$

On en déduit immédiatement la *soustraction de Minkowski* de f par g, notée $f \ominus g$:

$$G(f \ominus g) = G(f) \ominus \hat{G}(g)$$

La formulation explicite de $f \ominus g$ s'en déduit (Figure I-13).

Le point $(x,t) \in \mathbb{R}^2 x\ \mathbb{R}$ est inclus dans $G(f \oplus g)$ si $\check{\hat{G}}(g)$ implanté en ce point est contenu dans G(f). Ceci est vrai si et seulement si :

$$\forall\ y \in \mathbb{R}^2, \qquad f(y) - g(x-y) \geq t$$

Soit :

$$\underset{y \in \mathbb{R}^2}{\mathrm{Inf}} [f(y) - g(x-y)] \geq t$$

Ce qui conduit à :

$$(f \ominus g)(x) = \underset{y \in \mathbb{R}^2}{\mathrm{Inf}} [f(y) - g(x-y)]$$

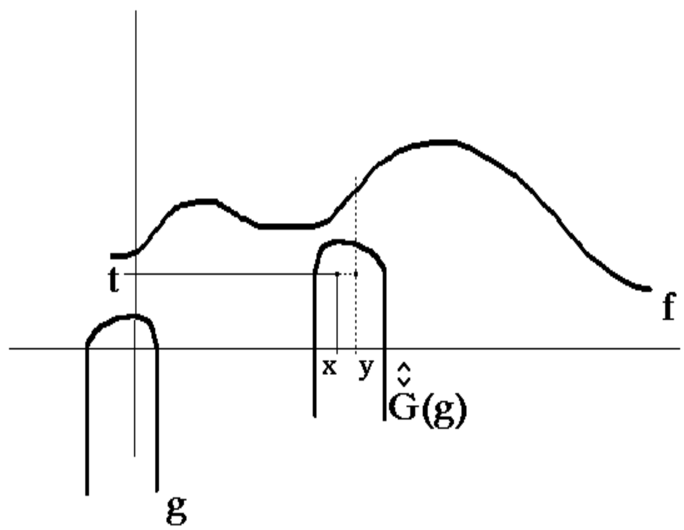


Figure I-13
Erosion d'une fonction par une autre

Ces formules générales se simplifient grandement dans la pratique, car on utilise rarement des éléments structurants tridimensionnels. On se contente souvent d'éléments plans. Dans ce cas, la fonction g associée à un tel élément B par le biais de l'ombre $\mathcal{U}$(B) sera égale à :

$$g(x) = 0 \quad \forall\ x \in B$$
$$g(x) = -\infty \quad \forall\ x \in B^c$$

L'érosion et la dilatation de f (Figure I-14) par un tel élément structurant s'écriront alors :

$$(f \ominus \check{B})(x) = \underset{y \in B_x}{\mathrm{Inf}} [f(y)]$$

$$(f \oplus \check{B})(x) = \mathop{Sup}_{y \in B_x} [f(y)]$$

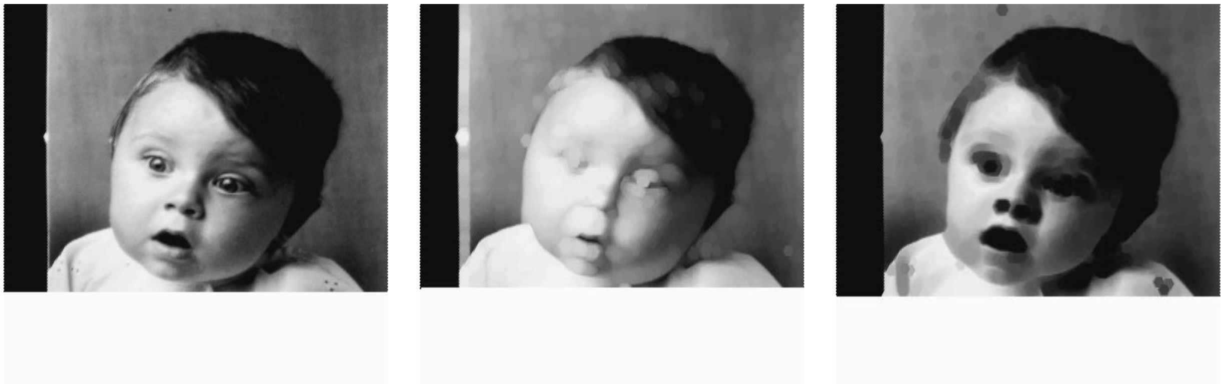


Figure I-14

Dilatation (b) et érosion (c) d'une image à teintes de gris (a)

On peut également expliciter de façon simple les sections de l'érodé et du dilaté, dans ce cas. On trouve :

$$X_\lambda(f \oplus \check{B}) = X_\lambda(f) \oplus \check{B}$$

$$X_\lambda(f \ominus \check{B}) = X_\lambda(f) \ominus \check{B}$$

A partir de ces deux transformations élémentaires, on peut comme en morphologie binaire, en définir d'autres, et en particulier l'*ouverture* $(f)_B$ et la *fermeture* $(f)^B$ d'une fonction :

$$(f)_B = (f \ominus \check{B}) \oplus B$$

$$(f)^B = (f \oplus \check{B}) \ominus B$$

On peut également étendre aux images à teintes de gris les notions d'amincissement et d'épaississement. C'est là que la notion d'ombre prend toute sa force. En effet, l'amincissement ou l'épaississement du sous-graphe G(f) d'une fonction f n'est pas un sous-graphe (l'épaississement et l'amincissement binaires ne sont pas des transformations croissantes). On est donc amené à utiliser la technique précédemment exposée et à écrire :

$$G(f \circ T) = \mathcal{U}[G(f) \circ T] = \mathcal{U}[G(f)/G(f) * T]$$

Par contre, on le verra, le sous-graphe de $f \odot T$, épaississement de f par T n'est pas égal à $\mathcal{U}[Gf) \odot T]$.

On reviendra au chapitre 4 sur ces notions lorsqu'on discutera de certains algorithmes de ligne de partage des eaux.

II-2-3) Les opérations arithmétiques

L'avantage de pouvoir manipuler des fonctions dans des transformations morphologiques est que l'on peut combiner ces dernières avec des opérateurs arithmétiques comme l'addition ou la soustraction. Ces opérateurs apparaissent déjà dans la définition générale de l'érosion et de la dilatation d'une fonction par une fonction. On aura d'ailleurs remarqué l'analogie entre ces formules et celles définissant la convolution $f \otimes g$ d'une fonction par une autre. Il suffit de remplacer dans la première le sup par l'addition et l'addition par la multiplication pour obtenir des structures similaires. Cette analogie est d'ailleurs mise à profit dans certains processeurs d'images [44], pour effectuer avec la même logique de voisinage à la fois des transformations linéaires et morphologiques.

Malheureusement, la combinaison de ces opérateurs ne vérifie pas de bonnes propriétés (comme la distributivité par exemple). Il n'existe pas de relation simple entre le sous-graphe de (f+g) et les sous-graphes respectifs de f et g. On peut cependant formuler les section de (f+g) en fonction des sections de f et de g. On a :

$$X_\lambda(f + g) = \bigcup_{\mu \in \mathbb{R}} [X_{\lambda-\mu}(f) \cap X_\mu(g)]$$

On peut également écrire :

$$Y_\lambda(f + g) = \bigcap_{\mu \in \mathbb{R}} [Y_{\mu-\lambda}(f) \cup Y_\mu(g)]$$

On définit de même les sections de la soustraction (f-g). On a :

$$f - g = f +(-g)$$

$$X_\lambda(f - g) = \bigcup_{\mu\in\mathbb{R}} [X_{\lambda-\mu}(f) \cap X_\mu(-g)]$$

mais :

$$X_\mu(-g) = Y^c_{-\mu}(g)$$

ce qui conduit à :

$$X_\lambda(f - g) = \bigcup_{\mu\in\mathbb{R}} [X_{\lambda+\mu}(f) \cap Y^c_\mu(g)]$$

L’intérêt de ces formules est de donner des opérateurs arithmétiques simples une interprétation ensembliste. Cela permet notamment de faciliter l’interprétation géométrique de certaines transformations où interviennent à la fois des opérateurs morphologiques et arithmétiques. La dernière en particulier utilise des différences ensemblistes, qui ne produisent pas des suites monotones d’ensembles. Mais l’union force la monotonie de la séquence et agit de manière similaire à l’ombre.

D’autres outils morphologiques seront présentés au fur et à mesure des besoins, dans les chapitres suivants. Ceux qui ont été introduits maintenant suffisent pour définir une transformation fondamentale dans la segmentation d’images à teintes de gris : le gradient morphologique.

CHAPITRE 2

LE GRADIENT MORPHOLOGIQUE

INTRODUCTION

Beaucoup d'algorithmes de segmentation d'images à teintes de gris nécessitent la mise en évidence des contours des objets. Cette mise en évidence utilise les variations de contraste de l'image quantifiées par le calcul du gradient. De nombreuses moutures de gradient existent en analyse d'image. Il peut donc paraître superflu de définir une nouvelle version du gradient à l'aide de transformées morphologiques. En fait, cette approche s'avère intéressante pour diverses raisons que nous allons développer au cours de ce chapitre. Mais la première raison qui fait du gradient morphologique un outil indispensable est une raison d'économie : il peut être réalisé avec des processeurs morphologiques seuls, il ne demande pas la mise en oeuvre d'autres techniques. De plus, sa combinaison avec les autres transformations morphologiques se fait naturellement. Si cet argument vous semble spécieux, songez qu'un maçon ne travaille pas avec des outils de menuisier et réciproquement !

I) LE GRADIENT MORPHOLOGIQUE

I-1) Définition et propriétés

Soit f, une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, ou sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ et prenant ses valeurs sur $\mathbb{R}$. Considérons une boule B_λ (disque) de $\mathbb{R}^2$, de rayon λ (fermée ou ouverte). Définissons la fonction h_λ par :

$$h_\lambda = (f \oplus B_\lambda) - (f \ominus B_\lambda)$$

On appelle *gradient morphologique*, l'expression :

$$g = \lim_{\lambda \to 0} \frac{h_\lambda}{2\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} g_\lambda$$

C'est donc la limite (finie ou infinie) de $h_\lambda/2\lambda$, lorsqu'on fait tendre le rayon de la boule B_λ vers zéro.

$h_\lambda(x)$ s'appelle l'*oscillation* de f sur la boule B_λ centrée au point x.

On peut définir également deux versions réduites du gradient morphologique :

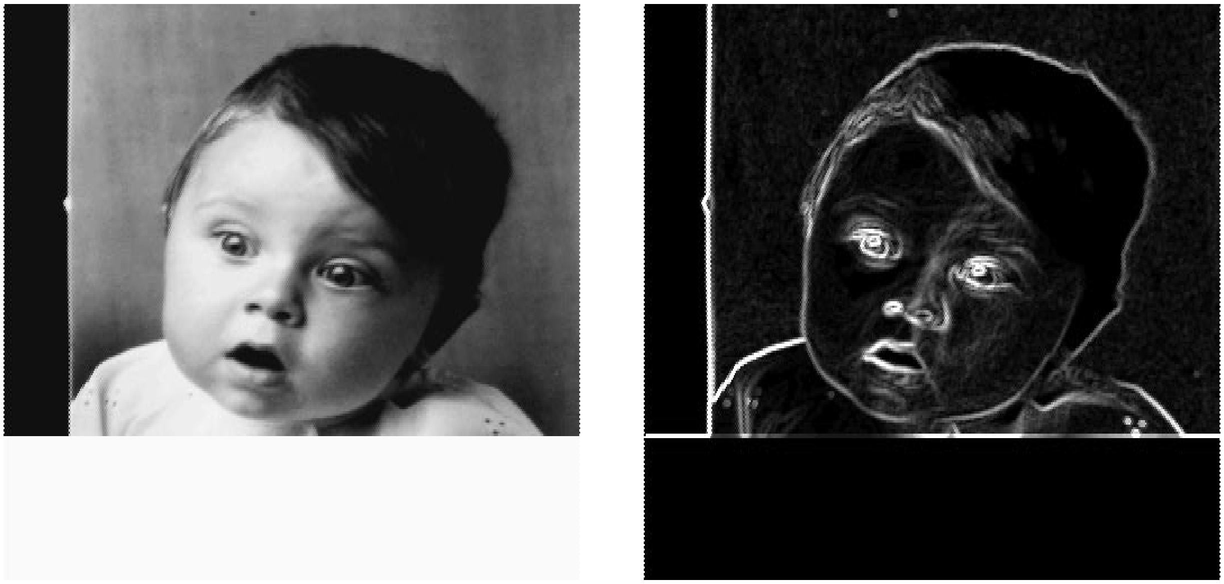
$$g^+ = \lim_{\lambda \to 0} \frac{(f \oplus B_\lambda) - f}{\lambda}$$

$$g^- = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f - (f \ominus B_\lambda)}{\lambda}$$

appelées respectivement *gradient externe* et *gradient interne*. Dans sa version digitale, le gradient morphologique peut s'écrire [23] :

$$g = (f \oplus H) - (f \ominus H)$$

où f est une fonction définie sur $\mathbb{Z}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{Z}$, et H, la boule unité dans $\mathbb{Z}^2$ (hexagone ou carré suivant la trame utilisée). On néglige dans la version digitale le facteur 1/2.



(a) (b)

Figure II-1

Module du gradient (b) d'une image (a)

L'image obtenue par ce type de transformation est similaire à l'image du module du gradient $|\vec{grad}\ f|$ d'une fonction f continuement différentiable (Figure II-1). En fait, on peut montrer que, lorsque f est continuement différentiable, g est égal au module du gradient de la fonction. En effet, dans ce cas f est localement assimilable à un plan dont la tangente de l'angle de plus grande pente α au point $x(x_1,x_2)$ s'écrit :

$$|tg\ \alpha| = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\right]^{1/2} = |\vec{grad}\ f|(x)$$

On remarque immédiatement que (Figure II-2) :

$$[f \oplus B_\lambda](x) = \sup_{y \in B_\lambda^x} f(y) = f(x) + \lambda |tg\ \alpha| + \lambda\ \varepsilon(\lambda)$$

$$[f \ominus B_\lambda](x) = \inf_{y \in B_\lambda^x} f(y) = f(x) - \lambda |tg\ \alpha| + \lambda\ \varepsilon'(\lambda)$$

ε et ε' étant des termes tendant vers 0 avec λ.

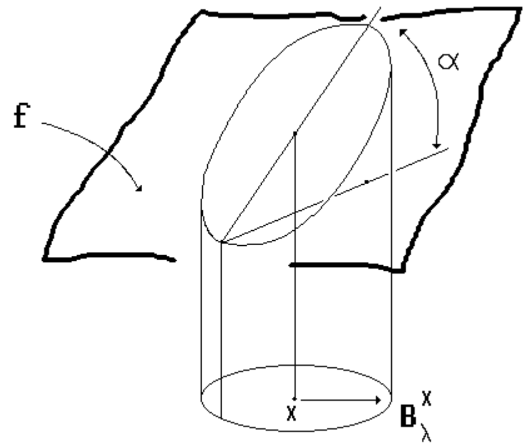


Figure II-2
Calcul du gradient

On a donc :

$$[f \oplus B_\lambda](x) - [f \ominus B_\lambda](x) = 2\lambda|\text{tg } \alpha| + \lambda (\varepsilon(\lambda) + \varepsilon(\lambda))$$

d'où :

$$g(x) = |\text{tg } \alpha| = |\overrightarrow{\text{grad}}\ f|(x)$$

Lorsque f n'est pas partout continuement dérivable parce qu'elle présente des sauts, le gradient morphologique correspond encore à la dérivée de f mais au sens des *distributions* et non plus des fonctions ([78]). Vérifions-le dans un cas simple : f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continuement dérivable partout sauf au point x_o, où elle présente un saut de hauteur σ_o. On supposera de plus que les dérivées à droite et à gauche du point-origine sont identiques.

On a alors :

$$[f \oplus B_\lambda](x_o) - [f \ominus B_\lambda](x_o) \simeq \sigma_o + 2\lambda\ |\overrightarrow{\text{grad}}\ f|(x_o)$$

Mais ceci est vrai également pour tout point y appartenant à la boule B_λ implantée en x_o. Si φ est une fonction-test quelconque, on peut écrire :

$$<g_\lambda,\varphi> = \int g_\lambda(x)\ \varphi(x)\ dx$$

$$= \int |\vec{\mathrm{grad}}\ f|(x)\ \varphi(x)\ dx + \int_{x_0-\lambda}^{x_0+\lambda} \frac{\sigma_0\ \varphi(x)}{2\lambda}\ dx$$

Soit :

$$g,\varphi> = \lim_{\lambda\to 0} <g_\lambda,\varphi> = <|\vec{\mathrm{grad}}\ f|,\ \varphi> + \sigma_0\ \varphi(x_0)$$

Or : $\varphi(x_o) = <\delta_{x_o},\varphi>$, où δ_{x_o} est la distribution de Dirac au point x_o.

Le gradient morphologique est donc bien égal à la distribution :

$$g = \sigma_o\ \delta_{x_o} + |\vec{\mathrm{grad}}\ f|$$

Cette formulation est également valable dans $\mathbb{R}^2$ si la fonction f est continuement différentiable partout sauf peut-être le long d'une courbe régulière S (c'est-à-dire admettant une normale en tout point) où elle peut présenter un saut de hauteur σ_o. On montre en effet que, sur ce modèle de fonction, les dérivées partielles de f au sens des distributions sont la somme des dérivées usuelles et d'une distribution de Dirac sur S de coefficient égal à $\sigma_o \cos\ \theta_i$, où θ_i est l'angle de l'axe des x_i avec la normale à S. Le module du gradient sera alors la somme du terme régulier et d'une distribution de Dirac de coefficient σ_o.

Le gradient morphologique apparaît alors comme une mesure dont l'intégrale d'espace permet la généralisation à des images à teintes de gris de la notion de *rose des directions* (SERRA, [83]).

Le gradient morphologique, dans sa formulation la plus simple, est facile à calculer. De plus, il est général, et pas seulement limité à l'espace à une ou deux dimensions. On verra plus loin (cf. chapitre 6) l'usage de gradients morphologiques tridimensionnels. La définition de ce gradient sera également valable sur des espaces particuliers pourvu qu'on soit capable de définir sur ces espaces les opérations de dilatation et d'érosion ([28], [89]).

I-2) Digitalisation du gradient et améliorations

La simplicité du gradient morphologique fait qu'il suffit amplement dans la plupart des cas. Cependant, il n'est pas sans défauts. Le premier d'entre eux est qu'il permet d'obtenir seulement le *module* et non l'*azimut*. L'azimut du gradient est la direction, dans le plan horizontal, du vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\mathbf{(f)}$. Pour le calculer, deux approches sont possibles. La première et la plus classique consiste à calculer les dérivées partielles de f dans deux directions perpendiculaires. L'azimut θ du gradient au point x peut s'écrire :

$$\theta = \text{Arc tg} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} / \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)$$

(θ est l'angle par rapport à la direction $\vec{x}_1$).

La deuxième approche est de définir l'azimut dans les directions de la trame de digitalisation. On pourrait bien sûr classer les différents azimuts calculés par la première approche en autant de secteurs angulaires qu'il existe de directions sur la trame (6 en hexagonal, 8 en carré). Il existe cependant une méthode plus fine prenant mieux en compte la configuration locale de la pente au voisinage d'un point. Avant de décrire davantage cette méthode, définissons le gradient morphologique d'une fonction f dans la direction α :

$$g^{\alpha}(f) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{(f \oplus L_{\lambda}^{\alpha}) - (f \ominus L_{\lambda}^{\alpha})}{2\lambda}$$

où L_{λ}^{α} est un segment de longueur λ dans la direction α.

Sa version digitale est :

$$g^{\alpha}(f) = (f \oplus L^{\alpha}) - (f \ominus L^{\alpha})$$

L^{α} est le segment élémentaire dans la direction α de la trame.

Le module du gradient peut alors s'écrire (ce gradient est différent du gradient défini par le disque B) :

$$g(f) = \sup_{\alpha} (g^{\alpha}(f))$$

Quant à l'azimut θ, il correspond à la direction α_o telle que :

$$g(f) = g^{\alpha_\circ}(f)$$

C'est la direction correspondant au gradient directionnel le plus élevé. Il y aurait donc six valeurs possibles pour l'azimut en trame hexagonale, huit en trame carrée. Cependant, il peut arriver que plusieurs directions de gradients directionnels fournissent des valeurs maximales. Ce phénomène est gênant car, par définition, le vecteur gradient est unique en tout point de l'image. Il faut donc corriger l'image brute des azimuts obtenue par simple détection de la ou des directions de plus fort gradient directionnel. Mais avant d'aborder cette correction, examinons un autre défaut du gradient morphologique et la façon d'y remédier. En effet, le calcul du module du gradient à l'aide de simples érosions et dilatations peut entraîner quelques artefacts notamment lorsque la fonction f présente des maxima ou des minima ponctuels (Figure II-3). Dans ce cas le gradient peut ne pas être nul. Pour pallier cet inconvénient, on préfère définir les gradients directionnels à l'aide d'épaississements et d'amincissements.

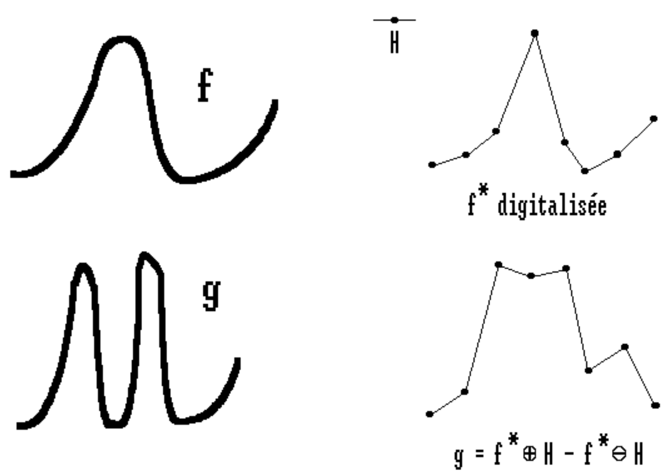


Figure II-3

Le gradient morphologique et ses limites

Soit dans la direction α deux points situés de part et d'autre d'un point origine et à la distance unité de ce point. Ces points désignés par T_1 et T_2 constituent un élément structurant biphasé $T_\alpha = (T_1,T_2)_\alpha$. On définit alors le *gradient directionnel* dans la direction α (Figure II-4) par :

$$g^\alpha(f) = (f \odot T_\alpha) - (f \circ T_\alpha)$$

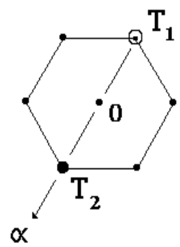


Figure II-4

Elément structurant utilisé pour les gradients directionnels

Dans cette formulation, l'érosion et la dilatation ont été remplacées par l'amincissement et l'épaississement. De cette façon, si le point central a une valeur plus élevée ou au contraire plus basse que tous les points de son voisinage immédiat, cette définition garantit que tous les gradients directionnels seront nuls.

Revenons alors à la détermination de l'azimut. Le gradient directionnel maximum peut donc, pour des raisons de digitalisation, apparaître dans plusieurs directions en même temps. Il faut donc calculer la direction la plus probable, en éliminant éventuellement les configurations aberrantes.

Pour cela, une première transformation permet de mettre en évidence toutes les directions pour lesquelles le gradient directionnel est maximum.

On notera que le calcul de ces gradients par épaississement/amincissement implique que trois directions au plus peuvent être extraites en trame hexagonale (quatre en trame carrée) (Figure II-5).

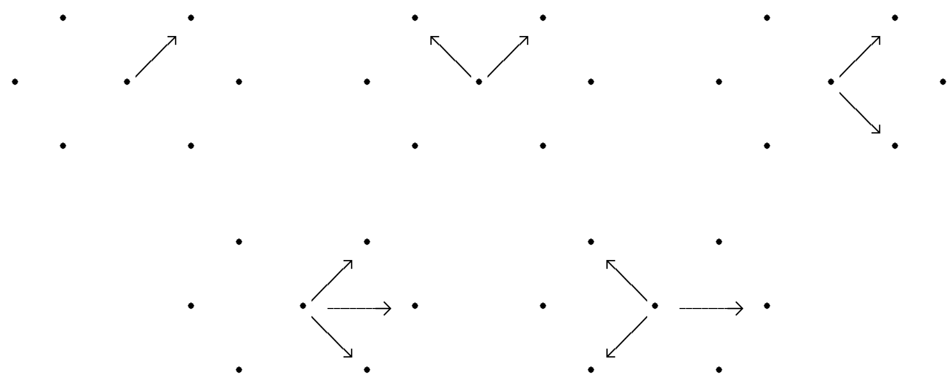
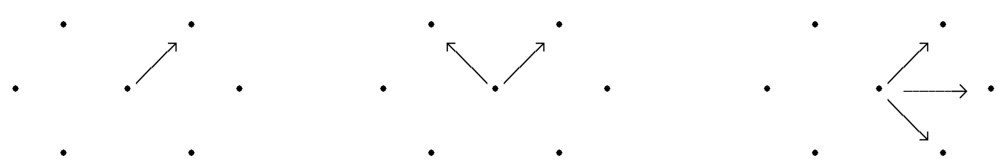


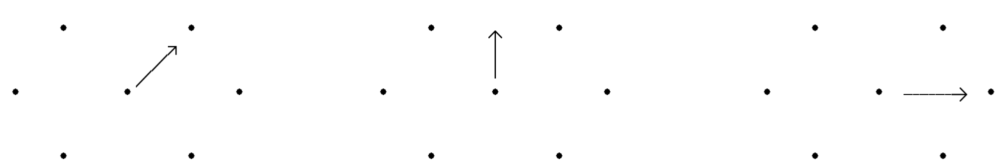
Figure II-5
Ensemble des configurations possibles
de gradients directionnels maximaux
(à une rotation près, et en trame hexagonale)

Ensuite, un tri des différentes configurations est effectué. Si les directions marquées ne sont pas adjacentes, alors le gradient est considéré comme nul. Si les directions rencontrées sont adjacentes, alors une direction unique est choisie, moyenne de toutes les directions présentes. En fait ce cas se résume aux trois situations ci-dessous (à une rotation près), en trame hexagonale :

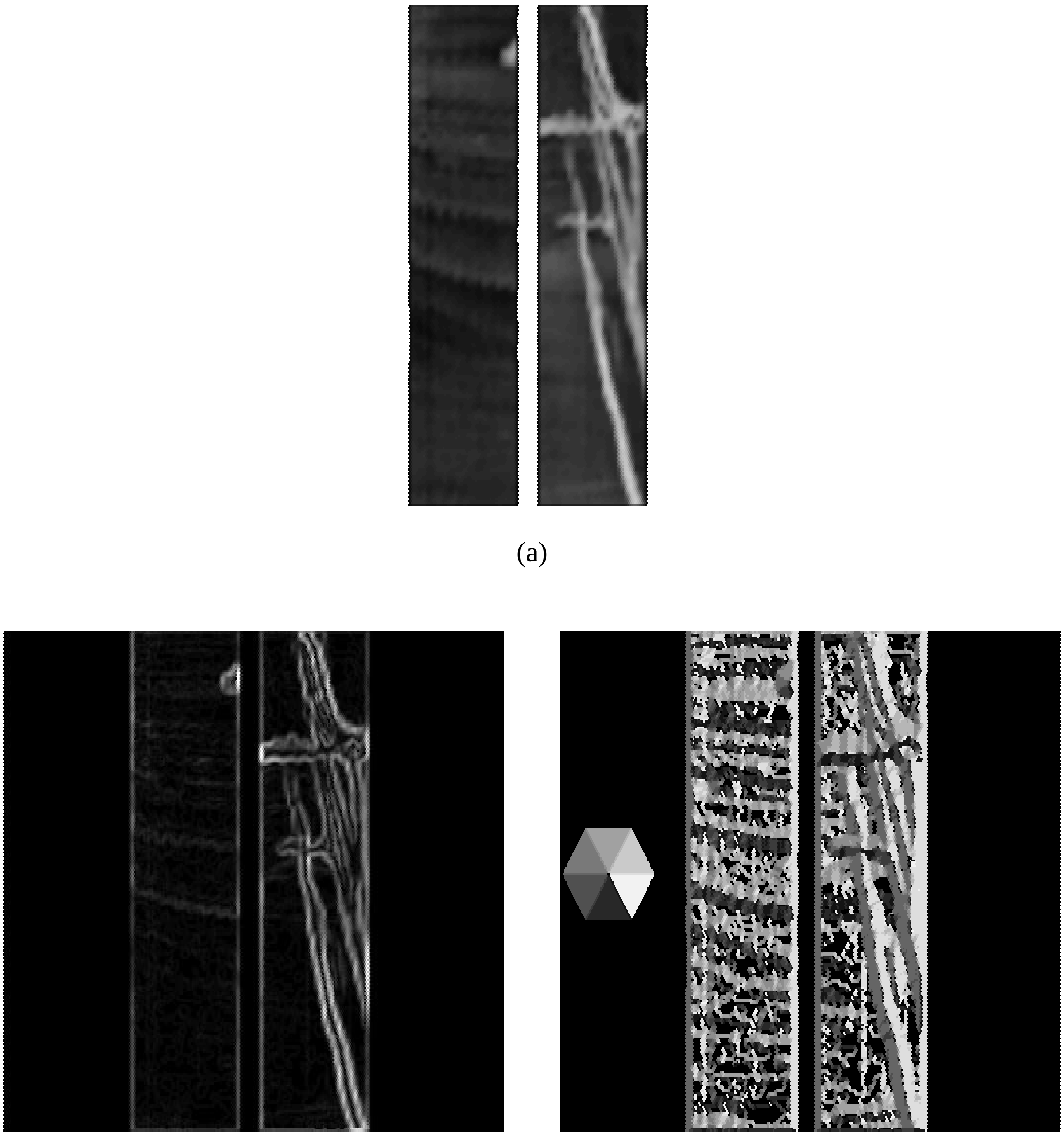
Directions initiales :



Directions sélectionnées :



La deuxième configuration est assez intéressante. En effet dans ce cas, la direction moyenne est une des directions conjuguées de la trame. C'est la raison pour laquelle l’azimut du gradient final est codé sur douze directions et non pas six. Chaque direction est codée par une valeur numérique prise dans l’intervalle [0,12], ou [0,16] en trame carrée. La



(a)

(b) (c)

Figure II-6

Module et azimut du gradient calculés par épaississement
(a) image originale, (b) module, (c) azimut

figure II-6 représente le module et l'azimut du gradient calculés selon ce procédé. La détermination de l'azimut en particulier est intéressante dans les problèmes de suivi de contour : la prise en compte de la configuration locale du graphe de f permet un contrôle plus précis des algorithmes de suivi (BEUCHER, [09]). De plus, l'azimut définit un graphe orienté sur le domaine de définition de la fonction. On peut alors utiliser ce graphe de fléchage soit pour définir des transformations dépendant de la direction des structures, soit directement en recherchant certaines configurations représentatives de lignes caractéristiques sur la surface topographique dessinée par le graphe de f (lignes de crêtes, thalwegs,...).

D'autre part, la mise en évidence correcte des minima de gradient est de première importance dans les opérations de segmentation d'image décrites dans ce mémoire.

D'autres opérateurs de contraste peuvent être définis à partir des gradients morphologiques interne et externe, g^+ et g^-. Citons pour mémoire :

- l'opérateur $\mathrm{Inf}(g^+,g^-)$ (LEE *et al*, [55]). Cet opérateur n'est pas très efficace lorsque le contraste est important. En effet, les supports de g^+ et g^- (c'est-à-dire l'ensemble des points de l'espace où les fonctions sont strictement positives) sont relativement disjoints.

- le *Laplacien morphologique*. C'est la transformée égale à $(g^+ - g^-)$(VAN VLIET, YOUNG, BECKERS, [88]). Cet opérateur produit une image qui n'est pas uniquement positive ou nulle, et très semblable au Laplacien classique d'une fonction f(x,y) défini comme :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

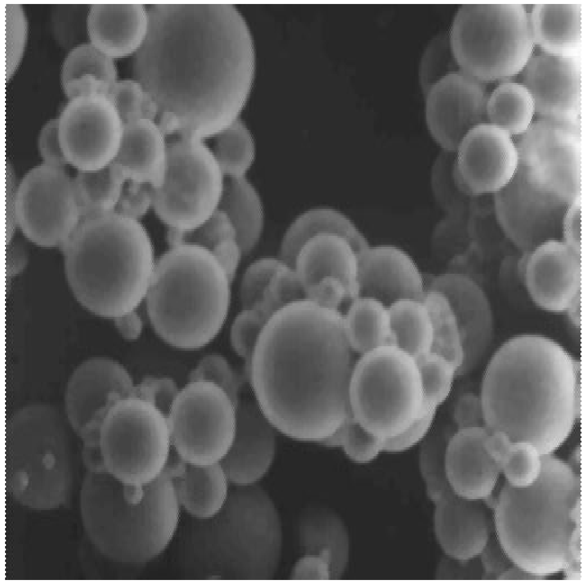
En fait, on peut montrer que si f est continuement dérivable jusqu'à l'ordre 2, l'égalité :

$$g^+(x,y) - g^-(x,y) = 2\ \Delta f(x,y)$$

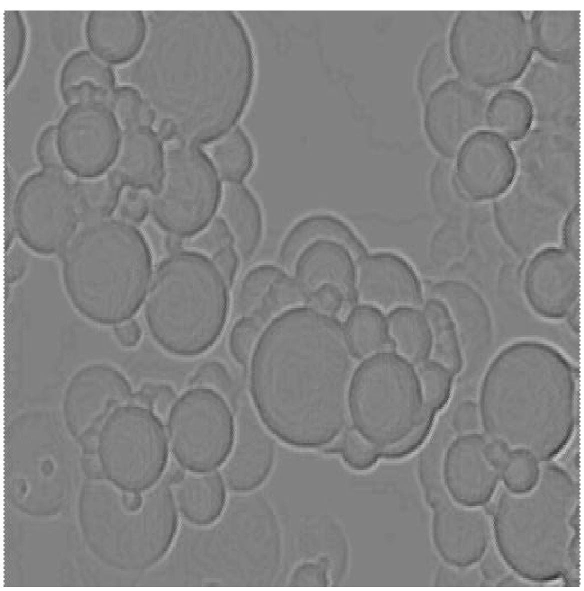
est vérifiée.

Cet opérateur peut être utilisé de façon similaire à l'opérateur de

Laplacien classique pour la recherche des contours, en détectant ses passages par zéro (Figure II-7).



(a)



(b) (c)

Figure II-7

Image originale (a), Laplacien morphologique (b) et mise en évidence de ses passages par zéro par LPE (voir chapitre 4) (c)

- l'opérateur $\mathrm{Sup}(g^+, g^-)$. Cet opérateur, tout comme l'opérateur de LEE présente des inconvénients, mais cette fois lorsque le gradient est faible. Il a tendance à marquer un contour par deux bandes assez importantes séparées par un liseré sombre.

II) LE GRADIENT MORPHOLOGIQUE REGULARISE

Classiquement, en analyse d'image, le gradient est utilisé avec circonspection. Il est en effet entaché de certains défauts, dont le plus important est certainement sa très grande sensibilité au bruit. Cette sensibilité vient du fait que le gradient est l'archétype de ce qu'on nomme un problème mal posé : une faible variation de la fonction f n'entraîne pas une faible variation du gradient. Au contraire, on peut même exhiber des fonctions aussi proches l'une de l'autre que l'on veut (moyennant la définition d'une distance entre fonctions appropriée) et dont les gradients sont aussi éloignés que l'on désire. Pour évacuer ce problème, une solution consiste à régulariser le gradient, ce qui revient en fait à le calculer sur une fonction f lissée. Une abondante littérature existe sur les techniques de *régularisation* utilisées en analyse d'image. L'opérateur le plus connu est certainement celui qui a été proposé par MARR ([59]) et HILDRETH ([42]). Il se compose d'un filtre passe-bande formé par la convolution du signal d'entrée par une gaussienne, suivi d'un filtre passe-haut constitué par le laplacien du résultat précédent.

On ne discutera pas ici des mérites de cette approche en segmentation d'image, réservant cela dans la seconde partie de ce mémoire. On se contentera de donner quelques algorithmes de régularisation du gradient morphologique. Ces algorithmes seront présentés de manière heuristique, en se laissant guider par leur comportement sur des exemples simples, et sans justifications théoriques précises.

II-1) Un premier algorithme de régularisation

Considérons un contour simple, constitué d'un palier de hauteur h et de largeur e (Figure II-8). La façon dont se fait la transition importe peu. On supposera simplement qu'elle se fait de manière monotone. La première difficulté que l'on rencontre lorsqu'on utilise le gradient sur ce type de contour est que l'on rend mal compte de la hauteur du saut. Il paraît alors naturel d'utiliser un *gradient "épais"* g_λ :

$$g_\lambda(f) = f \oplus \lambda B - f \ominus \lambda B$$

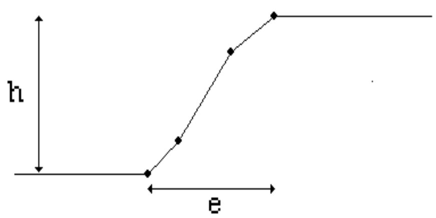


Figure II-8

Contour idéalisé de largeur e et hauteur h

Pour une taille λ de la boule proche de la largeur e du contour, $g_\lambda(f)$ prendra alors une valeur égale à la hauteur h de la transition. De plus, l'utilisation d'une boule de taille λ aura pour effet de lisser spatialement le contour. Cependant cette simple transformation a de nombreux inconvénients, en particulier de fournir des contours épais, et surtout d'être paramétrique. La largeur du contour est généralement inconnue, il est donc difficile de trouver la taille λ de la transformation appropriée. Le premier inconvénient peut être contourné en effectuant une érosion de g_λ. On peut en effet montrer que :

$$\forall\ \lambda_1 \geq \lambda_2,\ \forall\ f,\ g_{\lambda_1}(f) \geq g_{\lambda_2}(f)$$

Démontrons cette inégalité pour chaque demi-gradient :

$$g^-_{\lambda_1}(f) = f - f \ominus \lambda_1 B \geq f - f \ominus \lambda_2 B = g^-_{\lambda_2}(f)$$

car $f \ominus \lambda_1 B \leq f \ominus \lambda_2 B$ (anti-extensivité de l'érosion par une boule).

De la même façon :

$$g^+_{\lambda_1}(f) = f \oplus \lambda_1 B - f \geq f \oplus \lambda_1 B - f = g^+_{\lambda_2}(f)$$

ce qui démontre l'inégalité précitée.

Bien plus, on peut même montrer que :

$$\forall \ \lambda_1 \geq \lambda_2, \ \forall \ f, \quad g_{\lambda_1}(f) \ominus (\lambda_1 - \lambda_2)B \geq g_{\lambda_2}(f)$$

Démontrons-le pour simplifier dans le cas digital, en écrivant le seuil au niveau i de $g_{\lambda_1}(f)$ (cf. chapitre 1) :

$$X_i[g_{\lambda_1}(f)] = \bigcup_j [(X_{i+j}(f) \oplus \lambda_1 B) \cap (X^c_{j+1}(f) \oplus \lambda_1 B)]$$

où $X_{i+j}(f)$ est le seuil au niveau i+j de f.

Ecrivons alors le seuil de $g_{\lambda_1}(f) \ominus (\lambda_1 - \lambda_2)B$:

$$X_i[g_{\lambda_1}(f) \ominus (\lambda_1 - \lambda_2)B] = X_i[g_{\lambda_1}(f)] \ominus (\lambda_1 - \lambda_2)B$$

Soit :

$$X_i[g_{\lambda_1}(f)] \ominus (\lambda_1 - \lambda_2)B = \left(\bigcup_j [X_{i+j}(f) \oplus \lambda_1 B) \cap (X^c_{j+1}(f) \oplus \lambda_1 B)]\right) \ominus (\lambda_1 - \lambda_2)B$$

Le deuxième membre, érodé d'une union contient l'union des érodés, soit :

$$X_i[g_{\lambda_1}(f)] \ominus (\lambda_1 - \lambda_2)B \supset \bigcup_j \begin{bmatrix} (X_{i+j}(f) \oplus \lambda_1 B \ominus (\lambda_1 - \lambda_2)B) \\ \cap \\ (X^c_{i+j}(f) \oplus \lambda_1 B \ominus (\lambda_1 - \lambda_2)B) \end{bmatrix}$$

$$\supset \bigcup_j \begin{bmatrix} (X_{i+j}(f) \oplus \lambda_2 B)^{(\lambda_1 - \lambda_2)B} \\ \cap \\ (X^c_{i+j}(f) \oplus \lambda_2 B)^{(\lambda_1 - \lambda_2)B} \end{bmatrix}$$

$$\supset \bigcup_j [(X_{i+j}(f) \oplus \lambda_2 B) \cap (X^c_{i+j}(f) \oplus \lambda_2 B)]$$

Le deuxième membre est le seuil au niveau i de $g_{\lambda_2}(f)$, ce qui démontre la proposition.

On peut donc écrire :

$$\forall\ \lambda_1 \geq \lambda_2,\quad g_{\lambda_1}(f) \ominus (\lambda_1 - 1)B \geq g_{\lambda_2}(f) \ominus (\lambda_2 - 1)B \geq g(f)$$

Cette transformation, croissante et régularisante, n'est cependant pas très pratique. Elle dépend d'un paramètre λ arbitraire, et de plus son comportement est loin d'être satisfaisant sur une image réelle. En effet, lorsque plusieurs contours apparaissent dans l'image, pour une taille λ de transformation du même ordre de grandeur que la distance séparant ces contours, un phénomène de "couplage" se produit, comme l'illustre la figure II-9. Dans ce cas, les rôles des opérateurs d'érosion et de dilatation dans le calcul de g_λ deviennent dissymétriques ce qui entraine l'apparition de contours apparents mal positionnés et dont l'épaisseur est plus importante que prévu.

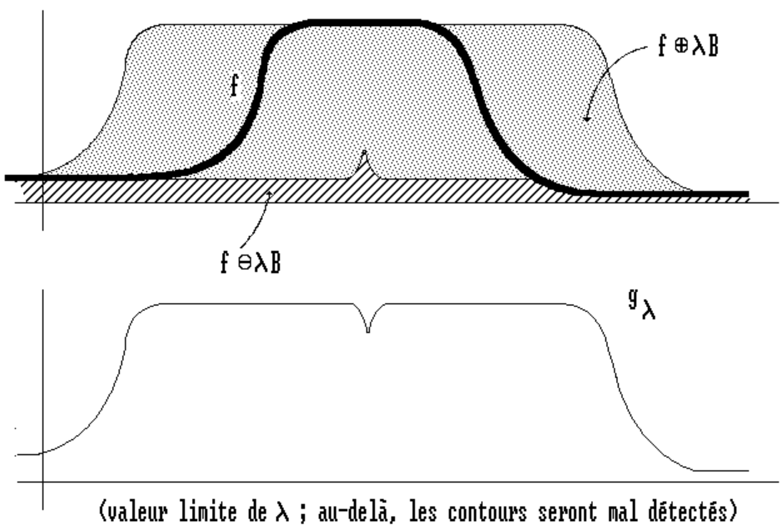


Figure II-9

Mauvaise détection de contours proches par le gradient épais

On peut cependant détecter ce phénomène et l'éliminer grâce à une *transformation "chapeau haut-de-forme"*. Cette transformation (MEYER, [64]) est définie comme la différence entre une fonction f et son ouvert de taille λ :

$$TH_\lambda(f) = f - (f)_{\lambda B}$$

Cette transformation, très puissante et très usitée, met en évidence dans une image les régions claires et dont l'épaisseur est inférieure à 2λ (pics et crêtes de l'image). Il est donc naturel d'utiliser cette transformation pour mettre en évidence l'interférence entre deux ou plusieurs contours dans une image. En effet, dans ce cas, la largeur du contour ne sera plus en rapport avec la taille λ de la transformée g_λ, mais augmentera au contraire du fait de la concaténation des contours. Un chapeau haut-de-forme de taille appropriée éliminera donc de la fonction g_λ les faux contours. La taille du chapeau haut-de-forme sera égale à λ. C'est en effet la taille qui garantit qu'un contour épais sera éliminé pour toutes les tailles λ de la transformée g_λ supérieures à la distance séparant les contours (même lorsque cette distance est très petite par rapport à λ). Il ne reste plus alors qu'à effectuer l'érosion de taille $(\lambda\text{-}1)$ pour obtenir un gradient, où seuls les contours régularisés et entourant des régions suffisamment larges sont conservées. En désignant par g^*_λ ce gradient, il s'écrit :

$$g^*_\lambda = TH_\lambda(g_\lambda) \ominus (\lambda\text{-}1)B$$

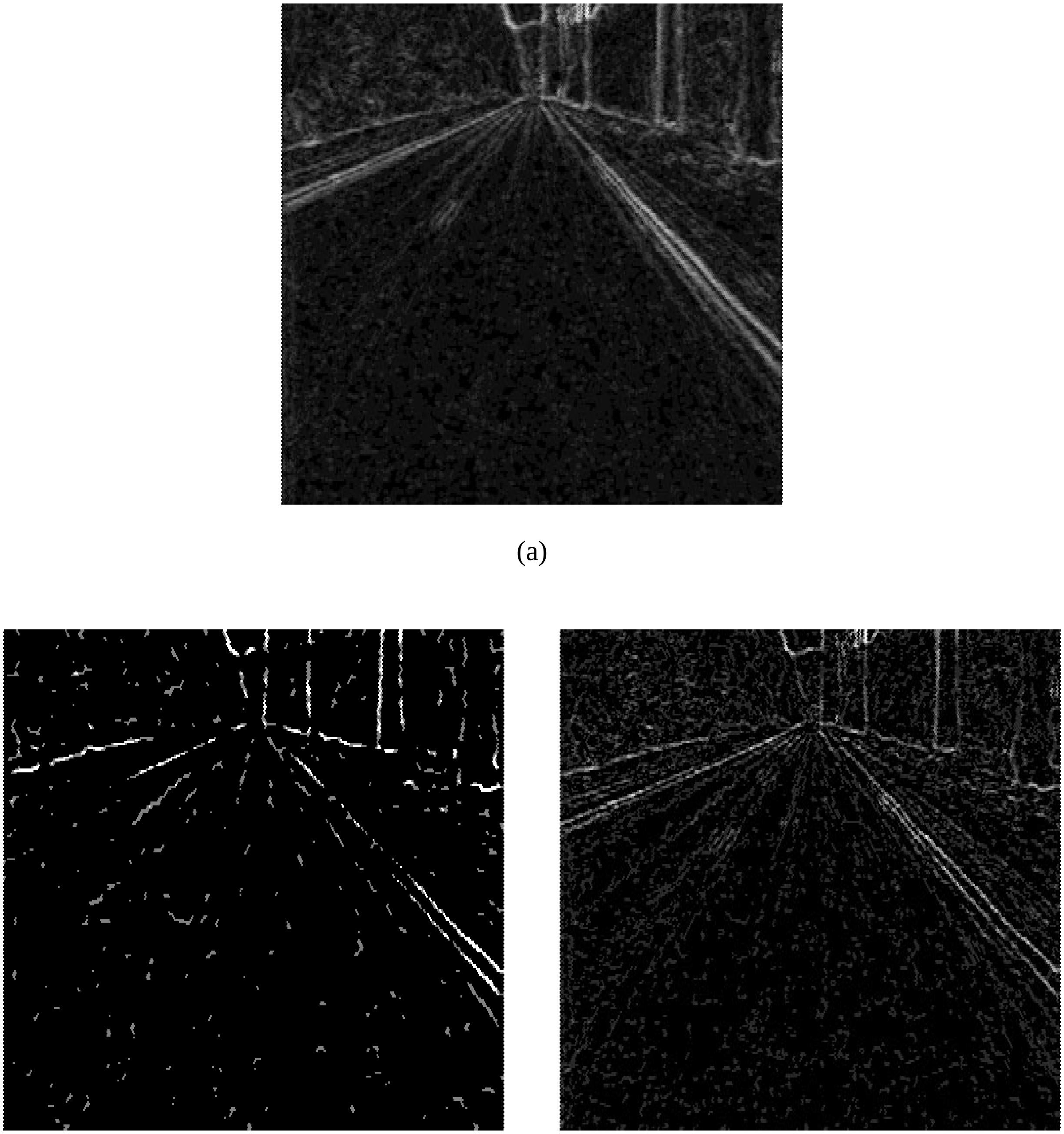
Cet opérateur a néanmoins le défaut d'altérer les valeurs des gradients lorsque les contours sont peu pentus. On peut y remédier en calculant un gradient régularisé égal à $g_\lambda \ominus (\lambda\text{-}1)B$ dans le support de g^*_λ (lieu des points de l'image où g^*_λ est positif), et nul ailleurs. On notera d'ailleurs que le support de g^*_λ est égal à l'érodé de taille $\lambda\text{-}1$ du support de $TH_\lambda(g_\lambda)$.

Le gradient g^*_λ peut notamment être utilisé pour établir une hiérarchie des contours d'une image basée à la fois sur l'épaisseur de ce contour et la taille des objets contourés. On peut ainsi construire une image des valeurs du paramètre λ correspondant en chaque point au moment où g^*_λ passe par son maximum :

$$r_1(x) = \lambda_1 \quad : \quad \lambda_1 = \mathrm{Inf}\ (\lambda : g^*_\lambda(x) \text{ maximum})$$

De la même façon, on peut calculer la valeur λ correspondant au moment où g^*_λ recommence à décroître :

$$r_2(x) = \lambda_2 \quad : \quad \lambda_2 = \mathrm{Sup}\ (\lambda : g^*_\lambda(x) \text{ maximum})$$



(a)

(b) (c)

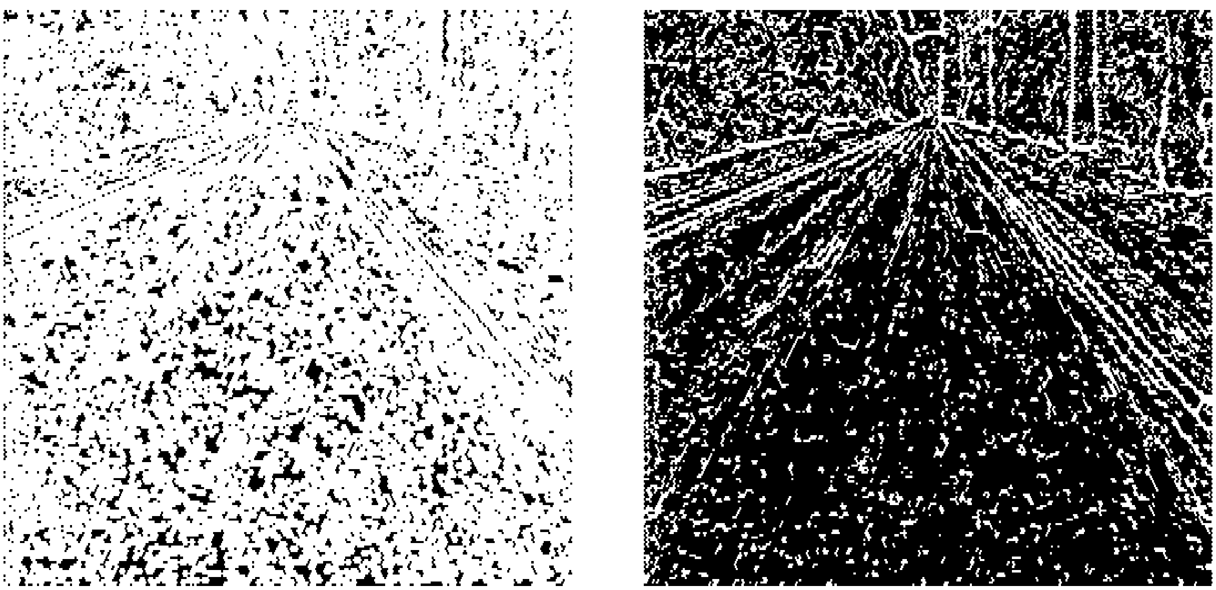
Figure II-10

Gradient morphologique (a), gradient régularisé de taille 3 (b), gradient g^* (c)

Le gradient maximum peut aussi être calculé. On obtient ainsi un *gradient régularisé* non paramétrique g^* :

$$g^* = \operatorname{Sup}_{\lambda} (g^*_{\lambda})$$

La figure II-10 représente ces diverses transformées. Le gradient g^* est beaucoup moins sensible au bruit que le gradient morphologique g. Un autre avantage de ce gradient est qu'il représente relativement bien les régions homogènes de l'image en fournissant des minima de g^* plus propres que ceux de g. En effet, une région homogène de l'image se caractérise par un niveau de gris constant, donc par un gradient nul ou faible. Le gradient morphologique non régularisé étant plus sensible au bruit aura donc tendance à marquer chaque région homogène non pas par un seul minimum mais par une assez grande quantité. Le gradient g^* est beaucoup plus performant, comme l'illustre la figure II-11. Cette caractéristique pourra être exploitée lors de la segmentation d'images comme on le verra dans la deuxième partie de cet ouvrage.



(a) (b)

Figure II-11

Comparaison entre les minima du gradient simple (a)
et ceux du gradient régularisé (b)

II-2) Autres algorithmes de régularisation

Signalons enfin une autre transformation construite à partir de g_λ et permettant comme la précédente de mieux marquer les régions homogènes de l'image en supprimant un défaut inhérent cette fois non pas au bruit mais à la digitalisation d'une image. Considérons pour cela une fonction f (Figure II-12) et son module de gradient. Ce gradient présente un minimum correspondant à la zone de faible pente de f. Si f est digitalisé, cette zone peu pentue apparaîtra comme une suite de terrasses en escalier. Le gradient correspondant présentera alors non plus un minimum mais plusieurs, ce qui produira, on le verra dans la deuxième partie, des fausses détections d'objets dans l'image.

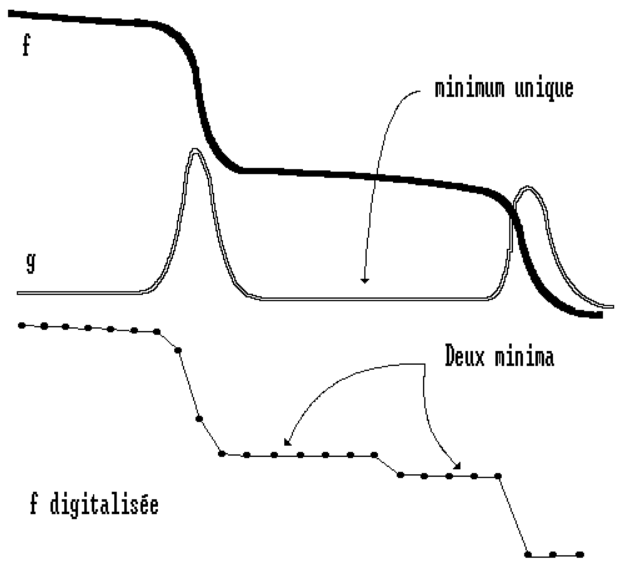


Figure II-12

Phénomène de marches d'escalier lors de la digitalisation

On peut éviter ce phénomène de multiple marquage en construisant la transformation :

$$\operatorname*{Sup}_{\lambda} \; [TH_{\lambda}(g_{\lambda})]_{(\lambda-1)B} = \operatorname*{Sup}_{\lambda} \; [g^{*}_{\lambda} \oplus (\lambda-1)B]$$

Cette transformation consiste à prendre en compte la zone d'influence du gradient régularisé g^{*}_{λ} en le dilatant, et ceci pour toutes les valeurs de λ. Ainsi, comme on le voit ci-dessous (Figure II-13), toutes les fois où un contour de faible amplitude sera dans la zone d'influence d'un contour plus contrasté, il aura tendance à être absorbé. La transformée finale ne doit être utilisée que pour la recherche des minima effectifs du gradient. On verra plus tard comment ces minima peuvent être utilisés dans le processus de segmentation.

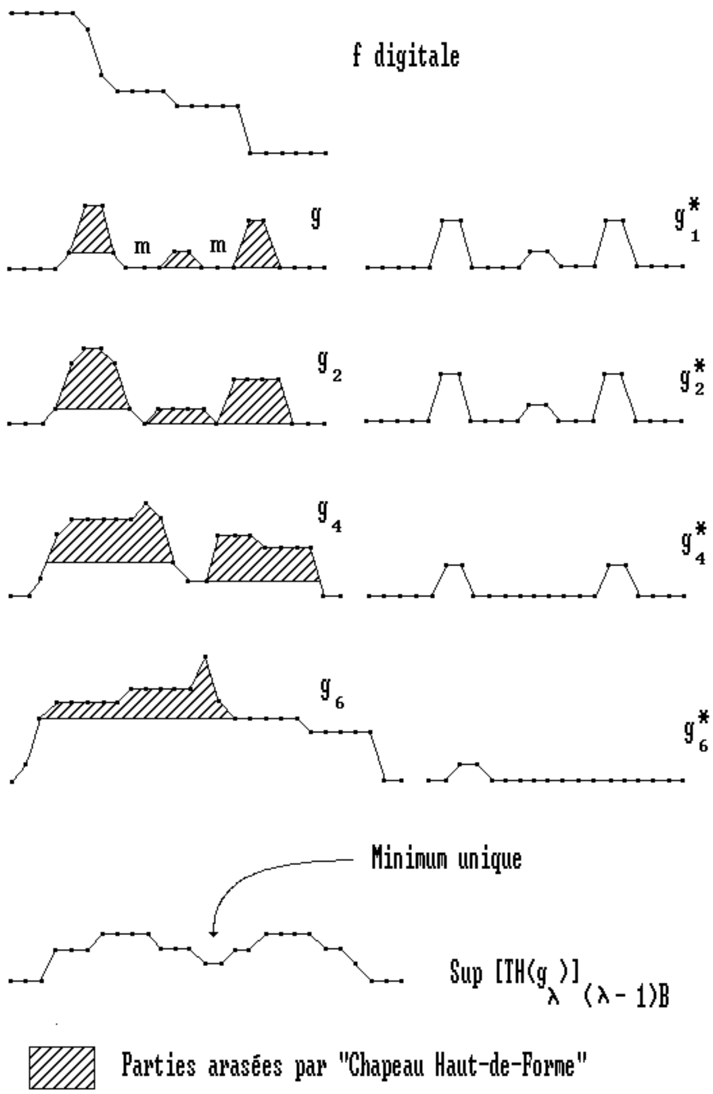


Figure II-13

Suppression des minima non significatifs du gradient

Tous ces algorithmes peuvent être définis également pour des gradients directionnels.

Cette présentation heuristique d'algorithmes de régularisation du gradient montre la possibilité de définir à l'aide d'opérateurs non linéaires, des transformées analogues à celles qui existent en analyse d'images classique. On remarquera qu'ils sont basés sur un gradient épais agissant comme un filtre passe-bas et sur la transformée chapeau haut-de-forme similaire à un filtre passe-haut.

Si ces gradients morphologiques régularisés existent, ils sont en fait peu utilisés, du moins en tant que tels. En fait, et comme on le verra au chapitre 7, seules certaines caractéristiques de ces gradients sont prises en compte, les minima en particulier, pour marquer dans certaines images complexes les objets à segmenter. Ce gradient est en fait régional, parce qu'il est épais, et hiérarchique, parce que les contours les moins pertinents ont tendance à être éliminés. Cependant, on n'a pour le moment introduit dans la définition de cette régularisation aucun critère de connexité des minima. C'est pourquoi ces algorithmes de régularisation font souvent double emploi avec certaines transformées qui seront introduites par la suite, transformées souvent plus robustes que ces gradients régularisés parce qu'elles tiennent compte de la connexité.

CHAPITRE 3

TRANSFORMATIONS GÉODÉSIQUES

INTRODUCTION

Il existe en morphologie mathématique différentes manières de définir des éléments structurants. La plus classique consiste à les définir par leur géométrie : c'est notamment le cas lorsqu'il s'agit de formes simples (disques, segments, etc...). On peut également les définir en décrivant de façon exhaustive les points qui les composent. Cette définition ensembliste est utilisée dans la description digitale de ces éléments structurants. On peut enfin utiliser une métrique pour décrire les relations de voisinage existant entre les différents points d'un élément structurant. Cette approche conduit à des transformations dont l'intérêt dépend essentiellement de la métrique (distance) choisie. En particulier, l'utilisation de la distance géodésique fournit en morphologie binaire des transformations élémentaires (érosion, dilatation) du plus grand intérêt. Nous rappellerons la définition de ces transformations et nous verrons en quoi elles sont intéressantes à-travers notamment certaines applications. L'extension de ces notions aux images à teintes de gris sera décrite dans un deuxième temps. C'est dans ces transformations géodésiques numériques que se situent les instruments de base les plus performants dans la segmentation et la désignation des objets constitutifs d'une image. Enfin, on abordera la généralisation des transformées géodésiques à des espaces métriques plus complexes. Cette dernière approche apporte à certaines transformations une plus grande souplesse. De plus, elle a des vertus éclairantes quant-aux distances sous-jacentes à des transformations comme la ligne de partage des eaux.

I) GEODESIE

I-1) Distance géodésique

La notion de chemin ou d'arc a déjà été utilisée pour définir les transformations homotopiques. Elle va être reprise ici pour définir une distance associée à un ensemble X de $\mathbb{R}^2$, de forme quelconque mais connexe par arcs. Soient x et y, deux points de X. Il existe un certain nombre de chemins dans X reliant x et y. Parmi eux, le chemin de longueur minimale est appelé *chemin géodésique* et cette longueur est notée $d_X(x,y)$:

$$d_X(x,y) = \inf\{\ell(C_{xy}) : C_{xy}, \text{ chemin reliant x à y dans X}\}$$

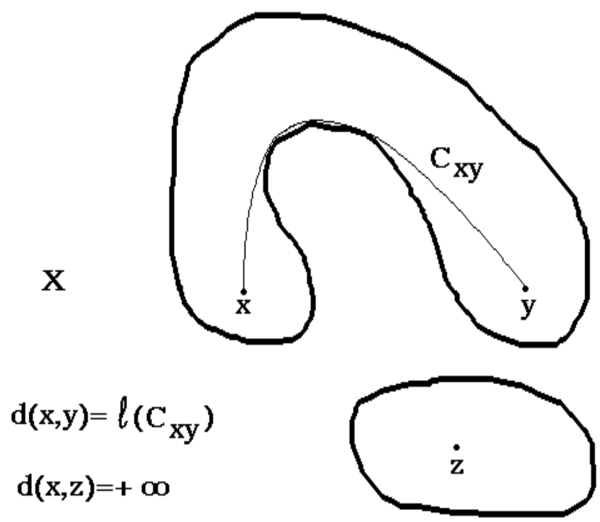


Figure III-1
Définition de la distance géodésique

Si X n'est pas connexe, mais quelconque, il se peut que x et y appartiennent à des composantes connexes différentes de X. Dans ce cas, il n'existe aucun chemin inclus dans X et reliant x et y, et on posera par convention $d_X(x,y) = +\infty$ (Figure III-1). On peut démontrer sans difficultés que la fonction $d_X(x,y)$ satisfait à toutes les propriétés d'une distance :

1) $d_X(x,y) \geq 0$ et $d_X(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2) $d_X(x,y) = d_X(y,x)$
3) $d_X(x,z) \leq d_X(x,y) + d_X(y,z)$

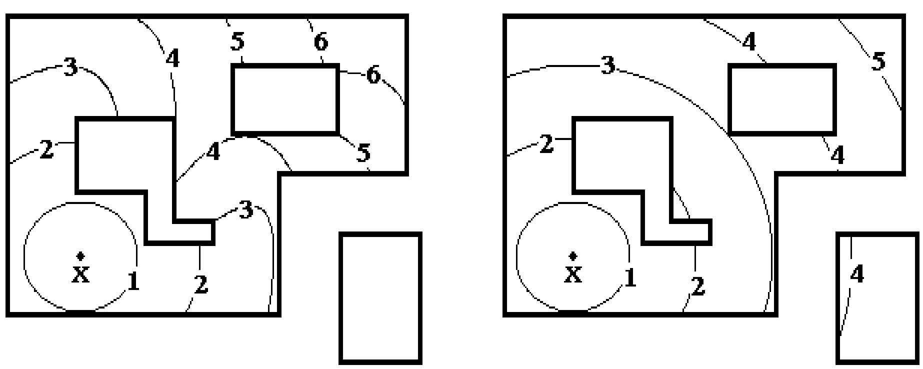
d_X est appelée la *fonction distance géodésique*. On peut alors définir la *boule géodésique* de rayon r et centrée en $x \in X$.

C'est l'ensemble $B_X(x,r)$ défini par :

$$B_X(x,r) = \{y \in X : d_X(x,y) \leq r\}$$

(il s'agit en l'occurrence d'une boule fermée).

On comparera sur la figure III-2 les boules $B_X(x,r)$ et $B(x,r)$ de centre x et de rayon r relatives à la distance géodésique d_X et à la distance euclidienne d de l'espace $\mathbb{R}^2$ contenant X. On a évidemment $d \leq d_X$ (LANTUEJOUL, BEUCHER, 1979, [49]).



(a) (b)

Figure III-2

Distances géodésique (a) et euclidienne (b)

La distance géodésique est donc définie par rapport et à l'intérieur d'un ensemble X que nous désignerons désormais par l'*espace géodésique* X. Cette distance est en fait très commune. C'est notamment celle qu'on utilise lorsqu'on est assujetti à se déplacer dans n'importe quel univers qui n'est pas entièrement accessible (un bâtiment avec des murs et des portes par exemple). Elle présente de plus l'avantage d'être bien adaptée à la formulation de problèmes liés à la connexité. En effet, et pourvu que l'espace géodésique X respecte certaines conditions, on peut associer facilement à tout point x de X la *composante connexe* C(x) le contenant : c'est l'ensemble des points de X à une distance géodésique finie de x :

$$C(x) = \{y \in X : d_X(x,y) \text{ finie}\}$$

I-2) Transformations morphologiques géodésiques

On peut dans un espace géodésique X muni d'une métrique d_X généraliser les transformations élémentaires isotropes (c'est-à-dire celles qui utilisent des boules euclidiennes). On définira ainsi l'*érosion* et la *dilatation géodésique* d'un ensemble Y inclus dans X par une boule géodésique de rayon r. En notant $E_X^r(Y)$, l'érodé géodésique de Y, on aura :

$$E_X^r(Y) = \{y \in X : B_X(y,r) \subset Y\}$$

De la même façon, le dilaté géodésique sera défini par :

$$D_X^r(Y) = \{y \in X : B_X(y,r) \cap Y \neq \emptyset\}$$

Ces définitions sont analogues aux définitions des érodés et dilatés euclidiens par des boules : l'érodé par exemple est constitué des points de X qui sont centres d'une boule géodésique incluse dans Y (Figure III-3). En particulier, l'érosion et la dilatation géodésiques sont des opérations duales par rapport à la complémentation dans X :

$$E_X^r(X/Y) = X \,/\, D_X^r(Y)$$

où le symbole / représente la différence ensembliste.

Le résultat des transformations géodésiques est toujours inclus dans l'espace géodésique X. De plus, les éléments structurants utilisés dans ces transformations étant des boules, cette gamme d'éléments peut paraître très pauvre comparée à ceux dont on dispose pour réaliser les opérations euclidiennes. En fait, cette pauvreté n'est qu'apparente. En effet, les boules géodésiques ne sont pas rigides comme les boules euclidiennes, mais au contraire, dépendent en chaque point de la forme locale de l'espace X.

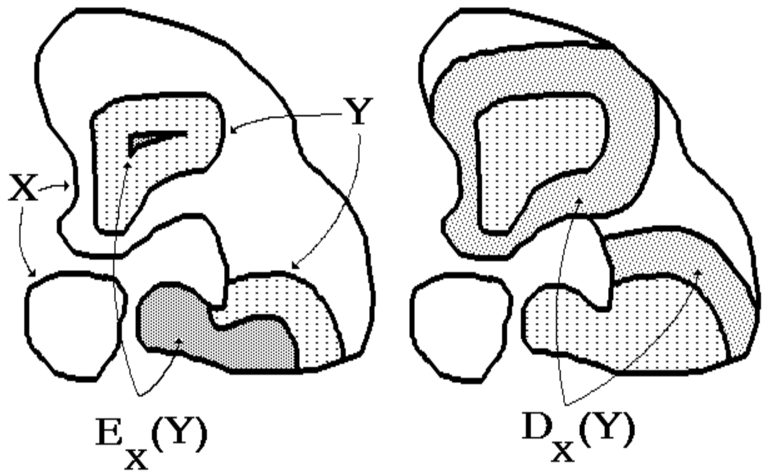


Figure III-3

Erosion et dilatation géodésiques d'un ensemble Y dans X

I-3) Transformations géodésiques digitales

Lorsque l'espace X est digital, la définition de la boule géodésique élémentaire implantée en x est simple : elle est constituée de x et de tous les points adjacents à x inclus dans X. En désignant par H la boule digitale élémentaire euclidienne, (hexagone en trame hexagonale), la boule géodésique implantée en $x \subset X$ s'écrit :

$$H_X(x) = H(x) \cap X$$

H(x) est l'hexagone implanté en x.

La dilatation géodésique élémentaire d'un ensemble Y inclus dans X s'écrit alors :

$$D_X^1(Y) = (Y \oplus H) \cap X$$

La dilatation de taille n s'obtient par *itération* de la transformation élémentaire :

$$D_X^n(Y) = \underbrace{D_X^1 \circ D_X^1 \circ \ldots\ldots. \circ D_X^1(Y)}_{\text{n fois}}$$

et non par une dilatation euclidienne de taille n suivie par l'intersection avec l'espace géodésique X. En effet, en digital, la distance géodésique est localement confondue avec la distance euclidienne. Mais cette correspondance n'est valable que pour la distance élémentaire.

L'érosion géodésique digitale s'obtient par dualité :

$$\begin{aligned} E_X^1 &= X \;/\; D_X^1(X/Y) \\ &= X \cap [((X/Y) \oplus H) \cap X]^c \\ &= X \cap [((X/Y)^c \ominus H) \cup X^c] \\ &= [(Y \cup X^c) \ominus H] \cap X \end{aligned}$$

L'érodé de taille n s'obtient également par itérations de l'érosion élémentaire. On remarquera la complexité plus grande de la formule de l'érosion. En particulier, le fait d'utiliser le complémentaire de l'espace géodésique X peut entraîner des difficultés d'implantation.

I-4) Autres transformations géodésiques

On peut, à partir des deux opérations de base, envisager de construire en morphologie géodésique des transformations plus complexes, comme on le fait en morphologie euclidienne. Si la définition de l'ouverture et de la fermeture géodésiques ne pose pas de problème particulier, il n'en est pas de même pour des opérateurs comme l'épaississement et l'amincissement. En effet, les éléments structurants étant des boules géodésiques, cette pauvreté de choix semble en contradiction avec l'élaboration d'amincissements et d'épaississements géodésiques non triviaux si l'on en juge par les divers éléments structurants rencontrés en euclidien. Remarquons également que, en géodésie, la notion de direction ayant disparu, il sera impossible de définir des séquences de transformations utilisant les différentes rotations des éléments structurants. Seuls seront utilisables en morphologie géodésique des éléments structurants définis à l'aide de boules géodésiques ou en termes de distance.

Illustrons notre propos à l'aide d'un exemple. Soit l'élément T d'origine x défini dans l'espace géodésique X par :

$$T = \{B_X(y,r),\ d_X(y,x) \leq \ell\}$$

Cet élément structurant est en fait une famille d'éléments structurants géodésiques : il regroupe toutes les boules géodésiques de rayon r situées à une distance géodésique du point x plus petite ou égale à ℓ. On peut alors définir la dilatation et l'érosion géodésiques d'un ensemble Y inclus dans X par T. Pour la dilatation, notée $D_X(Y;T)$:

$$D_X(Y;T) = \{z \in X : \exists\ y,\ d_X(z,y) \leq \ell \ \text{ et } \ B_X(y,r) \cap Y \neq \emptyset\}$$

Tous les points y vérifiant la condition ci-dessus appartiennent au dilaté géodésique $D^r_X(Y)$. On peut écrire :

$$D_X(Y;T) = D^{\ell}_X \circ D^r_X(Y) = D^{\ell+r}_X(Y)$$

L'expression de la dilatation par T est donc simple. Ecrivons de même l'érosion $E_X(Y;T)$ (ce n'est pas l'opération duale de la précédente).

$$E_X(Y,T) = \{z \in X : \exists\ y,\ d_X(y,z) \leq \ell \ \text{ et } \ B_X(y,r) \subset Y\}$$

Les points y tels que $B_X(y,r) \subset Y$ sont les points de l'érodé géodésique $E^r_X(Y)$. On a :

$$E_X(Y;T) = D^{\ell}_X \circ E^r_X(Y)$$

Cet érodé correspond donc à une union d'érosions. Sa définition est similaire à la définition de la transformation en tout ou rien par un ensemble d'éléments structurants telle qu'elle a été introduite au chapitre 1.

Ce type d'éléments structurants peut être utilisé pour définir des *transformations en tout ou rien*, des *amincissements* et des *épaississements* *géodésiques*. Ainsi en posant :

$$T_1 = \{B_X(y,r_1),\ d_X(y,x) \leq \ell_1\}$$

$$T_2 = \{B_X(y,r_2),\ d_X(y,x) \leq \ell_2\}$$

$$T = (T_1,T_2)$$

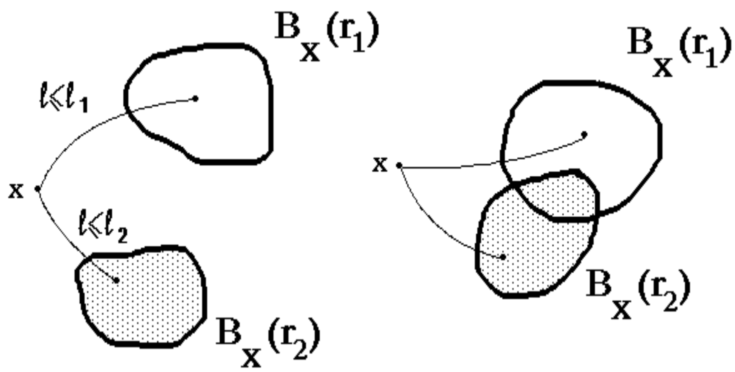


Figure III-4
Deux configurations possibles du même élément structurant géodésique

T_1 et T_2 sont deux éléments définis comme précédemment et de même origine x (Figure III-4). On a :

$$HMT_X(Y;T) = E_X(Y;T_1) \cap E_X(X/Y;T_2)$$

Et on peut définir de même l'amincissement et l'épaississement géodésiques par T :

$$O_X(Y;T) = Y \ / \ HMT_X(Y;T)$$
$$\Theta_X(Y;T) = Y \cup HMT_X(Y;T)$$

On remarquera que le squelette et le squelette par zones d'influence peuvent être transposées en géodésique. On a vu que le squelette par ouverture pouvait s'écrire sous la forme d'un amincissement par la famille d'élément $T_{a,b}$ définis par (cf. Chapitre 1) :

$$T_{a,b} = (B_a, L_b) \quad \forall\ a,b \in B$$

B_a, L_b sont respectivement les translatés dans les directions a et b d'une boule et d'un point. En géodésie, ces éléments peuvent s'écrire (version digitale) :

$$T = (T_1, T_2) \quad \text{avec}$$

$$T_1 = \{B_X(y,1),\ d_X(x,y) \leq 1\}$$

$$T_2 = \{y : d_X(x,y) \leq 1\}$$

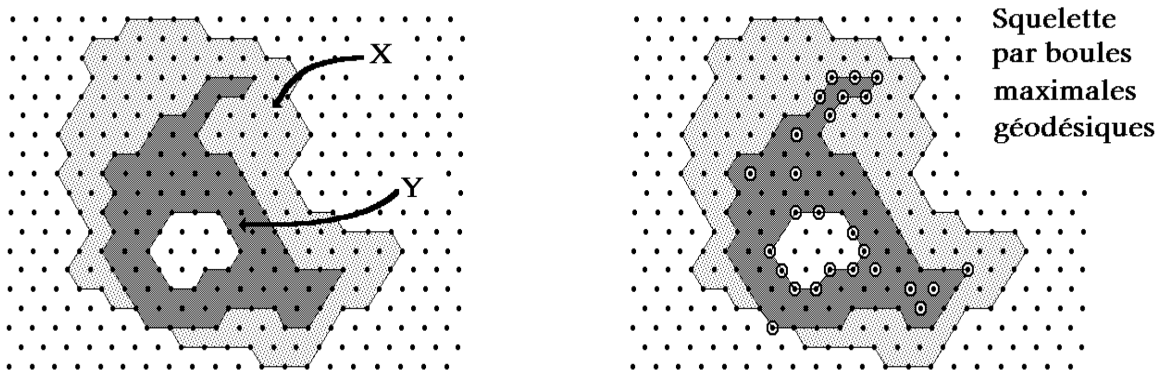


Figure III-5
Squelette géodésique par ouvertures, en trame hexagonale

L' amincissement d'un ensemble Y inclus dans un espace géodésique X s'écrit alors :

$$O_X(Y;T) = Y/\ [D_X(E_X(Y)) \cap D_X(X/Y)]$$

D_X et E_X désignent la dilatation et l'érosion géodésiques élémentaires. On obtient ainsi :

$$O_X(Y;T) = E_X(Y) \cup [Y \cap E_X(X/E_X(Y))]$$

soit :

$$O_X(Y;T) = E_X(Y) \cup [Y / D_X(E_X(Y)]$$

Cette formule est similaire à la formulation euclidienne de l'amincissement produisant le squelette par ouverture. La seule modification provient du fait que les érosions et dilatations géodésiques remplacent les transformations euclidiennes analogues. Cette transformation itérée produit le squelette de Y par boules géodésiques maximales (Figure III-5).

Remarquons une caractéristique importante des boules géodésiques. Une boule géodésique $B_X(y,r)$ de rayon r et implantée en un point y peut contenir une autre boule $B_X(z,r')$ de rayon r' et implantée en z même si r' > r. Cette propriété est illustrée par la figure III-6.

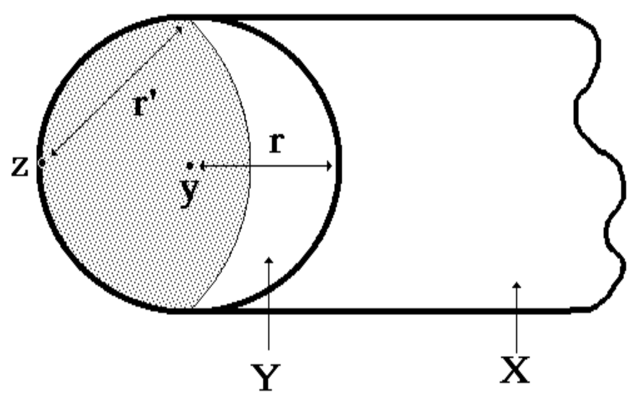


Figure III-6
Boules maximales géodésiques

Déterminons, en reprenant cet exemple, le *squelette géodésique* de Y. La figure III-7 représente les divers érodés géodésiques de Y, ainsi que le squelette formé par les résidus des ouverts géodésiques de ces différents érodés. On remarque que les points y et z appartiennent à $S_X(Y)$. Or la plus grande boule géodésique centrée en z est incluse dans la plus grande boule centrée en y. Cependant, la boule $B_X(y,r)$ n'est incluse dans aucune boule géodésique de rayon r' supérieur ou égal à r. C'est pourquoi elle peut être considérée comme maximale. Une boule géodésique de rayon r est donc maximale si et seulement si elle n'est incluse dans aucune autre boule géodésique de rayon $r' \geq r$.

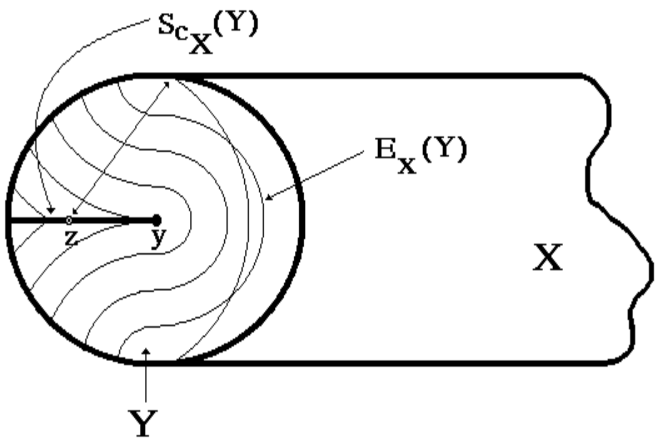


Figure III-7

Construction du squelette géodésique et caractérisation des boules maximales

Il est alors possible de définir une version connexe du squelette géodésique. Il suffit pour cela de reprendre les éléments structurants préservant la connexité du squelette euclidien, et d'en fournir une définition géodésique. Reprenons la formulation du squelette géodésique par ouvertures et exprimons-la à l'aide des opérateurs digitaux d'érosion et de dilatation. On a :

$$S_X(Y) = \lim_{n \to \infty} \{O_X(Y;T)\}^n$$

avec :

$$O_X(Y;T) = Y / \left[D_X(E_X(Y)) \cap D_X(X/Y)\right]$$

Soit :

$$O_X(Y;T) = Y \cap [(E_X(Y) \oplus H) \cap ((X/Y) \oplus H) \cap X]^c$$

$$= Y \cap \left[[(((Y \cup X^c) \ominus H) \cap X) \oplus H] \cap [(X/Y) \oplus H] \cap X\right]^c$$

Or le premier terme de l'expression entre crochets peut s'écrire :

$$(((Y \cup X^c) \ominus H) \cap X) \oplus H = \bigcup_{a \in H} [((Y \cup X^c) \ominus H) \cap X]_a$$

en écrivant la dilatation comme une union de translatés. Cela donne :

$$(((Y \cup X^c) \oplus H) \cap X) \oplus H = \bigcup_{a \in H} (((Y \cup X^c) \ominus H) \cap X) \ominus L_a$$

$$= \bigcup_{a \in H} [((Y \cup X^c) \ominus H \ominus L_a) \cap (X \ominus L_a)]$$

où L_a est le translaté d'un point dans la direction a.

$O_X(Y;T)$ s'écrit alors :

$$O_X(Y;T) = Y \cap \left[\left[\bigcup_{a \in H} [((Y \cup X^c) \ominus H \ominus L_a) \cap (X \ominus L_a)]\right] \cap [(X/Y) \oplus H]\right]^c$$

ou encore :

$$O_X(Y;T) = Y \cap \left[\bigcup_{a \in H} \left[((Y \cup X^c) \ominus H \ominus L_a) \cap (X/Y) \oplus H) \cap (X \ominus L_a)\right]\right]^c$$

Décomposons également $(X/Y) \oplus H$. On obtient :

$$(X/Y) \oplus H = \bigcup_{b \in H} [(X/Y)]_b = \bigcup_{b \in H} (X/Y) \ominus L_b$$

D'où :

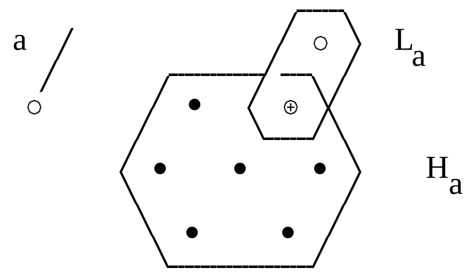
$$O_X(Y;T) = Y \cap \left[\bigcup_{a \in H}\left[\left[\bigcup_{b \in H} ((X/Y) \ominus L_b)\right] \cap (X \ominus L_a) \cap ((Y \cup X^c) \ominus H \ominus L_a)\right]\right]^c$$

Soit :

$$O_X(Y;T) = Y \cap \left[\bigcup_{a,b \in H}\left[((Y \cup X^c) \ominus (H \oplus L_a)) \cap ((Y \cup X^c)^c \ominus L_b) \cap (X \ominus L_a)\right]\right]^c$$

Cette formule représente presque l'amincissement euclidien de $(Y \cup X^c)$ par une famille d'éléments structurants $(H \oplus L_a,\ L_b)$. Il reste cependant les termes $(X \ominus L_a)$. Or cet amincissement produisant un squelette non connexe, on a vu (cf. chapitre 1) qu'on pouvait obtenir un squelette connexe en sélectionnant parmi les éléments structurants (H_a,L_b) un sous-ensemble préservant la connexité. Ce sous-ensemble est formé (en hexagonal) des configurations suivantes :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \bar{2} & & 0 & & \\ & 1 & & \mathbf{1} & & \bar{2} & \\ 1 & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & & & \end{array}$$



Ces configurations correspondent aux éléments structurants (H_a,L_a) pour lesquels il n'existe aucun point des résidus de l'ouvert (les points marqués 2) adjacents à l'origine.

En ne conservant des éléments $T = (H_a,L_b)$ que le sous-ensemble $T' = (H_a,L_a)$, l'amincissement géodésique s'écrit :

$$O_X(Y;T') = Y \cap \left[\bigcup_{a \in H} \left[((Y \cup X^c) \ominus H_a) \cap ((Y \cup X^c)^c \ominus L_a)\right] \right]^c$$

Cet amincissement géodésique peut donc être réalisé à l'aide d'amincissements euclidiens par la famille d'éléments $\mathcal{T} = \{(H_a,L_a), \forall\ a \in H\}$. Il ne reste alors qu'à tenir compte des résidus de l'ouvert géodésique, et l'algorithme de squelette géodésique connexe $S_{c_X}(Y)$ devient :

1) $Y_o = Y$

2) Calcul de $Z_i = (Y_i \cup X^c) * \mathcal{T}$ $\qquad \mathcal{T} = \{(H_a,L_a)\}$

3) Calcul des résidus R_i de Y_i par ouverture géodésique :
$$R_i = Y_i \,/\, [(((Y_i \cup X^c) \ominus H) \cap X) \oplus H]$$

4) Suppression des points de Z_i adjacents aux résidus :
$$Z_i = Z_i \,/\, (R_i \oplus H)$$

5) Calcul de Y_{i+1} :

$$Y_{i+1} = Y_i / Z_i$$

6) Si $Y_{i+1} \neq Y_i$, on recommence à partir du point (2)

7) Sinon $S_{C_X}(Y) = Y_{i+1}$

Un tel squelette est illustré à la figure III-8 sur la trame hexagonale. Il va sans dire que cet algorithme se transpose sans aucune modification à la trame carrée, et que, moyennant le choix de la famille d'éléments structurants adéquate, on peut définir de la même façon un squelette géodésique 4-connexe ou 8-connexe.

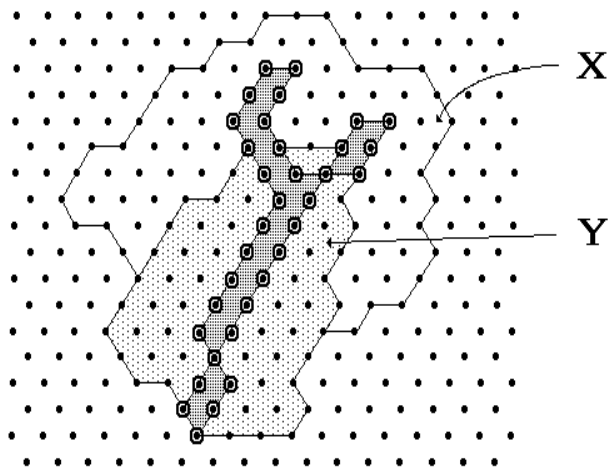


Figure III-8

Squelette géodésique connexe

Enfin, on a vu que la version digitale de l'amincissement géodésique par un élément (H_a,L_a) donné (a est fixé) pouvait s'écrire :

$$O_X(Y;T) = Y / [[[Y \cup X^c) \ominus \check{H}_a] \cap [(Y \cup X^c)^c \ominus \check{L}_a]] \ , \quad T = (H_a,L_a)$$

$$O_X(Y;T) = Y / [(Y \cup X^c) * T]$$

$$O_X(Y;T) = \big[(Y \cup X^c) / [(Y \cup X^c) * T]\big] \cap X = [(Y \cup X^c) \ominus T] \cap X$$

Cette écriture a été étendue, pour des raisons de commodité, à tout amincissement géodésique, quelque soit l'élément structurant T utilisé pourvu que T soit défini sur la boule géodésique élémentaire. Par dualité, on pose également :

$$\Theta_X(Y;T) = X \,/\, O_X(X \,/\, Y;T^*) \quad \text{avec } T^*, \text{ dual de } T$$
$$\Theta_X(Y;T) = (Y \odot T) \cap X$$

En particulier, il est d'un usage courant de transposer en géodésique les amincissements et épaississements euclidiens par des éléments structurants tels que L, M et D, par le biais de cette formulation. Cette pratique est cependant dangereuse, car elle n'est pas légitime lorsque les éléments choisis n'ont pas de sens en géodésie. On la tolère car les erreurs qu'elle génère (en particulier sur les bords de l'espace géodésique X) se diluent dans les erreurs engendrées par l'usage de séquences d'amincissements ou d'épaississements pour produire des squelettes.

On remarque que l'algorithmique utilisée pour les amincissements est identique à celle des érosions. C'est que érosions géodésiques et amincissements sont des transformations anti-extensives (le résultat de l'opération est inclus dans l'ensemble initial).

I-5) <u>Applications élémentaires de la géodésie</u>

Deux applications seront décrites : la *reconstruction d'ensemble* et le *squelette par zones d'influence géodésique*. A elles seules ces deux transformations constituent des outils morphologiques tellement puissants qu'on les retrouve en filigrane dans la plupart des transformations utilisées en segmentation.

Soit un ensemble X constitué de divers composantes connexes X_j. Considérons maintenant un ensemble Y inclus dans une composante connexe X_i de X. Les dilatations géodésiques successives de Y dans X vont atteindre tous les points de X à distance géodésique finie de Y, autrement dit tous les points de la composante connexe X_i marquée par Y. Ceci s'étend d'ailleurs au cas où Y marque plusieurs composantes connexes de X. Cette transformation s'appelle *reconstruction de X par Y* et est notée $R_X(Y)$ (KLEIN, 1976, [43]). On la définit plus formellement de la manière suivante :

$$R_X(Y) = D^{+\infty}_X(Y) = \lim_{r \to +\infty} D^r_X(Y)$$

(a) (b) (c)

Figure III-9

Reconstruction d'ensemble à partir d'un marqueur :
(a) ensemble et marqueur, (b) stade intermédiaire, (c) résultat

On peut voir sur la figure III-9 un exemple de reconstruction d'ensemble. Cette transformation permet d'extraire de façon simple toutes les composantes connexes marquées par un ensemble marqueur. Le résultat de la reconstruction reste cependant inchangé quelque soit le nombre de marqueurs par composante connexe. Ce n'est pas le cas avec le squelette par zones d'influence géodésique.

Ce squelette se définit simplement en reprenant la définition du squelette par zone d'influence euclidien et en remplaçant la distance euclidienne sur la distance géodésique (LANTUEJOUL, BEUCHER, 1979, [50]). Y inclus dans un espace géodésique X est formé de n composantes connexes $\{Y_i\}_{i\in[1,n]}$. La *zone d'influence géodésique* $z_X(Y_i)$ de Y_i est l'ensemble des points de X à une distance géodésique finie de Y_i et plus proches de Y_i que de toute autre composante Y_j :

$$z_X(Y_i) = \{x \in X : d_X(x,Y_i) < +\infty \text{ et } \forall\ j \neq i,\ d_X(x,Y_i) < d_X(x,Y_j)\}$$

Les frontières des zones d'influence constituent le squelette par zones d'influence géodésiques (ou SKIZ géodésique) de Y dans l'espace X. Cette transformation, comme son homologue euclidienne, n’est pas homotopique. De plus les zones d’influence et le SKIZ géodésique ne partitionnent pas X (Figure III-10).

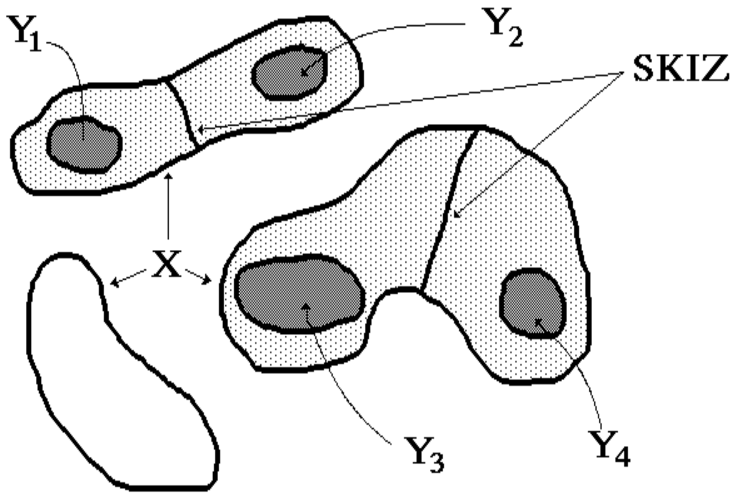


Figure III-10
SKIZ géodésique de Y dans X

D’après ce qui a été dit au paragraphe précédent, ce squelette peut être construit à l’aide d’épaississements géodésiques par la famille $\mathcal{T}$ d’éléments structurants déjà introduits au chapitre premier :

$$\begin{array}{cccccc} & & \bar{2} & & 1 & \\ & 0 & & \mathbf{0} & & \bar{2} \\ 0 & & 0 & & 0 & \\ & 0 & & 0 & & \end{array} \qquad \text{(en trame hexagonale)}$$

et par la famille $\mathcal{T}$’ d’éléments réalisant un ébarbulage :

$$\mathrm{SKIZ}_X(Y) = \{(Y \odot (\mathcal{T} \cup \mathcal{T}')) \cap X\}^{\infty}$$

Il peut arriver que le SKIZ géodésique soit réalisé à l’aide d’une séquence d’épaississements géodésiques, bien que cette façon de procéder engendre des erreurs. Dans ce cas, le seul élément structurant utilisable est l’élément M. L’élément L en effet n’est pas suffisamment fin pour envahir les régions de X de faible épaisseur (Figure III-11).

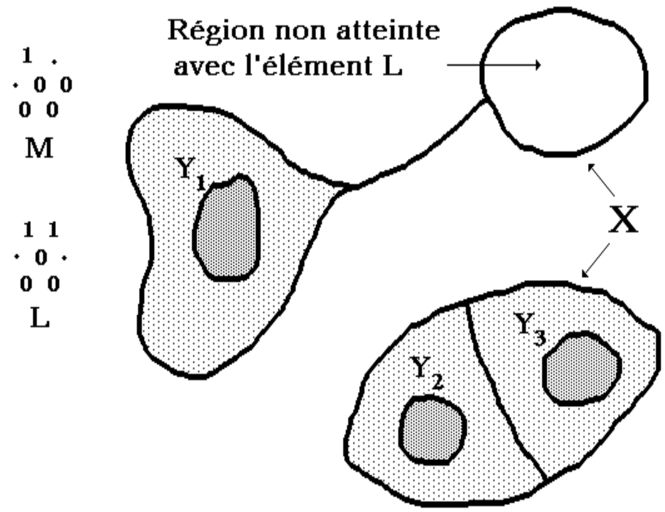


Figure III-11

Erreurs engendrées dans la réalisation du SKIZ géodésique par l'utilisation de l'élément L

II) GEODESIE ET IMAGES A TEINTES DE GRIS

L'extension des notions géodésiques à des images à teintes de gris peut se faire de différentes manières. La plus naturelle consiste à étendre les transformations géodésiques élémentaires à l'espace tridimensionnel et à les appliquer aux ensembles particuliers constitués par les sous-graphes de fonctions.

Une autre approche consiste à définir une distance géodésique dans l'espace de définition de la fonction. Cette manière de procéder sera abordée plus tard. Voyons maintenant les outils que procurent la première approche.

II-1) Transformations élémentaires, reconstruction de fonction

Soit une fonction g, définie sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Son sous-graphe G(g) considéré comme un espace géodésique permet de définir la *dilatation* et l'*érosion géodésiques* d'une fonction f ≤ g par des boules géodésiques tridimensionnelles. En désignant par $D^r_g(f)$ le dilaté géodésique de f, on peut écrire que le sous-graphe de $D^r_g(f)$ est le dilaté géodésique du sous-graphe de f dans l'espace géodésique constitué par le sous-graphe de g :

$$G[D^r_g(f)] = D^r_{G(g)}[G(f)] = \{x \in G(g),\ B_{G(g)}(x,r) \cap G(f) \neq \emptyset\}$$

où $B_{G(g)}(x,r)$ est la boule géodésique tridimensionnelle de l'espace G(g) implantée en x et de rayon r.

De la même façon, l'érodé géodésique $E^r_g(f)$ a pour sous-graphe :

$$G[E^r_g(f)] = \mathcal{U}(E^r_{G(g)}[G(g)]) = \mathcal{U}\{x \in G(g) : B_{G(g)}(x,r) \subset G(f)\}$$

On remarquera l'intervention de l'ombre dans la définition. C'est qu'en effet, rien ne garantit que l'érodé géodésique d'un sous-graphe soit un sous-graphe.

On peut facilement montrer que la version digitale du dilaté géodésique s'obtient par itérations d'un dilaté élémentaire $D_g(f)$ donné par :

$$D_g(f) = \mathrm{Inf}(f \oplus B,\ g)$$

où B est la boule euclidienne tridimensionnelle élémentaire. On veillera, en utilisant cette formule, à ce que tous les points de la boule B soient au plus à une distance unité de son centre, ce qui est vrai par exemple pour le rhombododécaèdre en trame hexagonale, mais pas en trame carrée (SERRA, [80], p. 204-205).

La manipulation de la géodésie tridimensionnelle restreinte aux fonctions n'est pas aisée. De plus, lorsqu'on transpose dans cet espace les opérations bidimensionnelles intéressantes comme la reconstruction ou le squelette par zones d'influence, les résultats obtenus sont triviaux. La reconstruction d'une fonction g par une fonction f fournit en effet toujours g, puisque aussi bien le sous-graphe de f que celui de g sont dans $\mathbb{R}^3$ des ensembles simplement connexes.

Par contre, les transformations définies avec des boules bidimensionnelles sont très intéressantes. Une boule bidimensionnelle de centre x et de rayon r dans l'espace G(g) est l'ensemble des points de G(g) à la même altitude que x et à une distance géodésique inférieure ou égale à r de x. Avec ces éléments structurants, les opérations de dilatation et d'érosion peuvent être réalisées et définies sur les seuils de f et g. Ainsi, les transformées digitales peuvent s'écrire :

$$D_g(f) = \mathrm{Inf}(f \oplus H,\ g)$$

où H est la boule élémentaire de l'espace $\mathbb{Z}^2$ (hexagone ou carré). On peut alors écrire :

$$X_i(D_g(f)) = (X_i(f) \oplus H) \cap X_i(g)$$

$X_i(f)$ et $X_i(g)$ sont les sections au niveau i de f et g.

Définissons alors la reconstruction d'une fonction g par une fonction f, minorante de g. Cette opération notée $R_g(f)$ est égale à :

$$R_g(f) = D_g^{+\infty}(f) = \lim_{n \to +\infty} \{\underbrace{D_g \circ D_g \circ \ldots \circ D_g}_{n}(f)\}$$

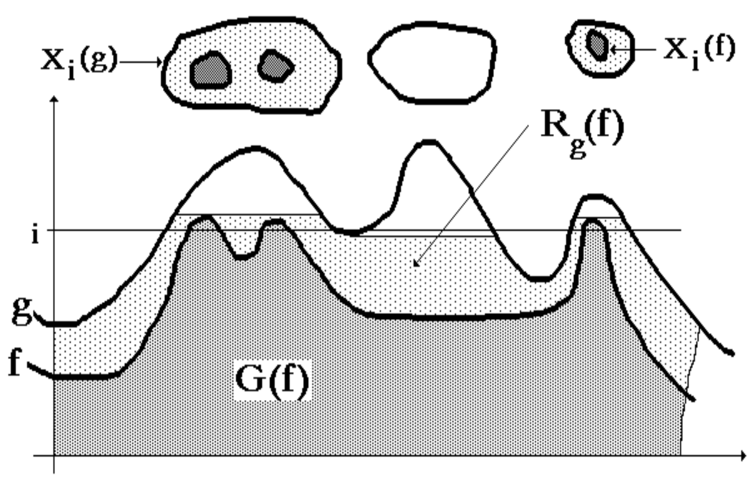


Figure III-12

Reconstruction d'une fonction par une fonction marqueur

Cette transformation (voir figure III-12) peut être écrite à l'aide des seuils de f et g :

$$X_i[R_g(f)] = R_{X_i(g)}(X_i(f))$$

Autrement dit, toute section de la fonction reconstruite peut être obtenue par reconstruction géodésique de la section de f correspondante dans la section de g.

On peut aussi définir une *reconstruction duale* d'une fonction g par une fonction f majorante de g. On définit cette reconstruction duale, notée $R_g^*(f)$, toujours à l'aide de dilatations géodésiques ensemblistes par des boules bidimensionnelles, mais définies cette fois sur l'espace $G^c(f)$ et appliquées à l'ensemble $G^c(g)$ inclus dans $G^c(f)$ (puisque $g \geq f$).

Les dilatations géodésiques planes successives de $G^c(g)$ produisent un ensemble qui n'est autre que le complémentaire du sous-graphe de $R_g^*(f)$ (Figure III-13).

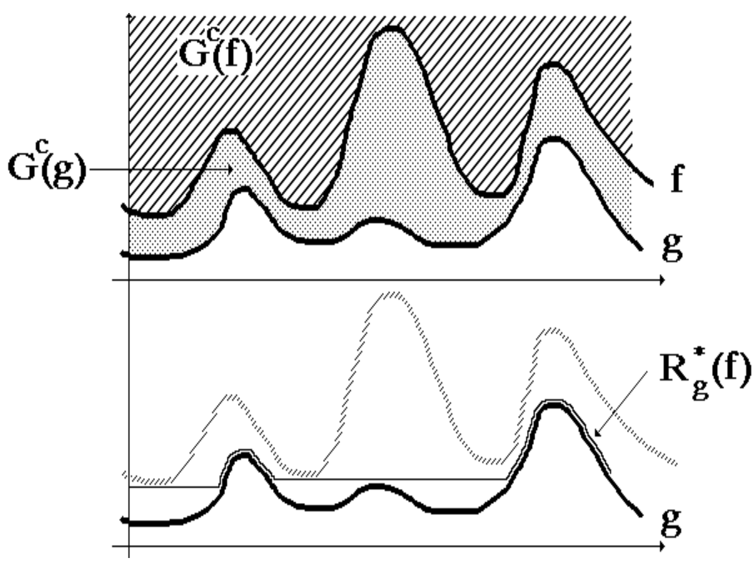


Figure III-13

Reconstruction duale d'une fonction

On peut également écrire à l'aide des sections complémentées :

$$X_i^c[R_g^*(f)] = R_{X_i^c(g)}[X_i^c(f)] = \lim_{n \to +\infty} [(X_i^c(f) \oplus H) \cap X_i^c(g)]^{(n)}$$

L'opération élémentaire utilisée est donc :

$$(X_i^c(f) \oplus H) \cap X_i^c(g) = [(X_i(f) \ominus H) \cup X_i(g)]^c$$

C'est le complémentaire du seuil au niveau i de la fonction sup(f $\ominus$ H, g).

Ces deux reconstructions sont d'un usage intensif dans l'extraction et même la modification des extrema d'une fonction.

II-2) <u>Extrema d'une fonction, mise en évidence</u>

Nous allons constamment par la suite utiliser la notion d'*extrema* (*minima* ou *maxima*) d'une fonction f encore appelés *extrema régionaux*. Définissons ces notions et voyons comment on peut utiliser la reconstruction de fonction pour les mettre en évidence. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Imaginons son graphe comme une surface topographique. Cette façon de considérer une fonction sera souvent reprise pour introduire d'autres notions fondamentales comme la ligne de partage des eaux. Un *maximum* de f

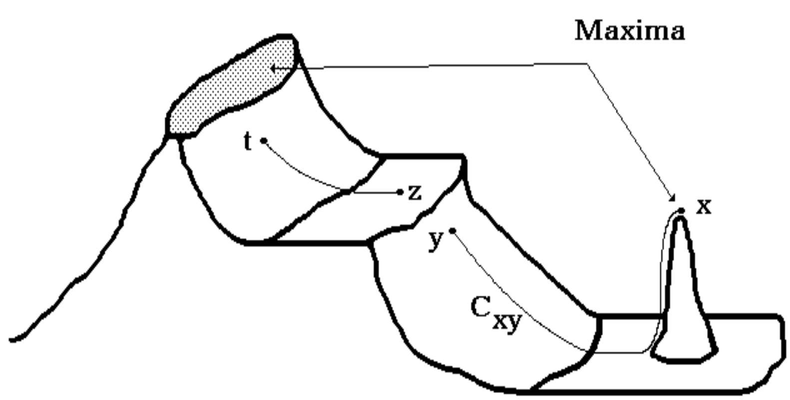


Figure III-14

Maxima d'une fonction

(ou *maximum régional*) est un sommet de la surface topographique, c'est-à-dire une région connexe (mais pas forcément réduite à un point) d'où il n'est pas possible partant d'un point quelconque de cette région de rejoindre un point de la surface d'altitude supérieure par un chemin jamais descendant (Figure III-14).

Ainsi le point x est un maximum, car partant de ce point, la seule façon de rejoindre un point d'altitude supérieure comme y est d'emprunter un chemin C_{xy} qui n'est pas toujours ascendant au sens large (c'est-à-dire un chemin formé par la concaténation de portions strictement ascendantes et de portions à niveau).

Considérons alors les différents seuils de f. Un maximum de la fonction à l'altitude i s'il existe sera une composante connexe du seuil $X_i(f)$ de f ne contenant aucune composante connexe de tout seuil $X_j(f)$ où $j > i$. En effet, supposons que cela ne soit pas le cas. Il existe alors un chemin reliant tout point x de la composante connexe de $X_i(f)$ en question avec tout point y de la composante connexe de $X_j(f)$ contenue dans la précédente (Figure III-15).

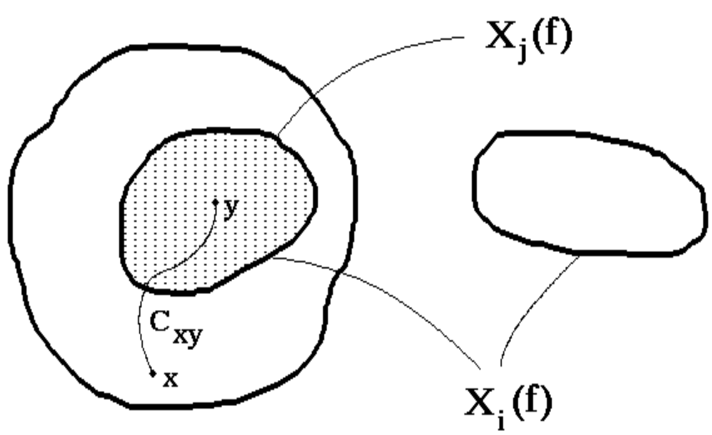


Figure III-15

Relations entre les maxima et les sections d'une fonction

Plaçons-nous dans l'espace digital $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}$ et posons $j = i + 1$. Alors le chemin C_{xy} est la trace d'un chemin parcourant le graphe de f et ascendant au sens large. Il en résulte que x ne peut appartenir à un maximum, ce qui, a contrario, démontre la proposition.

Un maximum au niveau i est donc constitué des composantes connexes de $X_i(f)$ non reconstruites par $X_{i+1}(f)$, et l'ensemble M(f) des maxima de f est alors :

$$M(f) = \bigcup_i [X_i(f)/R_{X_i(f)}[X_{i+1}(f)]]$$

Ecrivons cette formule différemment. On sait que :

$$R_{X_i(f)}[X_{i+1}(f)] = R_{X_i(f)}[X_i(f-1)] = X_i[R_f(f-1)]$$

Soit :

$$M(f) = \bigcup_i [X_i(f) \cap X_i^c(R_f(f-1))]$$

Ce qui peut s'écrire (cf. chapitre 1) :

$$M(f) = X_1[f - R_f(f-1)]$$

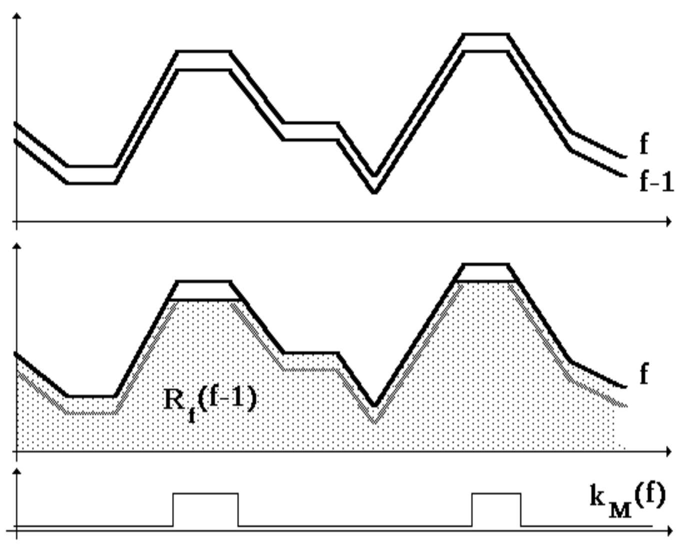


Figure III-16

Maxima et reconstruction d'une fonction f par f-1

Les maxima de f sont constitués des points de $\mathbb{Z}^2$ pour lesquels $f - R_f(f - 1)$ est strictement positif (BEUCHER, 1980, [03]).

Comme $0 \leq f - R_f(f - 1) \leq 1$, cette formule correspond à la fonction indicatrice $k_M(f)$ des maxima de f (Figure III-16).

De la même façon, mutatis mutandis, on peut définir les minima de la fonction f. Un minimum est une cuvette de la surface topographique, c'est-à-dire une région connexe d'où il n'est pas possible de rejoindre un point du graphe de f d'altitude inférieure par un chemin jamais ascendant. On remarque immédiatement que les minima m(f) correspondent aux maxima de (-f), soit :

$$m(f) = M(-f)$$

$$m(f) = \bigcup_i [X_i(-f) \ / \ R_{X_i(-f)}(X_{i+1}(-f))]$$

ou encore :

$$m(f) = \bigcup_k [X_k^c(f) \ / \ R_{X_k^c(f)}(X_{k-1}^c(f))]$$

$$m(f) = \bigcup_k [X_k^c(f) \ / \ R_{X_k^c(f)}(X_k^c(f + 1))]$$

$$m(f) = \bigcup_k [X_k^c(f) \ / \ X_k^c(R_f^*(f + 1))]$$

On trouve alors, sans difficulté, que :

$$k_{m(f)} = R_f^*(f + 1) - f$$

D'une manière générale, on constate que la reconstruction d'une fonction par une autre reconstruit, du moins en partie, les maxima (resp. les minima) de la fonction g lorsqu'ils sont marqués par les maxima (resp. les minima) de la fonction f dans la transformation $R_g(f)$ (resp. $R_g^*(f)$). Cette caractéristique sera prise en considération plus tard (cf. chapitre 6) pour modifier les minima ou les maxima d'une fonction.

III) GENERALISATION DE LA DISTANCE GEODESIQUE

Les seuls éléments structurants envisagés dorénavant seront, sauf indication contraire, des éléments structurants plans.

Entre autres avantages, et d'un point de vue pratique, les transformations géodésiques formalisent bien les opérations réalisées dans un masque (l'espace géodésique X) en prenant en compte les effets de bord sans générer d'artefacts. Ce qui a été fait avec des ensembles bidimensionnels peut également s'étendre à des fonctions en considérant que l'espace géodésique n'est pas défini par le sous-graphe de la fonction comme cela a été envisagé précédemment, mais simplement que cet espace géodésique est une partie X du domaine de définition ($\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{Z}^2$ dans le cas digital) de la fonction. En fait, considérer que l'espace géodésique est limité à X est gênant car la fonction f étudiée est définie et prend des valeurs en dehors de X. Or la distance géodésique d_X est définie dans tout l'espace de définition de f, en posant par convention que $d_X(x,y) = +\infty$ dès que l'un des

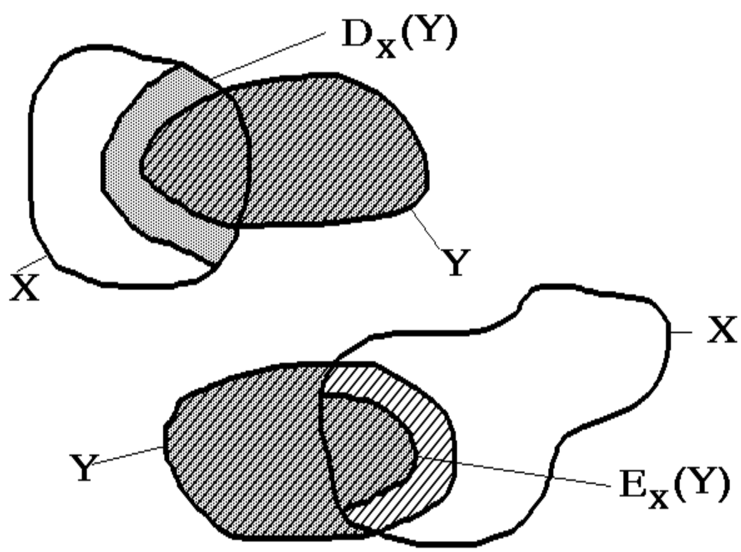


Figure III-17

Première généralisation des transformations géodésiques

points x ou y n'appartient plus à X. Cette extension permet notamment de définir le dilaté ou l'érodé géodésique d'un ensemble Y même quand Y n'est plus inclus dans X. On écrit (Figure III-17) :

$$D^r_X(Y) = D^r_X(X \cap Y) \cup Y$$

$$E^r_X(Y) = E^r_X(Y \cap X) \cup Y$$

Dans leur version digitale, les transformées élémentaires s'écrivent :

$$D_X(Y) = [((X \cap Y) \oplus H) \cap X] \cup Y$$

$$E_X(Y) = [((Y \cup Y^c) \ominus H) \cap X] \cup Y$$

Appliquées à une fonction f et un ensemble X, ces transformations s'écrivent sur les seuils :

$$X_i[D_X(f)] = (((X \cap X_i(f)) \oplus H) \cap X) \cup X_i(f)$$

$$X_i[E_X(f)] = (((X_i(f)) \cup X^c) \ominus H) \cap X) \cup X_i(f)$$

Supposons que f soit positive et bornée et désignons par b_n sa borne supérieure. Considérons la fonction k ainsi définie :

$$\begin{array}{ll} k(x) = b_m, & \forall\ x \in X \\ k(x) = 0, & \text{sinon} \end{array}$$

Tout seuil $X_i(k)$, $0 < i \leq b_m$ est donc égal à X. On peut donc écrire :

$$X_i[D_X(f)] = (((X_i(k) \cap X_i(f)) \oplus H) \cap X_i(k)) \cup X_i(f)$$

ce qui entraîne :

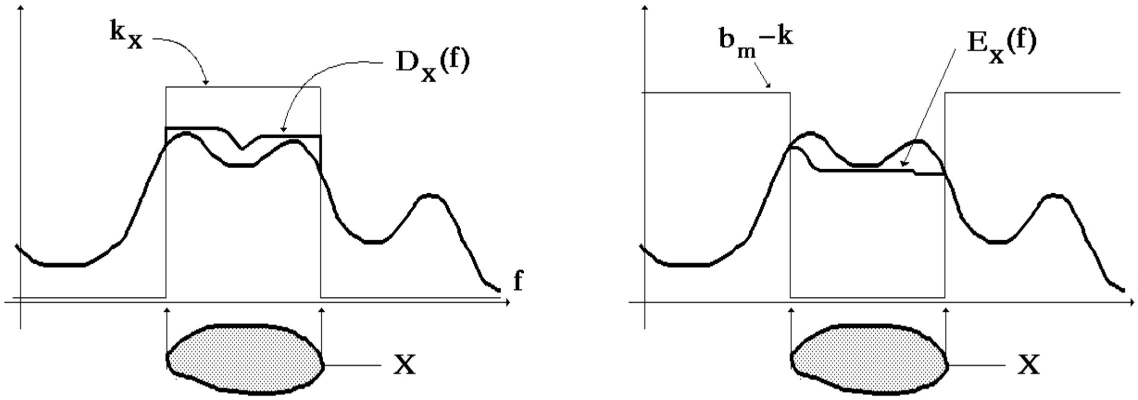
$$D_X(f) = \mathrm{Sup}\ (f,\ \mathrm{Inf}(k,\ \mathrm{Inf}(f,k) \oplus H))$$

De la même façon, et en remarquant que :

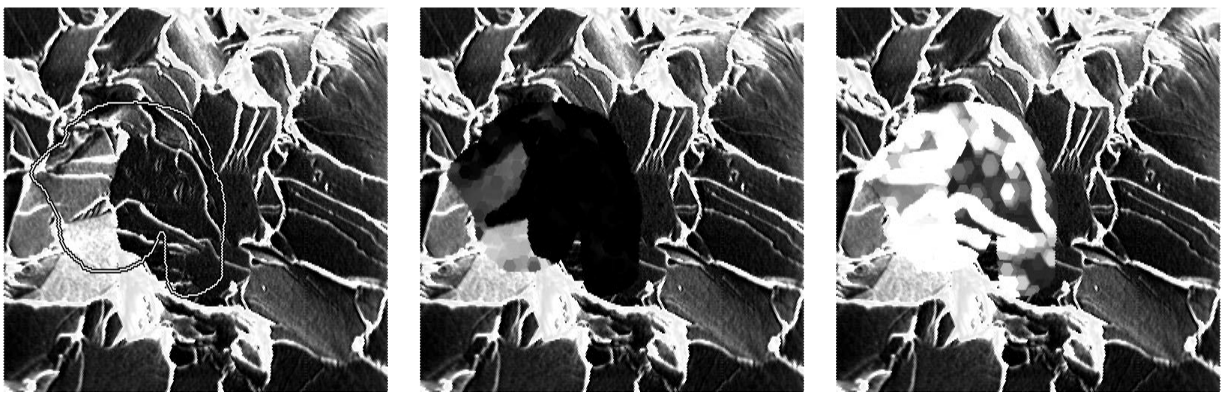
$$X^c_i(k) = X_i(b_m - k)$$

on obtient :

$$E_X(f) = \mathrm{Sup}\ (f,\ \mathrm{Inf}(\mathrm{Sup}(f,\ b_m - k) \oplus H,k))$$



(a) (b)



(c) (d) (e)

Figure III-18

Transformations géodésiques numériques : (a) principe de la dilatation, (b) principe de l'érosion. Illustration sur images réelles : (c) original et masque X, (d) érosion, (e) dilatation

La figure III-18 illustre l'algorithme et montre le résultat de telles transformations sur une image réelle.

On pourrait penser que l'usage de telles opérations est assez limité. En fait, toutes les transformations morphologiques numériques implantées dans des systèmes de traitement d'images se font selon ces règles. En effet, une image quelqu'elle soit est toujours comprise dans un champ d'analyse. Si l'on veut obtenir des transformations morphologiques numériques exactes, il faut que ces dernières soient géodésiques par rapport au champ d'analyse, faute de quoi des effets de bord indésirables se produiront, effets de bord qui se propageront à l'intérieur du champ si plusieurs transformations élémentaires sont itérées.

Grâce à cette première généralisation, l'espace géodésique n'est plus limité seulement à X mais s'étend dans tout l'espace ($\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{Z}^2$), l'ensemble X délimitant une région de cet espace où la distance géodésique s'exprime différemment. Cela conduit donc tout naturellement à une plus grande généralisation encore, consistant à calculer les distances entre deux points en termes de *temps de parcours minimal* et non plus simplement de longueur de chemin minimal.

Reprenant la définition de la distance géodésique, on a vu que cette distance est égale à la longueur du chemin minimal entre deux points. Soit C_{xy}, un chemin quelconque entre x et y. Sa longueur est l'intégrale curviligne :

$$L(C_{xy}) = \int_{C_{xy}} ds$$

ds est l'élément linéaire élémentaire découpé sur le chemin C_{xy}. Cette longueur peut également être exprimée en temps de parcours. L'élément ds est parcouru en un temps dt proportionnel à sa longueur :

$$ds = v\ dt, \quad v \text{ est la vitesse de parcours}$$

On a alors :

$$L(C_{xy}) = v \int_{C_{xy}} dt = v\ T(C_{xy})$$

Comme v est constant, le temps de parcours total $T(C_{xy})$ du chemin peut être pris en compte pour mesurer sa longueur. La distance entre x et y est donc égale en temps de parcours minimal entre x et y.

Cependant, on peut très bien imaginer (d'autant qu'il s'agit d'une situation familière) que la vitesse de déplacement n'est pas constante mais varie en chaque point de l'espace en fonction de sa position mais également selon l'orientation de l'élément ds.

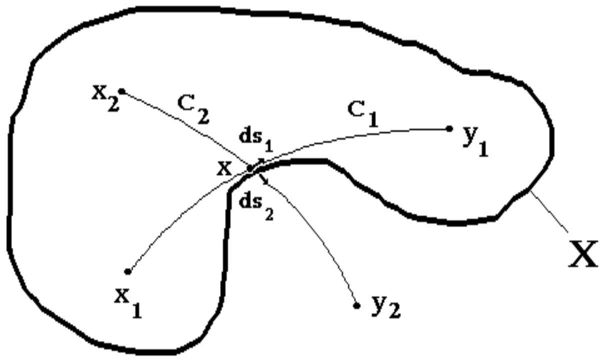


Figure III-19

Chemins passant par un même point et vitesses de parcours

Ainsi, comme on le voit à la figure III-19, en reprenant la notion classique de chemin dans un ensemble, la vitesse au point x le long du chemin C_1 sera strictement positive, par contre elle sera nulle le long de C_2.

En désignant par ω cette vitesse, la longueur d'un chemin C_{xy} exprimée en temps de parcours devient :

$$T(C_{xy}) = \int_{C_{xy}} \frac{ds}{\omega}$$

Désignons par η, l'inverse de la fonctionnelle ω :

$$\eta = 1 / \omega$$

On a alors :

$$T(C_{xy}) = \int_{C_{xy}} \eta \, ds$$

Cette fonctionnelle η sera appelée *réfringence* par analogie avec la propagation lumineuse. En effet, la vitesse de déplacement est d'autant plus grande que η est petit. Cette fonctionnelle dans le cas d'un milieu homogène peut être représentée par un tenseur. Mais lorsque le milieu est plus complexe, sa formulation explicite s'avère très difficile, et plus encore la manipulation des temps de parcours. En effet, dans ce cas, la distance entre deux points x et y est souvent impossible à exprimer.

Dans le cas digital, cependant, les choses sont plus simples. En effet, la réfringence η peut être représentée comme une valuation des arêtes du graphe (Z, D) de digitalisation : Z est l'ensemble des sommets du graphe (c'est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^2$) et D, l'ensemble des arêtes. On peut alors associer à chaque arête $x_i x_j \in D$ une valeur numérique η_{ij} représentant la réfringence ou le temps de parcours entre x_i et x_j.

La seule condition imposée à cette valuation est d'être une distance, ou au moins un *écart*. Considérons une fonction f quelconque définie sur les sommets de (Z, D) et à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Posons pour chaque arête $x_i\ x_j \in D$:

$$\eta_{ij} = |f(x_i) - f(x_j)|$$

Il est facile de voir que η_{ij} définit un écart sur le graphe. En effet :

$$\begin{aligned} &\eta_{ii} = 0 \\ &\eta_{ij} = \eta_{ji} \\ &\eta_{ij} + \eta_{jk} \geq \eta_{ik} \qquad \forall \text{ i,j,k adjacents} \end{aligned}$$

N'importe quelle fonction numérique peut donc être utilisée pour définir un écart sur le graphe.

Pratiquement, η peut être définie par une suite de n fonctions numériques sur Z, où n est le nombre de voisins d'un point dans le graphe (supposé régulier). On pourra ainsi écrire :

$$\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_i, \ldots, \eta_n)$$

où $\eta_i(x)$ représente au point x le temps de parcours de l'arête d'origine x et orientée dans la direction i.

On peut alors définir la dilatation géodésique selon cette distance (ou cet écart). Soit Y l'ensemble à dilater, et t la taille en unités de temps de cette dilatation ($t \in \mathbb{N}$). Un algorithme simple de dilatation est le suivant : Considérons une des fonctions η_i et sa restriction à l'ensemble Y. Tous les points x de Y tels que $\eta_i(x) = 0$ (il peut y en avoir car η_i peut être un écart)) sont dilatés dans la direction i. En effet, les points du dilaté sont des points, dans la direction i, à une distance (ou écart) nulle de Y. En désignant par $X_o(\eta_i)$ le seuil à zéro de η_i, la transformation s'écrit alors :

$$[X_o(\eta_i) \cap Y] \oplus L_i$$

La même opération peut être effectuée dans toutes les directions i, et on peut ainsi adjoindre à Y ses points adjacents dont l'écart à Y est nul :

$$\Psi(Y) = Y \cup [\bigcup_i [(X_o(\eta_i) \cap Y) \oplus L_i]]$$

Cette transformée doit être itérée jusqu'à idempotence afin d'adjoindre à Y tous les points dont l'écart à Y est nul. L'ensemble obtenu est noté Y' :

$$Y' = \Psi^{\infty}(Y)$$

Evidemment, si l'écart est une distance, Y' est égal à Y. Calculons alors pour chacune des fonctions η_i et pour tous les points x intérieurs à Y' la valeur :

$$\mathrm{Sup}(\eta_i(x) -1,0)$$

On produit alors une nouvelle fonction η'_i, égale à η_i pour tous les points extérieurs à Y', et dont la valeur a été decrémentée de 1 (jusqu'à 0) pour tous les points intérieurs à Y'. Comme précédemment, tous les points x de Y' tels que $\eta'_i(x) = 0$ sont les points pour lesquels le point adjacent dans la direction i est à la distance unité (en temps de parcours). La dilatation de ces points adjoint donc à Y' les points à la distance 1. La transformée, pour toutes les directions i, s'écrit :

$$\Phi(Y') = Y' \cup [\bigcup_i [(X_o(\eta'_i) \cap Y') \oplus L_i]]$$

$\Phi(Y')$ est le dilaté de taille 1 de Y, c'est-à-dire l'ensemble des points de l'espace à une distance inférieure ou égale à 1 de Y. Résumons l'algorithme, en désignant par $\Gamma(Y,\eta)$ la transformation :

$$\Gamma(Y,\eta) = Y \cup [\bigcup_i [(X_o(\eta_i) \cap Y) \oplus L_i]]$$

avec $\eta = (\eta_1,...,\eta_i,...,\eta_n)$

On peut alors écrire le dilaté de Y sous la forme :

$$\Gamma[\Gamma^{\infty}(Y,\eta),\eta'] = D_{\eta}(Y)$$

avec :

$$\eta' = (\eta'_1,...,\eta'_1,...,\eta'_n)$$

et :

$$\begin{array}{ll} \eta'_i(x) = \mathrm{Sup}(\eta_i(x) - 1,0) & \forall\ x \in Y \\ \eta'_i(x) = \eta_i(x) & \text{sinon} \end{array}$$

Pour effectuer une dilatation de taille t, il suffit d'itérer cette procédure élémentaire. Par exemple, le dilaté de taille 2 sera :

$$D_{\eta'}[D_{\eta}(Y)]$$

En effet, les valeurs de η'_i qui deviennent nulles à ce moment correspondent aux points pour lesquels la valeur initiale de η_i était égale à 2, c'est-à-dire les points dont le point adjacent dans la direction i était à la distance 2. Il est donc légitime qu'ils appartiennent au dilaté de taille 2. Lorsque nous avons affaire à une distance, la dilatation élémentaire s'écrit :

$$D_{\eta}(Y) = \Gamma(Y,\eta')$$

La figure III-20 illustre cette dilatation géodésique généralisée. L'érosion peut se définir par dualité.

Quel peut être l'usage d'une telle transformation ? En fait, on peut constater que tout ce qui a été dit précédemment peut être réécrit avec ce formalisme, aussi bien les transformées géodésiques binaires que les transformées numériques. Cependant, il n'est pas nécessaire dans ces cas, de

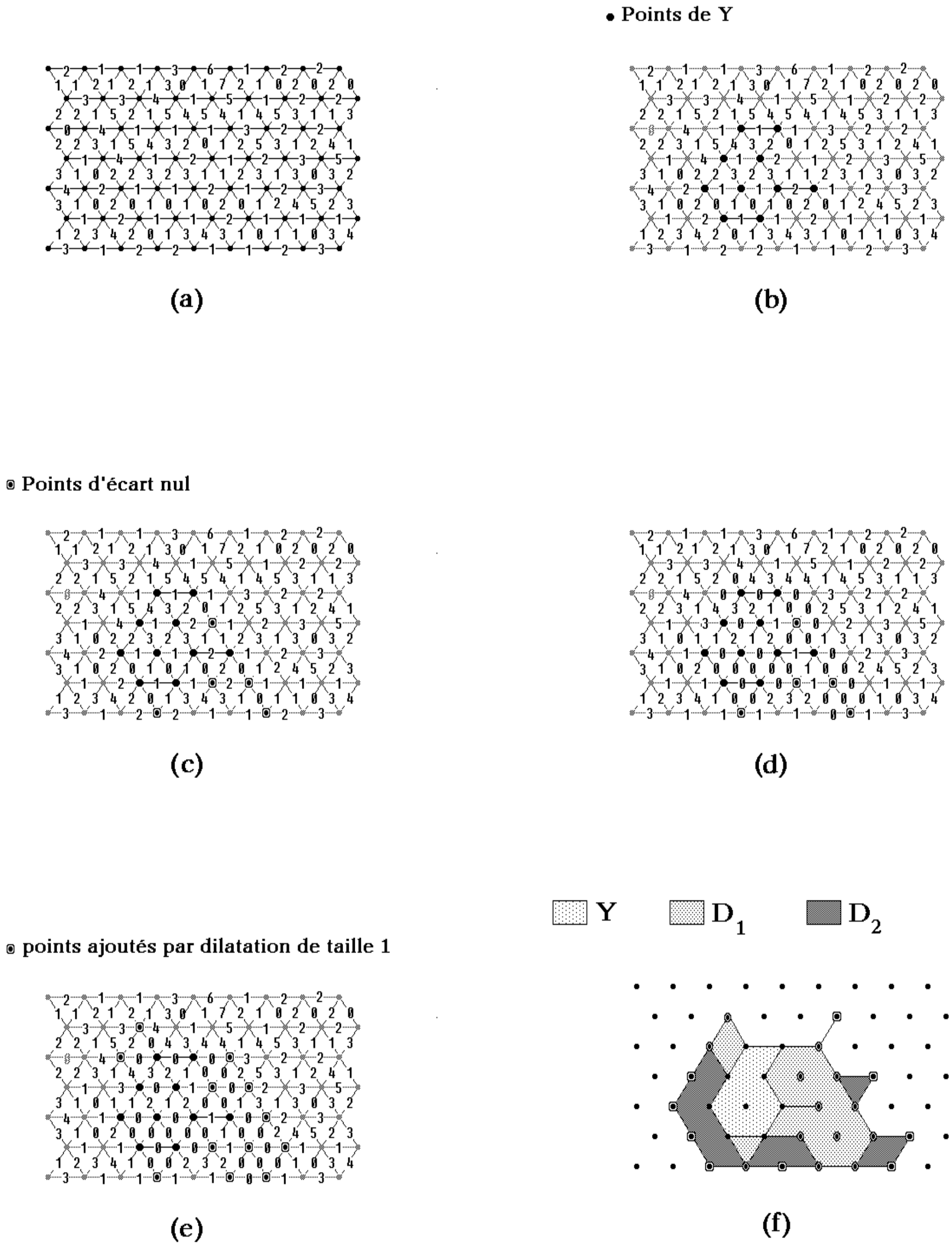
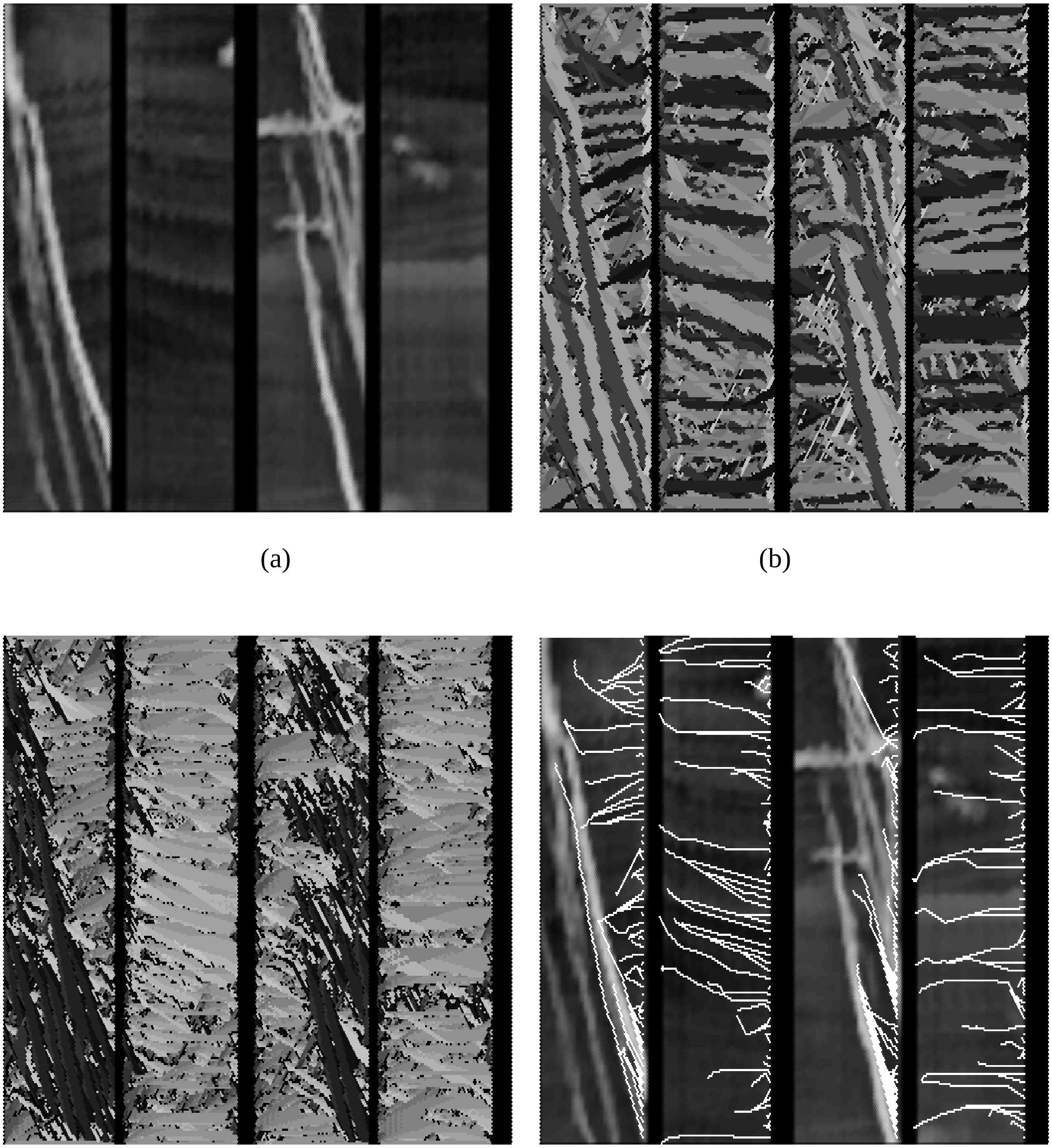


Figure III-20

Dilatation géodésique généralisée : (a) réfringence η*, (b) ensemble Y, (c) points d'écart nul* $\Gamma^{\infty}(Y,\eta)$*, (d) réfringence modifiée* η'*, (e) dilaté unitaire* $D(Y,\eta)$*, (f) dilaté de taille 2* faire appel à un formalisme aussi lourd.



(a) (b)

(c) (d)

Figure III-21

(a) images de diagraphies, (b) azimut du gradient filtré

(c) réfringence, (d) suivi par dilatation géodésique

Nous allons, par contre, donner deux exemples où ce formalisme est, sinon indispensable, du moins assez éclairant. Le premier est un problème de suivi de structures sur des images de diagraphies électriques (S. BEUCHER, 1989, [09]). Partant des images initiales (Figure III-21-a), on peut calculer l'azimut de leur gradient, et le filtrer (Figure III-21-b). Pour chaque direction d'azimut a_i, on peut construire l'ensemble Z_i des points de la structure dont l'azimut est compris entre $\alpha_i - \beta$ et $\alpha_i + \beta$, β définissant un angle de changement de direction maximal autorisé. On calcule alors pour chaque point de Z_i la longueur maximale de parcours dans la direction α_i. Cette longueur est donnée par la fonction-distance directionnelle d_i construite à partir des érodés successifs de Z_i par des segments orientés dans la direction α_i :

$$d_i(x) = \mathrm{Sup}(\ell,\ x \in Z_i \ominus \ell L_i)$$

Un point x de l'image pouvant être inclus dans plusieurs ensembles Z_i (tout dépend du recouvrement obtenu selon la valeur de β), on choisira pour ce point la direction i telle que $d_i(x)$ soit maximale :

$$d_i(x) = \mathrm{Sup}(d_j(x),\ x \in Z_j)$$

On construit ainsi en chaque point x de la structure une fonction de réfringence η égale à l'infini pour toutes les directions sauf i où elle est égale à 1. La réfringence peut alors avantageusement être remplacée par un codage des directions de suivi (Figure III-21-c). Il suffit alors de choisir un ensemble de points quelconques sur l'image et de les dilater selon la distance géodésique généralisée définie par η. Cette dilatation produira un segment élémentaire orienté dans la direction préférentielle précédemment calculée. En réitérant la procédure, on obtient un suivi qui s'arrête lorsqu'il atteint une région à gradient nul où le bord de la structure (Figure III-21-d). Cet exemple montre comment les transformées géodésiques généralisées peuvent formaliser des opérations directionnelles, où cette direction varie ponctuellement.

Le deuxième exemple est extrait d'une application destinée à mettre au point un capteur de trafic routier par caméra vidéo (BEUCHER, BLOSSEVILLE, LENOIR, 1987, [16]). Les images analysées sont des vues frontales de portions d'autoroute (Figure III-22). Or, la perspective déforme la scène et les dimensions apparentes des véhicules varient selon leur position dans

Figure III-22

Image de trafic routier

l'image. C'est assez gênant car les algorithmes utilisés pour mettre en évidence ces véhicules font largement appel à des critères de taille. Il est donc nécessaire de calculer un facteur d'échelle permettant de faire correspondre, pour chaque point de l'image, à la dimension apparente exprimée en pixels, la dimension réelle exprimée en mètres. Ce facteur d'échelle est une fonction de réfringence η, dont on calcule deux termes η_v et η_h correspondant respectivement aux directions verticales et horizontales. On travaille en effet sur une trame carrée, et seules quatre

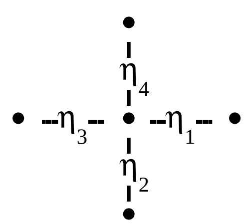


Figure III-23

Composantes de la réfringence

fonctions η_1, η_2, η_3 et η_4 sont nécessaires. De plus, à cause de la symétrie de la distance, η_3 se déduit facilement de η_1 par translation, comme η_4 de η_2 (Figure III-23).

On pose alors $\eta_1 = \eta_h$ et η et $\eta_2 = \eta_v$. De plus, pour simplifier encore les formulations, on suppose que η_h et η_v sont invariants le long d'une même horizontale. Ces deux fonctions peuvent être calculées automatiquement à partir de la position de la caméra et de la segmentation de la chaussée (cf. chapitre 6). La figure III-24 représente le facteur d'échelle horizontal, et la figure III-25, un exemple d'ouverture linéaire numérique utilisant cette distance. La taille de l'ouverture est exprimée en mètres (en l'occurence 1 mètre) et la réfringence η fait correspondre à cette taille une taille en pixels différente en chaque point de la chaussée. En pratique, pour cet exemple particulier, un algorithme quelque peu différent de celui qui a été présenté ici, a été utilisé. Les fonctions η_v et η_h sont en effet monotones et ce fait simplifie beaucoup la mise en oeuvre pratique des opérations.

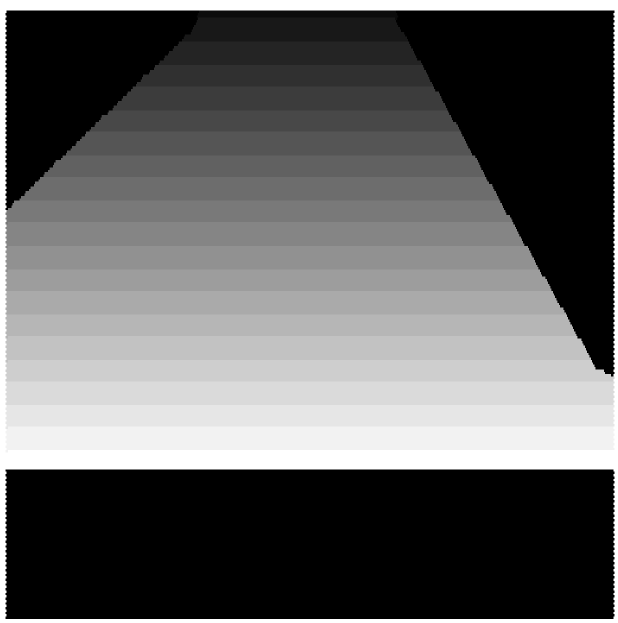


Figure III-24

Facteur d'échelle horizontal

Figure III-25

Ouverture linéaire de taille égale à 1m

IV) ALGORITHMES RAPIDES DE CALCUL DES FONCTIONS-DISTANCE

Pour clore ce chapitre, donnons quelques informations sur le calcul des fonctions-distance à l'aide d'algorithmes rapides en réécriture. Ces algorithmes définis pour la distance euclidienne (A. ROSENFELD *et al*, 1966, [77]) se prêtent fort bien au calcul de la distance géodésique (B. LAY, 1984, [54]). Un *algorithme en ré-écriture* (encore appelé *algorithme récursif*) effectue une transformation (ensembliste ou numérique) en réécrivant dans l'ensemble ou la fonction de départ le résultat de la transformation au fur et à mesure de son élaboration. La transformation d'un point x utilise les points de son voisinage, mais certains points de ce voisinage sont déjà des points transformés. Il s'ensuit une rapidité de transformation nettement plus grande. Ainsi l'algorithme de calcul de la fonction-distance d associée à un ensemble X est le suivant :

On commence par initialiser d en posant :

$$d(x) = 0, \quad \forall\, x \in X^c$$
$$d(x) = m, \quad \forall\, x \in X$$

où m est la valeur maximale représentable dans la mémoire du système d'analyse d'images utilisé (généralement m = 255).

Puis, on parcourt les points de l'image de haut en bas et de la gauche vers la droite. Sur la trame hexagonale, on définit la nouvelle valeur de d au point x_o par :

$$d(x_o) = \mathrm{Inf}[d(x_o),\ 1 + \mathrm{Inf}(d(x_1),\ d(x_2),\ d(x_3))]$$

où x_1, x_2 x_3 sont les points du voisinage suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & \overset{x_1}{\bullet} & & \overset{x_2}{\bullet} & \\ \overset{x_3}{\bullet} & & \overset{x_o}{\bullet} & & \bullet \\ & \bullet & & \bullet & \end{array}$$

La nouvelle valeur de $d(x_o)$ remplace l'ancienne immédiatement. On remarquera que, les points x_1, x_2 et x_3 précédant x_o dans le sens de balayage, les valeurs $d(x_1)$, $d(x_2)$ et $d(x_3)$ sont déjà des valeurs modifiées. En trame carrée, l'algorithme est identique, à ceci près qu'un point supplémentaire est pris en compte :

$$\begin{array}{ccc} \overset{x_1}{\bullet} & \overset{x_2}{\bullet} & \overset{x_3}{\bullet} \\ \overset{x_4}{\bullet} & \overset{x_0}{\bullet} & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

Après ce premier passage, une deuxième itération est effectuée en parcourant l'image de bas en haut et de droite à gauche. La nouvelle valeur de $d(x_o)$ est donnée par :

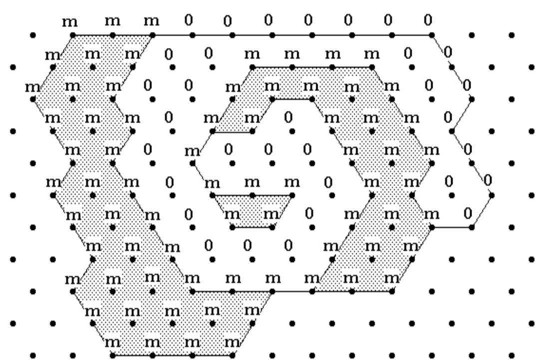
$$d(x_0) = \mathrm{Inf}[d(x_0),\ 1 + \mathrm{Inf}(d(x_4),\ d(x_5),\ d(x_0))]$$

ou (en trame carrée) :

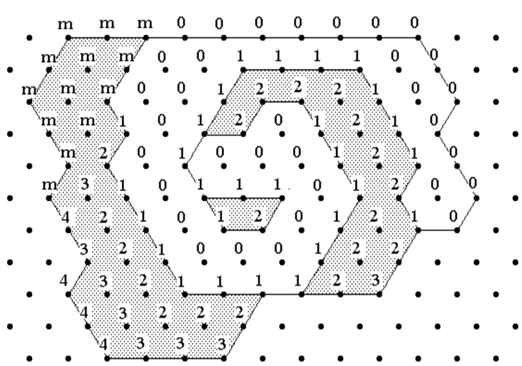
$$d(x_0) = \mathrm{Inf}[d(x_0),\ 1 + \mathrm{Inf}(d(x_5),\ d(x_6),\ d(x_7),\ d(x_8)]$$

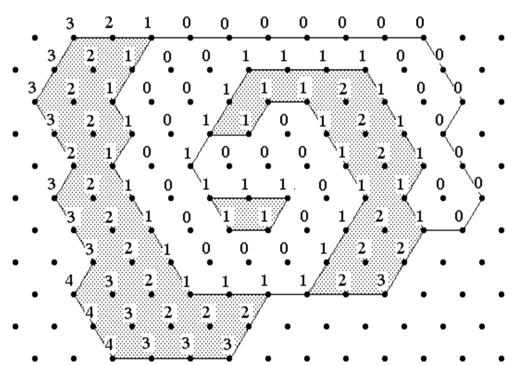
On recommence ces deux opérations jusqu'à idempotence.

Le même type d'algorithme peut être employé pour calculer la fonction-distance géodésique d_X associée à un ensemble Y inclus dans X.



(a)





(b) (c)

Figure III-26

Algorithme récursif de calcul de la fonction distance géodésique : (a) initialisation, (b) fin du 1er balayage, (c) fin du 2ème balayage

L'initialisation de d_X est égale à :

$$d_X(x) = 0, \quad \forall\ x \in X/Y$$
$$d_X(x) = m, \quad \forall\ x \in (Y \cup X^c)$$

La transformation donnant la nouvelle valeur de $d(x_0)$ est la même que précédemment si x_0 est inclus dans X, est inchangée si x_0 appartient à X^c. La figure III-26 illustre une telle opération.

Ces algorithmes récursifs sont très rapides, à la fois quand ils sont implantés par logiciel, ou sur des matériels spécialisés (J.C. KLEIN, R. PEYRARD, 1989, [45]).

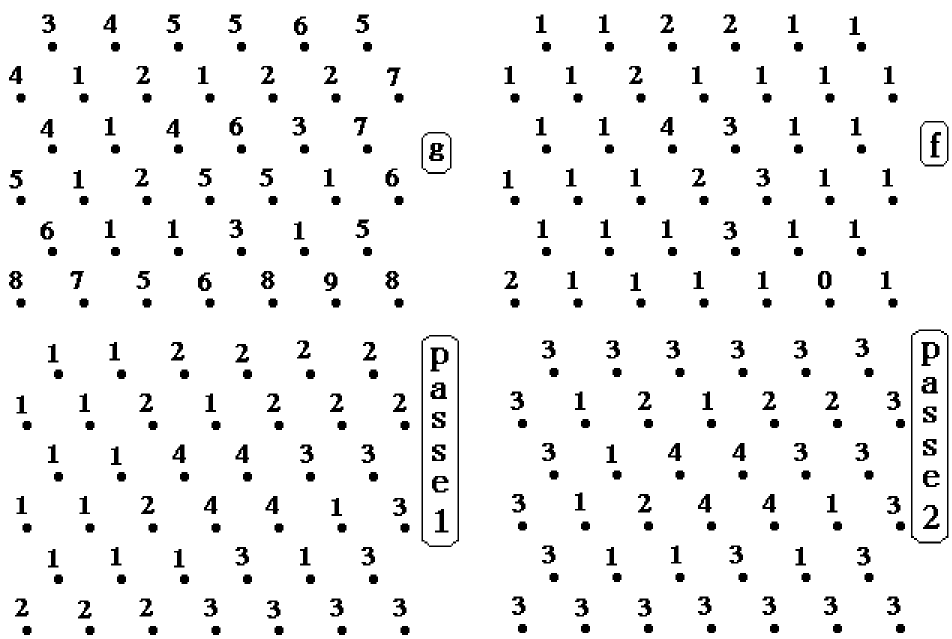


Figure III-27

Reconstruction récursive d'une fonction par une autre

Il existe également des algorithmes récursifs pour la reconstruction de fonction. Soit f, la fonction à reconstruire dans la fonction g. La nouvelle valeur de f au point x_0 est donnée par :

$$f(x_0) = \text{Inf}[g(x_0), \text{Sup}[f(x_0), f(x_1), f(x_2), f(x_3)]]$$

en trame hexagonale et à la première itération.

A la seconde itération, on pose :

$$f(x_0) = \mathrm{Inf}[g(x_0), \mathrm{Sup}[f(x_o), f(x_4), f(x_5), f(x_6)]]$$

Les deux étapes se répètent jusqu'à idempotence (Figure III-27).

On arrêtera là cette longue (mais on l'espère aussi exhaustive que possible) présentation des transformées géodésiques. Le prochain chapitre et le suivant introduisant la notion de ligne de partage des eaux illustreront de façon encore plus significative l'efficience de ces transformations. On verra en particulier que la ligne de partage des eaux est un autre exemple d'utilisation de la distance géodésique généralisée.

CHAPITRE 4

LA LIGNE DE PARTAGE DES EAUX

INTRODUCTION

La ligne de partage des eaux est l'outil de segmentation par excellence en morphologie mathématique. La notion de ligne de partage des eaux n'est pas en elle-même à proprement parler une notion purement issue de la morphologie mathématique. Le concept a son origine en topographie et en hydrogéologie. De nombreux auteurs se sont d'ailleurs penchés sur cette notion en essayant de définir des algorithmes permettant de la générer à partir de données topographiques (COLLINS, 1975, [32], PUECKER & DOUGLAS, 1975, [72]). Cependant, là où la ligne de partage des eaux devient intéressante, c'est lorsqu'elle apparaît comme le prolongement naturel de transformations morphologiques ensemblistes comme le squelette par zones d'influence, et surtout lorsqu'on utilise le concept sur des images à teintes de gris. La ligne de partage des eaux (en abrégé LPE) devient alors un puissant outil de segmentation. C'est dans cet esprit que la LPE a été introduite en morphologie mathématique (S. BEUCHER, C. LANTUEJOUL, 1979, [21]). De plus, comme on le verra dans ce chapitre, la construction de la LPE fait appel, de manière remarquablement appropriée, aux transformées morphologiques précédemment décrites : les transformations homotopiques et géodésiques. On consacrera ce chapitre à la présentation de la LPE, et à certains algorithmes permettant de l'obtenir. Le chapitre suivant abordera un algorithme de construction basé sur la représentation d'une fonction par son fléchage, ainsi que l'usage d'une distance géodésique généralisé pour définir la ligne de partage des eaux. On n'abordera pas ici l'utilisation de la LPE comme outil de segmentation réservant cela à la deuxième partie de cet ouvrage.

I) DEFINITION ET CONSTRUCTION DE LA LIGNE DE PARTAGE DES EAUX

I-1) Définition

Soit f une fonction numérique quelconque, qui peut être, par exemple, la représentation d'une image à niveaux de gris.

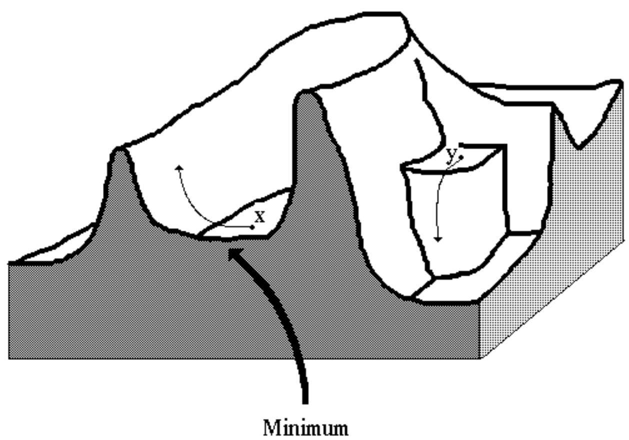


Figure IV-1
Minima d'une fonction

On a vu (cf. chapitre 1) que le sous-graphe G(f) d'une telle fonction défini comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ peut être utilisé pour étendre aux fonctions les transformations morphologiques binaires. Pour introduire la ligne de partage des eaux de f, notée LPE(f), nous allons considérer simplement la surface topographique limitée par le sous-graphe de f. Cette frontière de G(f) (égale en fait au graphe {x,f(x)} de f si celle-ci est continue) présente un certain nombre de structures topographiques caractéristiques : dômes, vallées, lignes de crêtes ou de thalwegs, etc... Parmi ces structures, deux nous intéressent pour le moment : les minima régionaux et les bassins versants de la topographie.

On a déjà introduit la notion de *minimum régional* d'une fonction (cf. Chapitre 3, § II-2). Les minima de f sont les composantes connexes de la surface topographique formant des creux ou cuvettes (Figure IV-1).

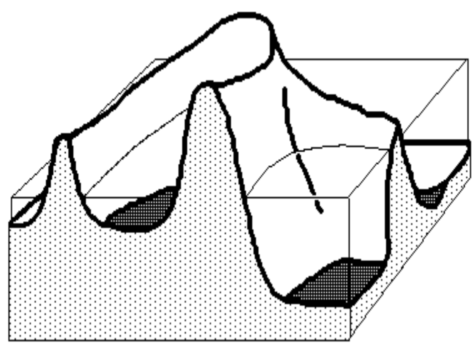


Figure IV-2
Inondation de la topographie

Imaginons donc que cette surface topographique soit trouée aux emplacements des minima. Plongeons alors lentement cette surface dans un lac (étendue d'eau supposée infinie pour la commodité de l'expérience). l'eau va passer par les trous en commençant par ceux qui percent les minima les plus profonds et va progressivement inonder le relief. A tout moment de l'inondation, les différents lacs délimités sur la topographie seront à la même altitude (Figure IV-2).

Supposons de plus que l'on empêche les eaux provenant de lacs différents (donc de minima différents) de se mélanger en construisant sur la surface topographique un barrage toutes les fois où une telle éventualité pourrait se produire (Figure IV-3). Lorsque la totalité de la surface topographique aura été engloutie, seuls les barrages émergeront, délimitant

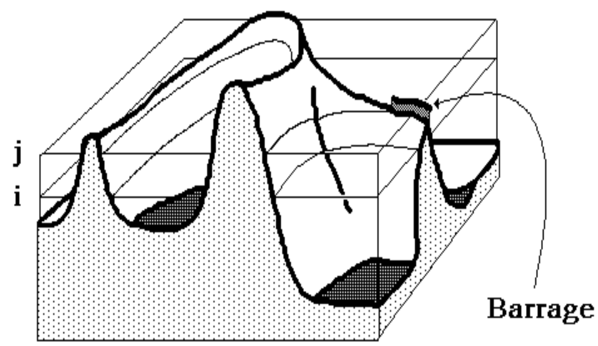


Figure IV-3

Construction d'un barrage entre les différents bassins versants

des lacs en nombre égal au nombre de minima de la fonction f. Ces barrages constituent ce qu'on appelle la *ligne de partage des eaux* de f. Quant aux lacs, ce sont les *bassins versants* associés aux minima de f (Figure IV-4).

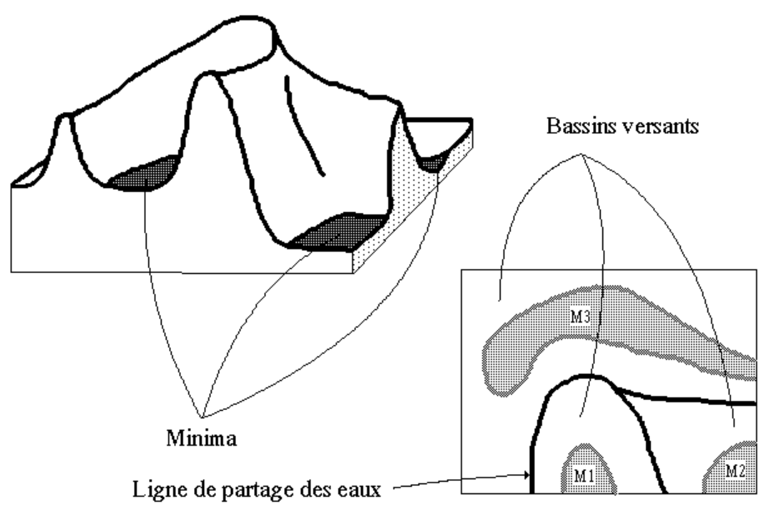


Figure IV-4

Ligne de partage des eaux et bassins versants d'une fonction

I-2) Construction de la LPE

Cette définition de la ligne de partage des eaux en termes d'inondation présente également l'avantage de fournir un algorithme direct pour sa construction. Cet algorithme est basé sur la reconstruction des seuils successifs de la fonction f à l'aide du squelette par zones d'influence géodésiques. Décrivons-le en détail à l'aide d'un exemple.

Soit f une fonction digitalisée, et désignons par $Z_i(f)$ l'ensemble des points x d'altitude inférieure ou égale à i.

$$Z_i(f) = \{x : f(x) \leq i\} = Y_i^c(f)$$

Considérons la plus petite altitude i_o correspondant à un seuil $Z_{i_o}(f)$ non vide. $Z_{i_o}(f)$ peut avoir plusieurs composantes connexes, chacune d'elles étant alors par définition un minimun régional de f. Examinons alors le seuil $Z_{i_o+1}(f)$ immédiatement supérieur. 0n a bien entendu :

$$Z_{i_o+1}(f) \supset Z_{i_o}(f)$$

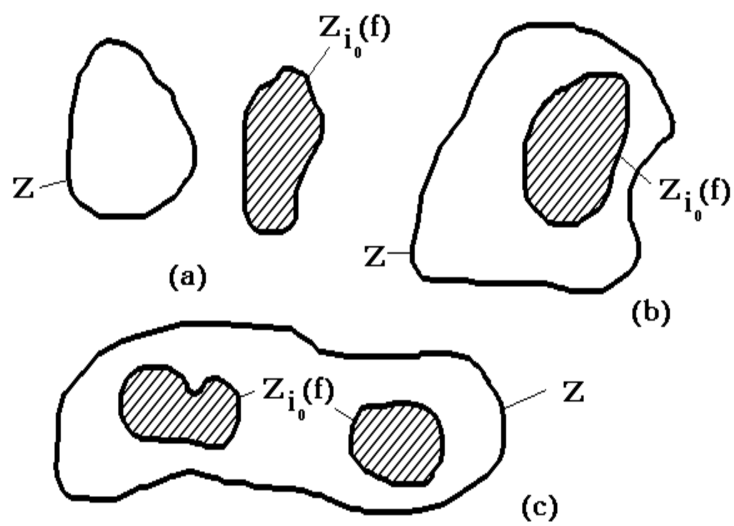


Figure IV-5

Relations entre les composantes connexes de deux seuils successifs

Soit Z, une composante connexe de $Z_{i_o+1}(f)$. Il y a trois relations possibles entre Z et $Z_{i_o}(f)$ (Figure IV-5) :

- Ou bien, $Z \cap Z_{i_o}(f) = \emptyset$. Dans ce cas, Z est un minimum régional de f à l'altitude i_o.

- Ou encore, $Z \cap Z_{i_o}(f)$ est non vide et connexe. Dans ce cas, Z représente le niveau $(i_o + 1)$ du lac produit par l'inondation du minimum régional $Z_{i_o}(f) \cap Z$.

- Enfin $Z_{i_o}(f) \cap Z$ peut être non vide et formé de plusieurs composantes connexes. Dans ce cas, Z est la réunion des eaux provenant des différents minima régionaux composant $Z_{i_o}(f) \cap Z$. Comme cette jonction n'est pas autorisée, il faut donc construire la ligne de partage des eaux séparant ces différents lacs. Pour cela, on construit les zones d'influence géodésiques

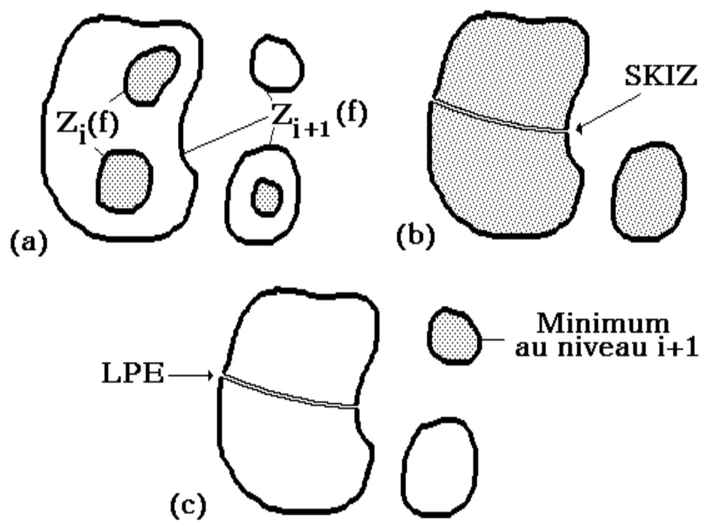


Figure IV-6

Construction de la LPE par SKIZ géodésique : étape initiale (a), SKIZ géodésique du seuil i dans le seuil i+1 (b), ajout des minima à ce niveau

(cf. chapitre 3) de $Z_{i_o}(f) \cap Z$ dans Z (Figure IV-6). Chaque zone d'influence constitue alors un bassin versant, ou du moins sa restriction au niveau $i_o + 1$, associé à chaque minimum régional (composante connexe) de $Z_{i_o}(f) \cap Z$.

Reprenons alors la totalité du seuil $Z_{i_o+1}(f)$. Comme ce qui vaut pour une composante connexe de $Z_{i_o+1}(f)$ vaut pour toutes, les bassins versants de f au niveau $i_o + 1$ seront constitués des zones d'influence géodésiques de $Z_{i_o+1}(f)$ dans $Z_{i_o+1}(f)$ auxquelles viennent s'ajouter les minima régionaux au niveau $i_o + 1$ (c'est-à-dire les composantes connexes de $Z_{i_o+1}(f)$ d'intersection vide avec $Z_{i_o+1}(f)$).

Il suffit alors de réitérer cette procédure de construction pour les niveaux $i_o + 2$, $i_o + 3$, etc... . De façon plus formelle, on peut décrire cet algorithme à l'aide de l'ordinogramme suivant (f sera supposée prendre ses valeurs entre 0 et N).

Initialisation :

$$W_o = m_o(f)$$

$m_o(f)$ désigne les minima de f à l'altitude nulle et W_o, la section des bassins versants de f au même niveau.

Pour i = 1 jusqu'à i = N, calculer :

$$W_i = [SKIZ_{Z_i(f)} (W_{i-1})] \cup m_i(f)$$

le premier terme désignant le squelette par zones d'influence géodésiques de W_{i-1}, section des bassins versants de f au niveau i-1 dans le seuil de f au niveau i, et le second terme étant constitué des minima de f à l'altitude i. Ce dernier terme peut être calculé pour chaque niveau par l'opération suivante :

$$m_i(f) = Z_i(f) \;/\; R_{Z_i(f)}(Z_{i-1}(f))$$

C'est la différence entre le seuil i et la reconstruction géodésique du seuil i-1.

A la fin de la procédure, W_N représente les bassins versants de f, et :

$$LPE(f) = W_N^c$$

I-3) Avatars et pièges de la LPE

On peut définir une transformation duale de la LPE d'une fonction, en considérant les maxima et un ruissellement à partir de ces maxima. On obtient ainsi une transformée dénommée *ligne de cols* de f. On constate immédiatement que la ligne de cols n'est autre que la ligne de partage des eaux de -f.

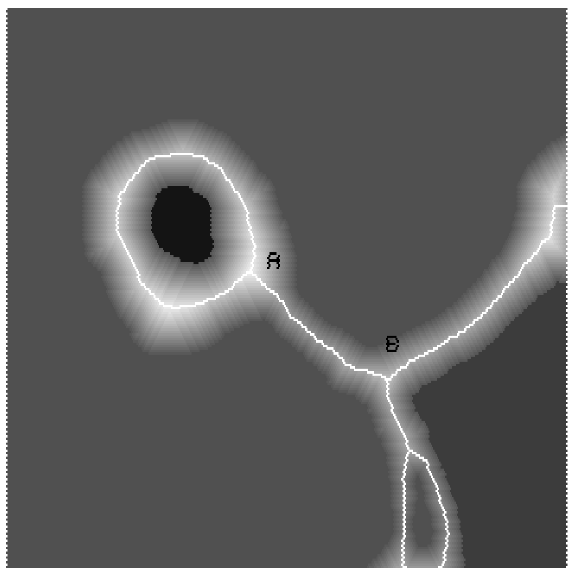


Figure IV-7
Erreurs dans la construction de la LPE

La ligne de partage des eaux telle qu'elle est réalisée par l'algorithme précédent n'est pas tout-à-fait exacte. En effet, il peut arriver qu'une portion de LPE sépare le même bassin versant. C'est le cas par exemple de la fonction représentée à la figure IV-7. L'arc AB segmente le même bassin versant. Une telle ligne de partage est appelée *ligne de partage locale*. On verra plus loin que d'autres procédures de construction de la LPE génèrent à la fois des LPE régionales ou vraies (c'est-à-dire séparant des bassins versants différents) et des LPE locales, à l'intérieur d'un unique bassin versant. Ce phénomène est similaire à celui déjà évoqué pour le SKIZ binaire. En fait, il provient de la même cause.

De même, il est faux de croire que la LPE passe par les lignes de crête du relief. On en verra plus loin quelques contre-exemples (cf. Figure IV-8).

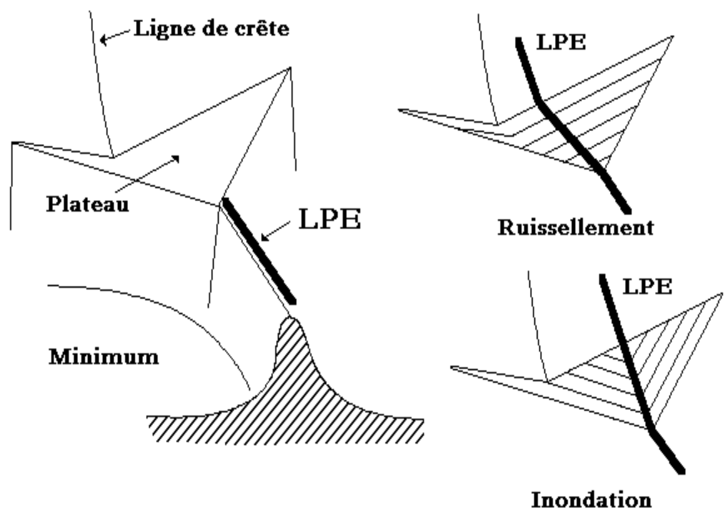


Figure IV-8

Différentes LPE selon qu'on les génère par inondation ou par ruissellement

Il existe d'autres façons de définir la ligne de partage des eaux. Une approche différente consiste à l'introduire en considérant de l'eau qui ruisselle sur le relief. Une goutte d'eau placée en un point du graphe de f s'écoule et finit par atteindre un minimum régional. Si le même minimum est toujours atteint, le point de départ de la goutte appartiendra alors au bassin versant associé au minimum précité. Mais, il peut arriver que plusieurs chemins descendants soient envisageables, chacun d'eux conduisant à un minimum différent. Dans ce cas, le point de départ de la goutte appartient à la ligne de partage des eaux. Cette définition de la LPE est plus difficile à mettre en oeuvre. De plus, la ligne de partage des eaux ainsi obtenue est différente de la ligne de partage par inondation de la topographie. La différence est due, entre autres, au comportement de l'eau sur les zones plates (plateaux, glacis) du relief. On a vu, dans le cas de la LPE par inondation, que l’eau envahit les zones plates par propagation géodésique à partir du bord descendant (Figure IV-8-a). Dans le cas de la LPE par ruissellement, il importe de définir la façon dont l’écoulement se propage sur un plateau. Il peut se faire là encore par propagation géodésique mais cette fois à partir du bord ascendant du plateau (Figure IV-8-b).

De plus, la LPE par ruissellement n’est pas toujours une ligne, mais peut être parfois épaisse. On a alors affaire à une *zone de partage des eaux* ou ZPE (F. MAISONNEUVE, 1982, [57]). Considérons en effet la structure dessinée à la figure IV-9. Cette structure représente ce qu’on appelle une "boutonnière" en géomorphologie. Essayons de mettre en évidence la LPE par écoulement. Il est clair que la crête (xz) appartient à ladite LPE, puisque tout point de (xz) est origine d’un chemin descendant soit vers le minimum m_1, soit vers m_2.

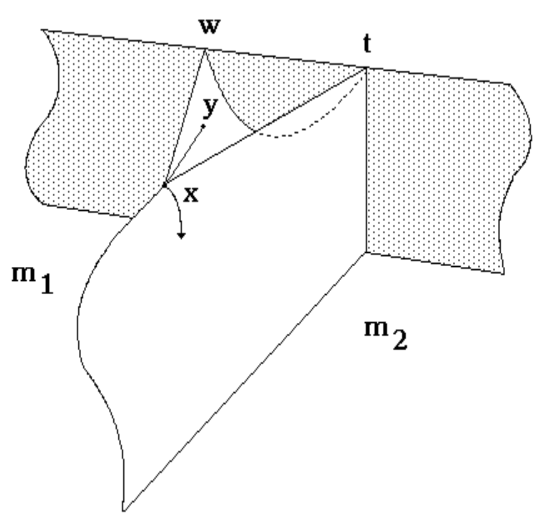


Figure IV-9

Structure en boutonnière

Considérons maintenant un point y appartenant à la boutonnière (c’est-à-dire la région délimité par le triangle (xwt). Tous les chemins descendants d’origine y passent nécessairement par x. Il s’ensuit donc que y est un point du partage des eaux, comme tous les points de la boutonnière. On exhibe ainsi une zone de partage des eaux d’épaisseur non nulle, et dont l’extension peut même être assez importante.

Une telle ZPE n'apparaît pas dans l'algorithme de ligne de partage par inondation. En effet, si le barrage au point x bloque momentanément l'inondation, celle-ci se produira à une altitude supérieure car les points appartenant aux crêtes (xw) ou (xt) n'appartiennent pas à la LPE par inondation. En fait, ce comportement est tout à fait conforme au phénomène physique de l'inondation : si vous plongez une surface topographique quelconque dans un lac, il est certain que tous les points de cette surface seront inondés.

On voit également pourquoi la ligne de partage des eaux par ruissellement est plus difficile à manipuler : il est nécessaire, pour réaliser cette "ligne" de partage, de mettre en évidence les points de bifurcation des eaux (comme le point x) mais également de tenir compte de leur amont. Cette *remontée vers l'amont* pose certains problèmes algorithmiques complexes (F. MEYER, 1987, [66]).

Il existe de nombreux algorithmes de construction de la LPE. Sous des dehors différents dûs aux moyens dont on dispose pour les réaliser, ces algorithmes se divisent en deux classes : ceux basés sur l'inondation à partir des minima, et ceux basés sur la recherche de lignes de partage des eaux locales. L'algorithme présenté plus haut appartient bien sûr au premier groupe. Des versions plus récentes (P. SOILLE, L. VINCENT, 1990, [86] ; F. MEYER, 1989, [68]) utilisant l'étiquetage des minima permettent notamment de séparer facilement les lignes de partage locales des lignes régionales. On présentera au chapitre 5 un algorithme appartenant au deuxième groupe. Appartenant aussi à ce groupe, figurent les algorithmes utilisant les amincissements numériques. L'usage de ces transformations a également l'avantage de mettre en lumière les liens existant entre la LPE et le squelette numérique.

II) LPE, AMINCISSEMENTS NUMERIQUES ET SQUELETTE DE FONCTIONS

Commençons par définir l'amincissement et l'épaississement d'une fonction.

II-1) Amincissement, épaississement : définition

On peut étendre la définition binaire de l'épaississement ou de l'amincissement par un doublet $T = (T_1,T_2)$ d'éléments structurants plans à une fonction f au moyen de la procédure évoquée au chapitre 1 : partant du sous-graphe G(f) de f, l'amincissement de ce sous-graphe par T produit un ensemble tridimensionnel $G(f) \circ T$ qui n'est pas le sous-graphe d'une fonction, car l'amincissement n'est pas une transformation croissante. On pose alors :

$$G(f \circ T) = \mathcal{U}[G(f) \circ T]$$

L'ombre de $G(f) \circ T$ construit un ensemble tridimensionnel (Figure IV-10), sous-graphe d'une nouvelle fonction que nous appellerons aminci de f par T, fonction notée $f \circ T$.

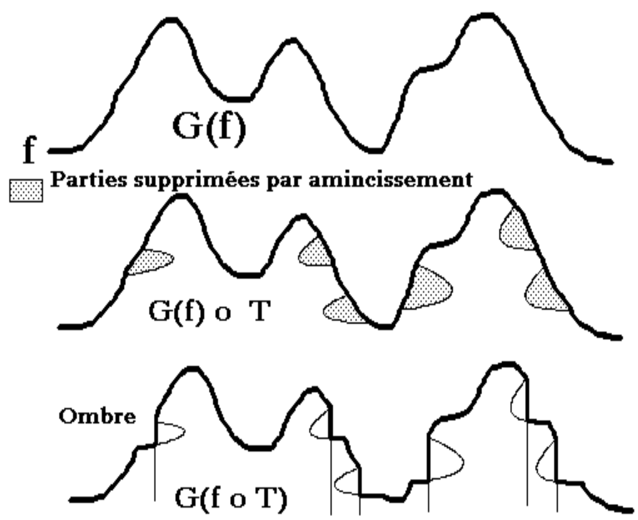


Figure IV-10

Construction de l'amincissement numérique

Les éléments structurants étant plans (cette restriction est fondamentale), on peut calculer le seuil $X_\lambda(f \circ T)$. On trouve :

$$X_\lambda(f \circ T) = \bigcup_{\mu \geq \lambda} [X_\mu(f) \circ T]$$

On peut alors donner de l'amincissement une formulation analytique. Ré-écrivons $X_\mu(f) \circ T$:

$$X_\mu(f) \circ T = X_\mu(f) \cap [(X_\mu(f) \ominus \check{T}_1) \cap (X^c_\mu(f) \ominus \check{T}_2)]^c$$

avec $T = (T_1, T_2)$.

Soit :

$$X_\mu(f) \circ T = [X^c_\mu(f) \oplus \check{T}_1) \cup (X_\mu(f) \oplus \check{T}_2)] \cap X_\mu(f)$$

Un point x quelconque du domaine de définition de f appartient à $X_\mu(f) \circ T$ si et seulement si :

$$\text{et} \begin{cases} T_{1_x} \cap X^c_\mu(f) \neq \emptyset \quad \text{ou} \quad T_{2_x} \cap X_\mu(f) \neq \emptyset \\ x \text{ appartient à } X_\mu(f) \end{cases}$$

De même, x appartient à $X_\lambda(f \circ T)$ s'il existe au moins une valeur $\mu \geq \lambda$ pour laquelle les conditions ci-dessus sont satisfaites, soit :

$$x \in X_\lambda(f \circ T) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \ \mu \geq \lambda, \text{ tel que :} \\ \qquad f(x) \geq \mu \quad \text{et} \\ \operatorname*{Inf}_{y \in T_{1_x}} f(y) < \mu \quad \text{ou} \quad \operatorname*{Sup}_{y \in T_{2_x}} f(y) \geq \mu \end{cases}$$

Par complémentation, on peut écrire :

$$x \notin X_\lambda(f \circ T) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < \lambda \\ \quad \text{ou} \\ \operatorname*{Inf}_{y \in T_{1_x}} f(y) \geq \lambda \quad \text{et} \quad \operatorname*{Sup}_{y \in T_{2_x}} f(y) < \lambda \end{cases}$$

Supposons que $f(x) \leq \operatorname*{Sup}_{y \in T_{2_x}} f(y)$.

Pour tout λ tel que $f(x) < \lambda$, on peut écrire d'après la condition précédente que x n'appartient pas à $X_\lambda(f \circ T)$. De même, pour tout λ tel que

$f(x) \geq \lambda$, on a :

$$\lambda \leq f(x) \leq \operatorname*{Sup}_{y \in T_{2_x}} f(y)$$

ce qui entraîne que x appartient à $X_\lambda(f \circ T)$.

Comme :

$$(f \circ T)(x) = \operatorname{Sup} \{\lambda : x \in X_\lambda(f \circ T)\}$$

on constate que la condition :

$$f(x) \leq \operatorname*{Sup}_{y \in T_{2_x}} f(y)$$

conduit à :

$$(f \circ T)(x) = f(x)$$

De la même manière, la condition :

$$f(x) > \operatorname*{Inf}_{y \in T_{1_x}} f(y)$$

fait que l'amincissement ne modifie pas la fonction f. Par complémentation, on peut donc écrire :

si $\operatorname*{Sup}_{y \in T_{2_x}} f(y) < f(x) \leq \operatorname*{Inf}_{y \in T_{1_x}} f(y)$, alors pour tout $\lambda \leq \operatorname*{Sup}_{y \in T_{2_x}} f(y)$, $x \in X_\lambda(f \circ T)$ et pour tout λ compris dans l'intervalle semi-ouvert $] \operatorname*{Sup}_{y \in T_{2_x}} f(y), \operatorname*{Inf}_{y \in T_{1_x}} f(y)]$ non vide, alors $x \notin X_\lambda(f \circ T)$.

On aboutit ainsi à la définition analytique de l'amincissement :

$$(f \circ T)(x) = \operatorname*{Sup}_{y \in T_{2_x}} f(y)$$

si et seulement si :

$$\operatorname*{Sup}_{y \in T_{2_x}} f(y) < f(x) \leq \operatorname*{Inf}_{y \in T_{1_x}} f(y)$$

$$(f \circ T)(x) = f(x), \text{ sinon.}$$

On peut également définir l'épaississement $f \odot T$ d'une fonction par dualité par rapport à la réflexion (cf. chapitre 1). On pose :

$$f \odot T = [(-f) \circ T^{*}], \qquad T^{*}, \text{ dual de } T$$

Si l'élément T est plan, on peut écrire :

$$X_{\lambda}(f \odot T) = X_{\lambda}[-(-f \circ T^{*})] = Y^{c}_{-\lambda}[-f \circ T^{*}]$$

$$= \left[\bigcup_{\mu \geq -\lambda} [Y_{\mu}(-f) \circ T^{*}]\right]^{c} = \bigcap_{\mu \geq -\lambda} \left[Y_{\mu}(-f) \circ T^{*}\right]^{c}$$

$$= \bigcap_{\mu \geq -\lambda} [Y^{c}_{\mu}(-f) \odot T] = \bigcap_{\mu \geq -\lambda} [X_{-\mu}(f) \odot T]$$

soit :

$$X_{\lambda}(f \odot T) = \bigcap_{\mu \leq \lambda} [X_{\mu}(f) \odot T]$$

La formulation analytique de l'épaississement devient :

$$(f \odot T)(x) = \operatorname{Inf}_{y \in T_{1_x}} f(y)$$

si et seulement si :

$$\operatorname{Sup}_{y \in T_{2_x}} f(y) \leq f(x) < \operatorname{Inf}_{y \in T_{1_x}} f(y)$$

$$(f \odot T)(x) = f(x) \quad \text{sinon.}$$

On fera attention à l'emplacement des inégalités strictes et larges dans les deux définitions.

On peut également définir une autre transformation en réalisant l'ombre de l'épaissi du sous-graphe G(f) :

$$G(g) = \mathcal{U}[G(f) \odot T]$$

Cette opération produisant une fonction transformée plus grande que celle produite par l'épaississement est donc appelée *sur-épaississement* et notée $f \,\bar{\odot}\, T$ (Figure IV-11).

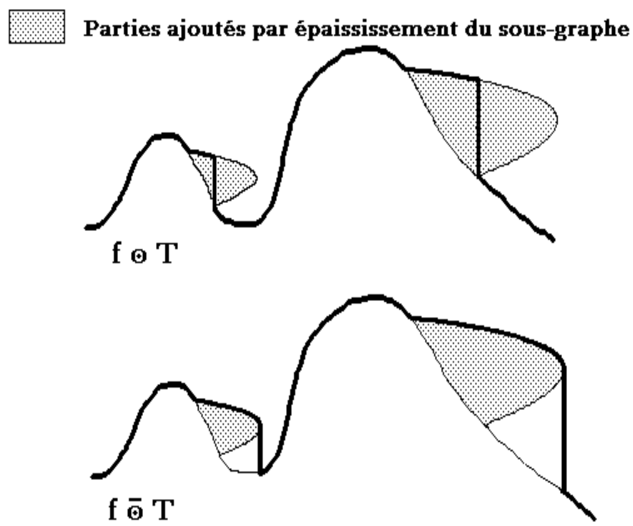


Figure IV-11

Epaississement et sur-épaississement de fonction

On peut écrire :

$$X_\lambda(f \,\bar{\odot}\, T) = \bigcup_{\mu \geq \lambda} [X_\mu(f) \odot T]$$

La définition analytique du sur-épaississement devient alors :

$$(f \,\bar{\odot}\, T)(x) = \operatorname{Inf}_{y \in T_{1_x}} f(y)$$

si et seulement si :

$$\operatorname{Sup}[f(x), \operatorname{Sup}_{y \in T_{2_x}} f(y)] < \operatorname{Inf}_{y \in T_{1_x}} f(y)$$

$$(f \,\bar{\odot}\, T)(x) = f(x) \quad \text{sinon.}$$

Par rapport à celle de l'épaississement, cette définition se caractérise par un affaiblissement des conditions d'inégalité : on n'exige plus que la valeur du point central soit comprise entre le sup et l'inf.

En fait, le sur-épaississement n'est pas utilisé car il conduit le plus souvent à des transformées triviales, dues au fait qu'il ne préserve pas les traits caractéristiques du relief défini par le graphe de f. En revanche, les épaississements et amincissements numériques permettent l'introduction de transformations homotopiques sur les fonctions.

II-2) Transformées homotopiques numériques

Le prolongement aux fonctions de la notion d'homotopie peut s'envisager de différentes manières. Il est bien évident que la considération de l'ensemble tridimensionnel constitué par le sous-graphe G(f) d'une fonction f et l'application à cet ensemble des définitions du chapitre 1 ne peut conduire qu'à des résultats sans intérêt **:** tous les sous-graphes de fonctions définies sur un domaine connexe sont des ensembles simplement connexes de $\mathbb{R}^3$.

Une première approche consiste à considérer la surface gauche de $\mathbb{R}^3$ constituée par la frontière du sous-graphe de f (ou simplement par le graphe de f, si celle-ci est continue), mais surface privée des minima de f : la surface est trouée aux emplacements des minima (comme pour la définition de la LPE par inondation). On dira que deux fonctions f et f' sont *semi-homotopiques inférieurement* si et seulement si les ensembles de $\mathbb{R}^3$ définis par $\partial[G(f)]/m(f)$ et $\partial[G(f')]/m(f')$ (frontières des sous-graphes moins les minima) sont homotopiques. Les deux fonctions ont la même configuration de minima. De la même façon, les deux fonctions f et f' sont *semi-homotopiques supérieurement* si et seulement si les ensembles $\partial[G(f)]/M(f)$ et $\partial[G(f')]/M(f')$ (frontières des sous-graphes trouées aux emplacement des maxima) sont homotopiques.

Pour que ces deux fonctions soient homotopiques, il ne suffit pas qu'elles soient à la fois semi-homotopiques inférieurement et supérieurement, il faut encore que la répartition conjointe des minima et des maxima soit respectée. Considérant les chemins que l'on peut tracer sur les graphes de f et de f' et en particulier les chemins fermés, les mêmes classes de chemins doivent être présentes pour les deux ensembles, mais de plus, les trous éventuellement entourés ces chemins fermés doivent être de même nature : tous deux des minima ou des maxima (J. SERRA, 1982, [80] ; F. MEYER, 1988, [67]).

A cette définition de l'homotopie, on substitue généralement une définition plus contraignante, mais également plus facile à manipuler. On dira que deux fonctions f et f' sont homotopiques si pour tout λ, les seuils $X_\lambda(f)$ et $X_\lambda(f')$ sont des ensembles homotopiques. La contrainte supplémentaire apportée par cette définition est évidente : non seulement les fonctions f et f' doivent avoir même répartition de leurs minima et maxima, mais, de plus, leurs altitudes respectives doivent être identiques (Figure IV-12). Lorsque les transformations homotopiques utilisées sont définies à partir de seuils de la fonction (et c'est le cas présentement), cette définition de l'homotopie est largement suffisante.

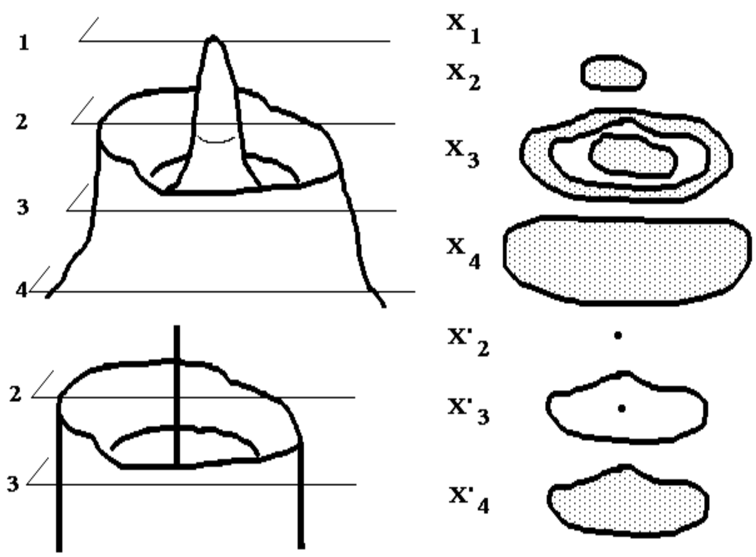


Figure IV-12

Définition restrictive de l'homotopie pour les fonctions

Tous les éléments structurants préservant l'homotopie dans les épaississements et amincissements binaires peuvent être utilisés en numérique. En effet, en dépit du fait que le seuil au niveau λ de $f \odot T$, T préservant l'homotopie, soit défini comme l'intersection des épaissis des seuils supérieurs ou égaux à λ, l'homotopie est conservée, car :

- $X_\lambda(f \odot T)$ ne peut pas avoir plus de composantes connexes que $X_\lambda(f)$. En effet, $X_\lambda(f)$ ayant même homotopie que $X_\lambda(f) \odot T$, ces éventuelles composantes ne pourraient être apportées que par les $X_\mu(f) \odot T$, $\forall\ \mu < \lambda$. Mais leur intersection avec $X_\lambda(f) \odot T$ élimine cette possibilité.

- $X_\lambda(f \odot T)$ pourrait contenir des trous supplémentaires. Là encore, ces trous ne pourraient provenir que d'un $X_\mu(f) \odot T$, $\mu < \lambda$. Mais comme $X_\mu(f) \odot T$ a même homotopie que $X_\mu(f)$, le trou existerait donc dans cet ensemble, donc dans $X_\lambda(f)$, ce qui est impossible.

On voit également pourquoi le sur-épaississement n'est pas intéressant : il ne préserve pas l'homotopie (du moins dans le sens restrictif qu'on lui a donné à partir des seuils) même lorsque les éléments structurants sont homotopiques.

L'exemple classique de transformation homotopique sur les fonctions est, comme pour les ensembles, le *squelette numérique* (GOETCHARIAN, 1980, [40]).

II-3) Le squelette numérique

Dénommer "squelette" le prolongement aux fonctions des transformations définies en binaire à l'aide d'amincissements est assez ambigu voire même dangereux. En effet, on risque, en procédant ainsi d'attribuer à cette transformation les propriétés et également les défauts des squelettes connexes ensemblistes. En particulier :

- Rien ne vient étayer, avec les transformées numériques, la notion d'ensemble maximal. On a vu que le squelette ensembliste est défini comme le lieu des centres des boules maximales incluses dans l'ensemble. Qu'en est-il pour les fonctions ? Existe-t-il une définition similaire, et quels peuvent être les ensembles maximaux de $\mathbb{R}^3$ dont le squelette serait le centre ?

- Le squelette numérique est généralement réalisé à l'aide de séquences d'amincissements (c'est d'ailleurs de cette façon qu'il a été introduit par GOETCHARIAN). Or, on a vu dans le cas binaire l'insuffisance de telles transformations. Il y a fort à parier que les défauts de ces transformations seront, en numérique, encore plus cruciaux. Pour s'en convaincre, il suffit de constater, dans le cas hexagonal, que l'élément structurant L et ses rotations ne permettent pas d'obtenir un amincissement complet de la fonction et donc un résultat proche de ce qu'on attend d'une transformation appelée "squelette". Seuls les éléments M sont utilisables.

Tout ceci fait que la notion de squelette numérique doit être précisée. Pour cela, on peut partir du squelette ensembliste par ouvertures introduit au chapitre 1, et plus précisément de son expression par amincissements. On a vu que ce squelette peut être obtenu par itérations d'amincissements par un ensemble $\mathcal{T}$ d'éléments structurants :

$$\mathcal{T} = \{T_{a,b}\} = \{(B_a, L_b), \ \forall \ a,b \in B\}$$

Soit donc une fonction f. Par extension, on définira le squelette de cette fonction comme la transformée obtenue après une séquence infinie d'amincissements par le même ensemble $\mathcal{T}$ d'éléments structurants plans :

$$S(f) = \lim_{n \to \infty} (f \circ \mathcal{F})^n$$

Avec $(f \circ \mathcal{F})^n = \underbrace{((f \circ \mathcal{F}), .., \circ \mathcal{F})}_{n \text{ fois}}$

L'amincissement de f par un ensemble d'éléments structurants $\mathcal{F} = \{T_i\}$ est défini par :

$$f \circ \mathcal{F} = \operatorname{Inf}_i (f \circ T_i)$$

On sait que :

$$G(f \circ T_i) = \mathcal{U}[G(f) \circ T_i]$$

On peut alors écrire :

$$G(f \circ \mathcal{F}) = \bigcap_i [G(f \circ T_i)]$$
$$= \bigcap_i [\mathcal{U}(G(f) \circ T_i)]$$

Montrons que dans le cas des éléments structurants qui nous préoccupent, tout point x appartenant à l'intersection des ombres $\mathcal{U}(G(f) \circ T_i))$ appartient à l'ombre des intersections.

Soit un point x appartenant à $\mathcal{U}(G(f) \circ T_i)$, $\forall \ T_i \in \mathcal{F}$. Alors :

$$x \in \bigcap_i [\mathcal{U}(G(f) \circ T_i)]$$

Montrons alors que :

$$x \in \bigcap_i [(G(f) \circ T_i)]$$

autrement dit que :

$$\bigcap_i [\mathcal{U}(G(f) \circ T_i)] \subset \mathcal{U} [\bigcap_i (G(f) \circ T_i)]$$

L'inclusion inverse étant triviale (l'ombre est un dilaté), on aura ainsi démontré l'égalité des deux membres de l'expression.

Le point x sépare l'ensemble $\mathcal{F}$ des éléments structurants en deux groupes :

$$\mathcal{F}_K = (T_k \text{ tel que } x \in (G(f) \circ T_k))$$

$$\mathcal{F}_{K'} = (T_{k'} \text{ tel que } x \notin (G(f) \circ T_{k'}))$$

Examinons le deuxième groupe. On le supposera non vide (sinon la conclusion est immédiate). Il existe donc un élément structurant $T_{k'_1}$ appartenant à $\mathcal{F}_{K'}$, tel que $x \notin G(f) \circ T_{k'_1}$. Mais x appartenant à $\mathcal{U}(G(f) \circ T_{k'_1})$, il existe un point y_1 appartenant à la demi-droite $]x,+\infty[$ tel que $y_1 \in G(f) \circ T_{k'_1}$. Le point x étant aminci par $T_{k'_1}$, x appartient à $G(f_B)$, sous-graphe de l'ouvert de f et x est point-frontière du sous-graphe de f. Le point y_1 au-dessus de x est donc également point-frontière. De plus $y_1 \in (G(f) \circ T_k)$, $\forall\ T_k \in \mathcal{F}_K$. En effet si cela n'était pas le cas, y_1 serait aminci par T_k. Or étant point-frontière, cela signifierait que y serait inclus dans un hexagone d'orientation identique à celui composant l'élément T_k. Il en serait alors naturellement de même pour x. On aurait alors $x \notin (G(f) \circ T_k)$ ce qui contredit l'hypothèse initiale.

On peut donc écrire que y_1 divise $\mathcal{F}$ en deux groupes :

$$\mathcal{F}_{K_1} = (T_k \text{ tel que } y_1 \in G(f) \circ T_k)$$

$$\mathcal{F}_{K'_1} = (T_{k'} \text{ tel que } y_1 \notin G(f) \circ T_{k'})$$

Avec :

$$\mathcal{F}_K \cup (T_{k'_1}) \subset \mathcal{F}_{K_1}$$

En réitérant cette procédure, comme $\mathcal{F}$ est fini, on arrive après un nombre fini d'itérations à mettre en évidence un point y_n, tel que :

$$\forall \ T_i \in \mathcal{F}, \qquad y_n \in (G(f) \circ T_i)$$

Mais comme y_n est au-dessus de x, on peut écrire :

$$y_n \in \bigcap_i (G(f) \circ T_i) \Rightarrow x \in \mathcal{U}[\bigcap_i (G(f) \circ T_i]$$

ce qui démontre la proposition.

On a alors :

$$\begin{aligned} G(f \circ \mathcal{F}) &= \mathcal{U}[\bigcap_i (G(f) \circ T_i)] \\ &= \mathcal{U}[\bigcap_i (G(f) \ / \ (G(f) * T_i))] \\ &= \mathcal{U}[\bigcap_i (G(f) \cap \ (G(f) * T_i)^c)] \\ &= \mathcal{U}[G(f) \ / \ (\bigcup_i (G(f) * T_i))] \end{aligned}$$

On a vu au chapitre 1 que l'opération :

$$G(f)/ \ [\bigcup_i (G(f) * T_i)]$$

n'était autre que la transformation :

$$[G(f) \ominus B] \cup [G(f)/G(f)_B]$$

ré-écrite sous forme d'amincissements. On obtient donc :

$$G(f \circ \mathcal{F}) = \mathcal{U} \ [G(f) \ominus B) \cup (G(f)/G(f)_B]$$

Soit :

$$[G(f \circ \mathcal{F}) = (G(f) \ominus B) \cup \mathcal{U} \ \{G(f)/G(f)_B]$$

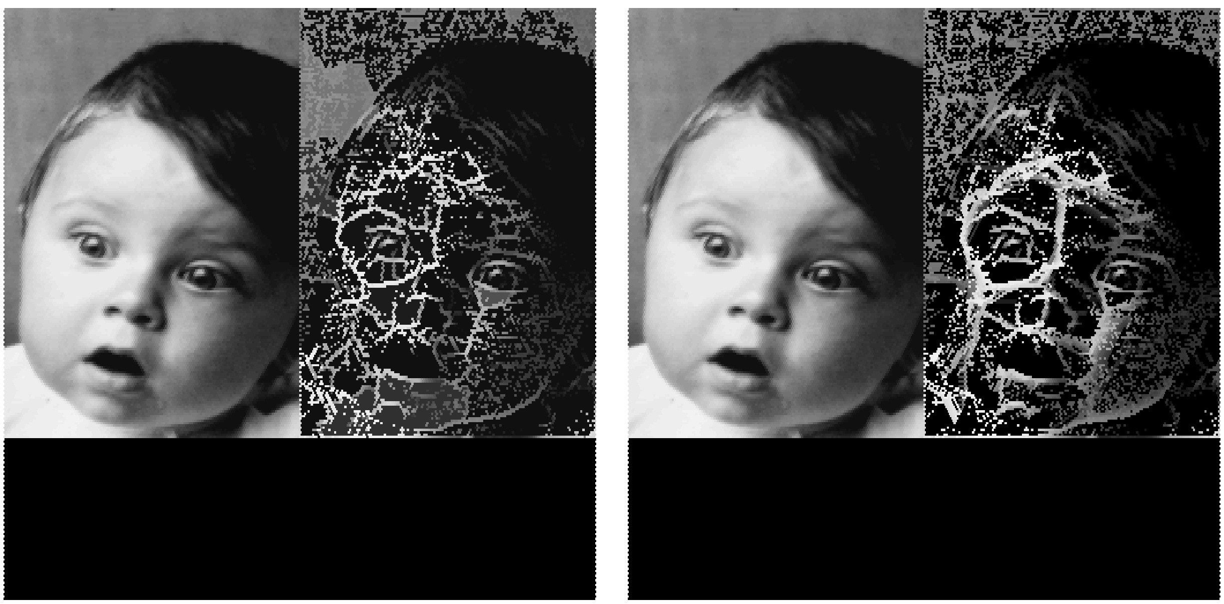
Que peut-on déduire de cette formule ? Essentiellement, que le squelette numérique par amincissement n'est pas identique au squelette que l'on obtiendrait par ouverture du sous-graphe de f par des disques de $\mathbb{R}^2$. La différence, en apparence minime, provient du fait que l'ombre de $G(f)/G(f)_B$

intervient dans la formule.

On pourrait néanmoins définir le squelette d'une fonction comme une fonction S'(f) dont le sous-graphe est donné par :

$$G(S'(f) = \bigcup_i \mathcal{U} \ [(G(f) \ominus iB)/(G(f) \ominus iB)_B]$$

Cette définition fournit un squelette comme l'illustre la figure IV-13-b, somme toute assez proche du squelette par amincissement (Figure IV-13-a). La différence essentielle entre ces deux définitions est que l'une peut s'écrire sous forme d'un amincissement de fonction alors que l'autre n'est simplement que la transformation en fonction (par le biais de l'ombre) de l'amincissement d'un ensemble tridimensionnel.



(a) (b)

Figure IV-13

Squelette numérique non connexe par amincissement (a), par ouvertures (ombre des résidus du sous-graphe) (b)

Le squelette par amincissement défini par extension aux fonctions du squelette par amincissement binaire (squelette non connexe) ne permet donc pas, en remontant à une formule par ouvertures, d'exhiber les ensembles maximaux dont les centres constitueraient le squelette par ouverture de la fonction. Seule la seconde définition le permet. Ces ensembles maximaux sont des cylindres dont l'axe passe par tout point x appartenant au support de S'(f) et dont la hauteur est égale à y, point des résidus de l'ouvert de G(f) $\ominus$ iB. A chaque point (x,y) appartenant aux résidus, on peut alors associer le rayon du cylindre et définir ainsi une fonction d'étanchéité q(x,y). Cette définition peut cependant entraîner que plusieurs cylindres maximaux aient le même axe. Soit alors (x,y_1) les coordonnées d'un de ces cylindres maximaux et (x,y_2) celles d'un autre cylindre de même axe. Si $y_2 < y_1$, on peut alors écrire :

$$q(x,y_1) < q(x,y_2)$$

On peut donc remplacer les cylindres maximaux par des "cônes" maximaux. Un cône est défini de la façon suivante :

Soit g une application monotone croissante définie sur la demi-droite [O,+∞[à valeurs positives ou nulles : $\forall\ x \geq y,\ g(x) \geq g(y) \geq 0$. Un cône est la portion de l'espace contenant la demi-droite [0,+∞[découpée par la rotation de la frontière du sous-graphe de g autour de l'axe [0,+∞[(Figure IV-14).

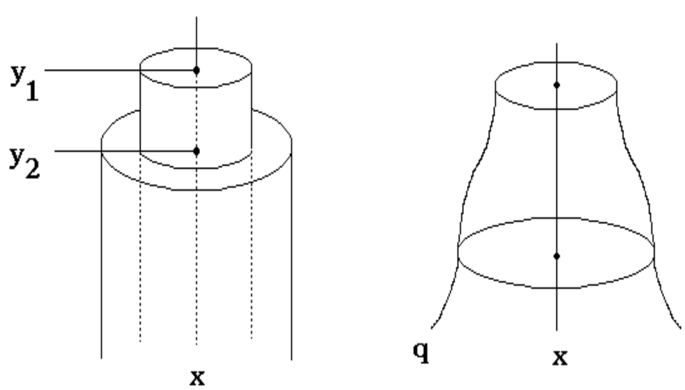


Figure IV-14
Cylindres emboîtés et cônes maximaux

Ainsi, à chaque demi-droite verticale d'origine {x, S'(f)(x)}, on peut associer un et un seul cône maximal formé de l'union de tous les cylindres maximaux centrés sur cette demi-droite.

Nous allons abandonner la transformée S'(f) pour revenir à S(f) et définir à partir de ce squelette par amincissements un squelette numérique connexe en effectuant l'amincissement de f par l'ensemble $\mathcal{T}$ d'éléments structurants constitués de :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \bar{2} & & 0 & & \\ & 1 & & 1 & & \bar{2} & \\ 1 & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & & & \end{array}$$

et de toutes ses rotations (en trame hexagonale; en trame carrée, les éléments structurants utilisés sont ceux décrits au chapitre 1).

Calculons dans le cas digital, le seuil au niveau i de $(f \circ \mathcal{T})$. On a :

$$X_i(f \circ \mathcal{T}) = \bigcup_{j \geq i} [X_j(f) \circ \mathcal{T}]$$

Calculons $X_j(f) \circ \mathcal{T}$. Désignons par $\mathcal{T}'$ l'ensemble des éléments structurants :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \cdot & & 0 & & \\ & 1 & & \mathbf{1} & & \cdot & \\ 1 & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & & & \end{array}$$

On peut effectuer alors la transformée par tout ou rien de $X_j(f)$ par $\mathcal{T}'$. Tous les points de $X_j(f)$ sélectionnés par cette transformation correspondent à l'une des configurations suivantes où, rappelons-le, (voir chapitre 1), 1 désigne les points de $X_j(f)$, (mais également de $X_j(f_B)$ étant donné la configuration utilisée), 2 désigne les points du résidu $X_j(f)/X_j(f_B)$ et 0 les points de $X_j^c(f)$:

0 0	2 0	1 0	2 0
1 **1** 0	1 **1** 2	1 **1** 0	1 **1** 2
1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1
1 1	1 1	1 1	1 1 etc..

Parmi toutes ces configurations, seuls les points de $X_j(f) * \mathcal{T}$ non adjacents à un point du résidu $X_j(f)/X_j(f_B)$ peuvent être conservés, c'est-à-dire les points de $X_j(f) * \mathcal{T}$ qui n'appartiennent pas à $[X_j(f)/X_j(f_B)] \oplus B$. L'amincissement s'écrit alors :

$$X_j(f) \circ \mathcal{T} = X_j(f)/[X_j(f) * \mathcal{T}') \cap ((X_j(f)/X_j(f_B)) \oplus B)^c]$$

Cette formule se simplifie. On trouve :

$$X_j(f) \circ \mathcal{T} = X_j(f) \circ \mathcal{T}') \cup [X_j(f) \cap ((X_j(f)/X_j(f_B)) \oplus B)]$$

d'où l'expression du seuil de l'aminci :

$$X_i(f \circ \mathcal{T}) = \bigcup_{j \geq i} [(X_j(f) \circ \mathcal{T}') \cup [X_j(f) \cap ((X_j(f)/X_j(f_B)) \oplus B)]$$

Une formulation plus explicite de cette transformation n'est pas facile à mettre en évidence. Certes, le premier membre de l'expression correspond au seuil au niveau i de l'aminci $f \circ \mathcal{T}'$. Mais le second membre n'est le seuil d'aucune fonction simple. Afin de l'expliciter, il faut introduire plusieurs notions.

Introduisons d'abord deux fonctionnelles Ω et Γ, définies à partir de deux fonctions f et g de la manière suivante :

$$\Omega(f,g) = f \text{ si et seulement si } f > g$$
$$\Omega(f,g) = -\infty \text{ sinon.}$$

De la même façon :

$$\Gamma(f,g) = g \text{ si et seulement si } f > g$$

$$\Gamma(f,g) = +\infty \text{ sinon.}$$

Démontrons alors que le deuxième membre de l'expression du seuil i de $f \circ \mathcal{T}$ est le seuil à la valeur i de la fonction h ci-dessous :

$$h = \mathrm{Inf}\ [\ \Gamma(f,\Omega(f,f_B) \oplus B)\ ,\ \Omega(f,\Gamma(f,f_B) \ominus B)\ ]$$

Calculons d'abord le seuil au niveau i de la fonction $\Omega(f,g)$. On trouve (cf. chapitre 1) :

$$X_i(\Omega) = \bigcup_{j \geq i} [X_j(f) \cap X_j^c(g)]$$

De la même façon, le seuil de $\Gamma(f,g)$ peut s'écrire :

$$X_i(\Gamma) = \bigcap_{k \leq i} [X_k^c(f) \cup X_k(g)]$$

Le seuil de $\Omega(f,f_B) \oplus B$ est alors égal à :

$$W_i = X_i[\Omega(f,f_B) \oplus B]$$
$$W_i = \bigcup_{j \geq i} [(X_j(f) \cap X_j^c(f_B)) \oplus B] = \bigcup_{j \geq i} Z_j$$

On peut alors écrire le seuil de la fonction $h = \Gamma(f,\Omega(f,f_B) \oplus B)$:

$$X_i(h) = \bigcap_{k \leq i} [X_k^c(f) \cup Z_k]$$
$$X_i(h) = \bigcap_{k \leq i} [X_k^c(f) \cup (\bigcup_{j \geq k} Z_j)] = \bigcap_{k \leq i} (A_k)$$

Le seuil de $\Gamma(f,f_B) \ominus B$ s'écrit :

$$M_i = X_i[\Gamma(f,f_B) \ominus B]$$
$$M_i = \bigcap_{k \leq i} [(X_k^c(f) \cup X_k(f_B)) \ominus B]$$

La fonction $k = \Omega(f,\Gamma(f,f_B) \ominus B)$ a alors pour seuil :

$$X_i(k) = \bigcup_{k \geq i} [X_k(f) \cap M_k^c]$$
$$X_i(k) = \bigcup_{k \geq i} [X_k(f) \cap (\bigcup_{j \leq k} [(X_j(f) \cap X_j^c(f_B)) \oplus B])]$$
$$X_i(k) = \bigcup_{k \geq i} [X_k(f) \cap (\bigcup_{j \leq k} (Z_j))] = \bigcup_{k \geq i} (B_k)$$

Calculons maintenant le seuil de Inf(h,k). Il est donné par :

$$Y_i = X_i(h) \cap X_i(k) = (\bigcap_{k \le i} A_k) \cap (\bigcup_{l \ge i} B_l)$$

$$Y_i = (\bigcap_{k \le i} A_k) \cap (B_i \cup B_{i+1} \cup \ldots \cup B_{i+n} \cup \ldots)$$

$$Y_i = \bigcup_{l \ge i}[(\bigcap_{k \le i} A_k) \cap B_l]$$

$$Y_i = \bigcup_{l \ge i}[\bigcap_{k \le i}(A_k \cap B_l)]$$

Calculons $A_k \cap B_l$ dans le cas où $k \le l$. On obtient :

$$A_k \cap B_l = [X_l(f) \cap (\bigcup_{j \ge k} Z_j) \cap (\bigcup_{j \le l} Z_j)]$$

$$A_k \cap B_l = X_l(f) \cap (\bigcup_{k \le j \le l} Z_j)$$

On peut alors écrire Y_i sous la forme :

$$Y_i = \bigcup_{l \ge i}[X_l(f) \cap (\bigcup_{i \le j \le l} Z_j)]$$

Développons cette formule de façon à mieux mettre en évidence ses différents termes. On a :

$$Y_i = (X_i \cap Z_i) \cup [X_{i+1} \cap (Z_i \cup Z_{i+1})] \cup [X_{i+2} \cap (Z_i \cap (Z_i \cup Z_{i+1} \cup Z_{i+2})]..$$

Soit encore :

$$Y_i = (X_i \cap Z_i) \cup (X_{i+1} \cap Z_i) \cup (X_{i+1} \cap Z_{i+1}) \cup (X_{i+2} \cap Z_i) \cup$$
$$(X_{i+2} \cap Z_{i+1}) \cup (X_{i+2} \cap Z_{i+2}) \cup \ldots\text{etc..}$$

Tous ces termes peuvent se regrouper de la manière suivante :

$$Y_i = [Z_i \cap (X_i \cup X_{i+1} \cup \ldots)] \cup [Z_{i+1} \cap (X_{i+1} \cup X_{i+2} \cup \ldots)] \cup \ldots.$$

Mais comme X_i, X_{i+1}, X_{i+2} etc.. sont des seuils successifs de la fonction f, on aboutit à :

$$Y_i = [Z_i \cap X_i] \cup [Z_{i+1} \cap X_{i+1}] \cup \ldots$$

Ce qui correspond à :

$$Y_i = \bigcup_{j \geq i} [Z_j \cap X_j(f)] = \bigcup_{j \geq i} [[(X_j(f)/X_j(f_B)) \oplus B] \cap X_j(f)]$$

et ce qui démontre la proposition.

Le squelette numérique d'une fonction f est donc le résultat de l'itération de l'amincissement défini par :

$$f \circ \mathscr{F} = \mathrm{Sup}\ ((f \circ \mathscr{F}'),\ \mathrm{Inf}\ (\Gamma(f,\Omega(f,f_B) \oplus B)\ ,\ \Omega(f,\Gamma(f,f_B) \ominus B)))$$

On constatera que la formulation de ce squelette est loin d'être simple. Il est certes plus facile d'effectuer cette opération par des séquences d'amincissements, mais ce sera au détriment de l'exactitude et de la robustesse.

Ce décorticage un peu long de la notion de squelette numérique nous a permis de répondre aux deux questions soulevées au début de ce paragraphe : le squelette par amincissement n'est aucunement lié à la notion et à l'extraction d'ensembles maximaux dans le sous-graphe de la fonction squelettisée, et de plus la réalisation de cette transformation afin que le résultat ne dépende pas du choix des éléments structurants et ne soit pas biaisé par des phénomènes de parité, de divergence, etc..., conduit à une algorithmique assez complexe.

Le terme de "squelette" est donc un peu abusif. Il conviendrait mieux de désigner cette transformation sous le vocable plus général d'amincissement homotopique. L'usage ayant consacré la dénomination "squelette", on la conservera, mais en prenant la précaution de se mettre en accord avec ses interlocuteurs sur le sens précis que l'on donne à ce terme, d'autant que différentes versions de "squelettes" existent. Ces versions ont été élaborées afin d'éliminer ou de réduire les problèmes évoqués plus haut, concernant notamment la robustesse de l'algorithme. On parle alors de squelette minimal, squelette obtenu en ne conservant que les arcs reliant les maxima de la fonction (F. MEYER, 1988, [67]) ou encore de squelette lisse, squelette généré en modifiant légèrement l'ensemble $\mathscr{T}$ des éléments structurants utilisés dans l'amincissement (S. BEUCHER, 1989, [10]).

II-4) Squelette et ligne de partage des eaux

Quel rapport peut-il y avoir entre le squelette d'une fonction et sa ligne de partage des eaux ? Là encore, c'est une forte analogie de résultat entre la LPE d'une fonction f et son squelette ébarbulé qui fait que, souvent, cette dernière transformation est utilisée pour construire la ligne de partage des eaux. Mais ressemblance ne signifie pas identité, et il convient d'être circonspect avant de faire l'amalgame entre les deux notions.

En fait, plutôt que de chercher directement la relation entre ces deux transformations, il vaut mieux se demander si la LPE peut s'exprimer à l'aide d'amincissements numériques.

En effet, l'algorithme de LPE, tel qu'il a été décrit précédemment, présente un inconvénient important : il travaille sur les seuils $Z_i(f)$ de la fonction f et surtout il travaille par propagation d'une zone inondée W_i : on part des niveaux les plus bas, et on inonde la topographie niveau par niveau. Du fait de cette seconde caractéristique, l'algorithme semble donc a priori peu propice à une formulation explicite. On peut néanmoins analyser le problème localement dans le cas digital. Soit donc un point P(x,t) du graphe de la fonction f, et B un voisinage élémentaire (on précisera plus loin la nature de ce voisinage) du point x avec f(x) = t. Plaçons-nous après l'itération i, et supposons qu'à ce moment le point P ne soit pas mouillé. Essayons de déterminer la condition qui fera de x un point inondé à l'itération i + 1. Ecrivons d'abord que P n'est pas mouillé à l'itération i. Si on désigne par T_2 l'ensemble des points du voisinage B de x correspondants à des points mouillés, on a :

$$\operatorname*{Sup}_{\forall \in T_2} f(y) < f(x)$$

Ecrivons maintenant que P sera mouillé à l'itération i + 1. Désignons par T_1, l'ensemble des points du voisinage B de x correspondants à des points secs. P doit être le point le moins élevé (au sens large) des points secs :

$$f(x) \leq \inf_{y \in T_1} f(y)$$

De plus, son altitude doit être supérieure d'une unité seulement à l'altitude du point le plus élevé mouillé après l'itération i, ce qui s'écrit :

$$f(x) = 1 + \sup_{y \in T_2} f(y)$$

En réunissant ces deux premières conditions, on a :

$$\sup_{y \in T_2} f(y) + 1 = f(x) \leq \inf_{y \in T_1} f(y)$$

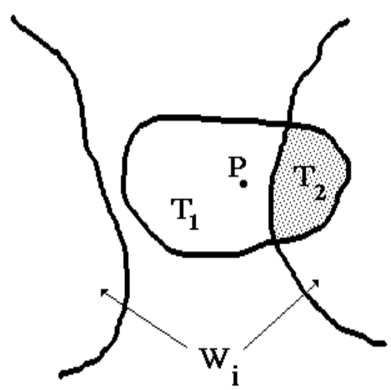


Figure IV-15
Condition locale d'inondation

A ces deux conditions s'ajoute une troisième, sans doute la plus importante. Pour que le point P soit mouillé, il ne doit pas faire partie de la LPE. Cette condition n'est malheureusement pas vérifiable directement par la simple observation de son voisinage. On peut simplement vérifier que P est susceptible d'appartenir à la LPE : s'il est à la jonction de plusieurs composantes mouillées, il appartient à une LPE locale. Si les points mouillés et secs dans le voisinage de P dessinent certaines configurations, P ne sera pas un point d'une ligne de partage locale. Quelles sont ces configurations ? Ce sont les configurations utilisées pour le SKIZ geodésique. En effet, P sera inondé s'il est à une distance unitaire d'une seule composante connexe de points mouillés (Figure IV-15).

L'ensemble (T_1,T_2) des configurations de voisinage de P vérifiant cette troisième condition sont donc celles appartenant aux ensembles $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}'$ d'éléments structurants du SKIZ, c'est-à-dire, les éléments structurants du squelette par épaississement ($\mathcal{T}$) et les éléments de l'ébarbulage par épaississement ($\mathcal{T}'$). En résumé, P sera mouillé à l'itération i + 1 si :

$$\sup_{y \in T_2} f(y) + 1 = f(x) \leq \inf_{y \in T_1} f(y) \qquad \text{avec } (T_1+T_2) \in \mathcal{T} \cup \mathcal{T}'$$

On a donc une "condition d'inondation" exprimée non plus avec les seuils $Z_i(f)$ mais directement à l'aide de f(x).

Cette condition n'est cependant pas suffisante car elle reste attachée au niveau i. Pour la rendre indépendante de ce niveau, il suffit en fait que les points de T_2 qu'on supposait inondés le soient vraiment, c'est-à-dire qu'ils n'appartiennent pas à une LPE locale (Figure IV-16).

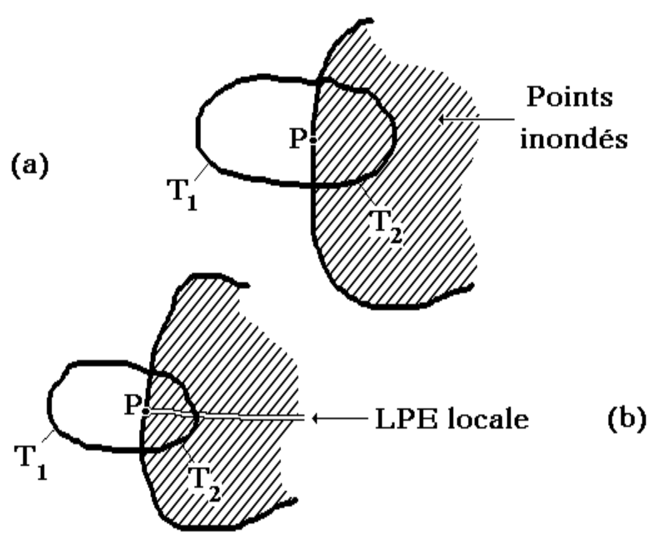


Figure IV-16

Condition d'inondation et LPE locales

Ainsi, comme l'illustre la figure IV-16-a, le point P sera inondé, même si son altitude est supérieure à $\operatorname{Sup}_{y \in T_2} f(y) + 1$. Il suffira d'attendre que l'inondation monte suffisamment haut pour l'atteindre. Dans le deuxième cas, P ne pourra être inondé, car il recevra l'inondation de plusieurs composantes connexes de T_2.

Posons $\mathcal{W} = \mathcal{T} \cup \mathcal{T}'$. On peut donc écrire :

- S'il n'existe pas d'éléments structurants appartenant à $\mathcal{W}$ et vérifiant :

$$\operatorname{Sup}_{y \in T_2} f(y) + 1 < f(x) \leq \operatorname{Inf}_{y \in T_1} f(y) \qquad (T_1 + T_2) \in \mathcal{W}$$

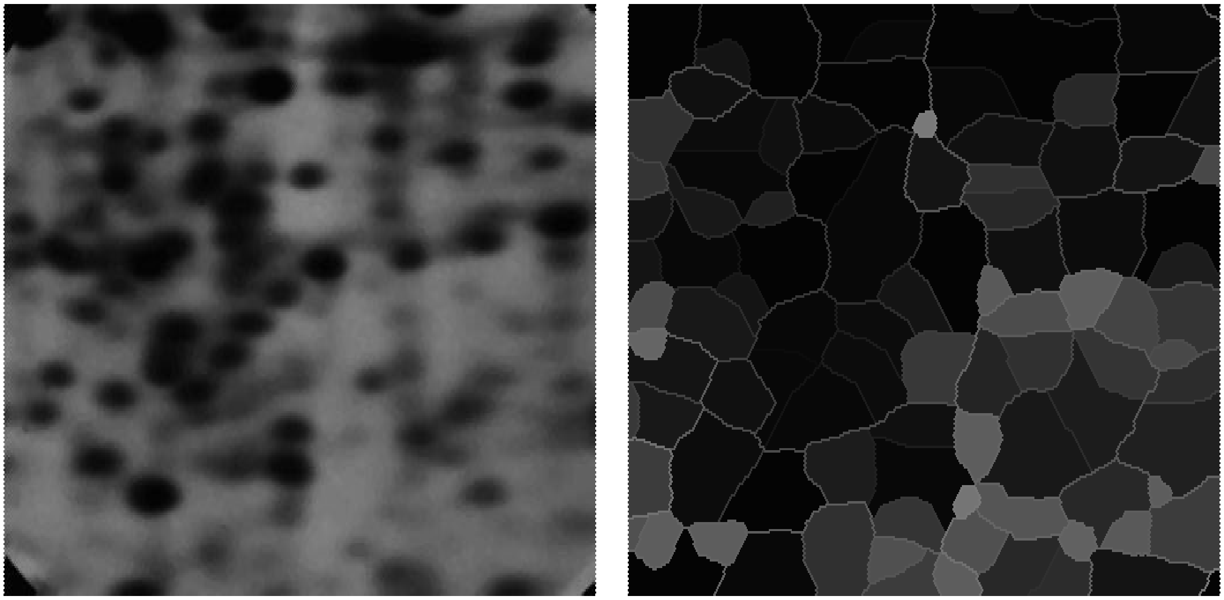
autrement dit, si $(f \circ \mathcal{W})(x) = f(x)$, le point $P = \{x, f(x)\}$ appartient à une LPE locale de f.

- Si par contre, $(f \circ \mathcal{W})(x) < f(x)$, le point P ne peut pas être classé.

Pour lever le doute dans ce dernier cas, effectuons l'opération suivante : remplaçons f(x) par son aminci $(f \circ \mathcal{W})(x)$. Alors si P appartient à une LPE, son altitude ne change pas (cas 1). Dans le deuxième cas, par contre, si P est inondé son altitude diminuera par amincissements successifs jusqu'à atteindre celle du minimum correspondant au bassin versant auquel il appartient. Si P ne peut pas être inondé (cf. Figure IV-16-b), son altitude par amincissement se bloquera à une valeur correspondant à la LPE dont il est le prolongement, altitude toujours supérieure à celle du ou des minima séparés par cette ligne.

On peut donc déterminer la LPE d'une fonction f en effectuant des amincissements successifs de f par $\mathcal{W}$. La fonction résultante présentera un certain nombre de plateaux (bassins versants) entourés par des murs qui seront la trace de sa ligne de partage des eaux (Figure IV-17).

On constate donc que le squelette numérique n'est qu'un outil de fabrication de la LPE. Il est à cette transformation comme le squelette binaire est au SKIZ. On verra, d'ailleurs, au prochain chapitre que la LPE n'est qu'un SKIZ bâti avec une distance généralisée. On ne peut même pas



(a) (b)

Figure IV-17

Ligne de partage des eaux et amincissement par W

(a) image initiale, (b) amincissement

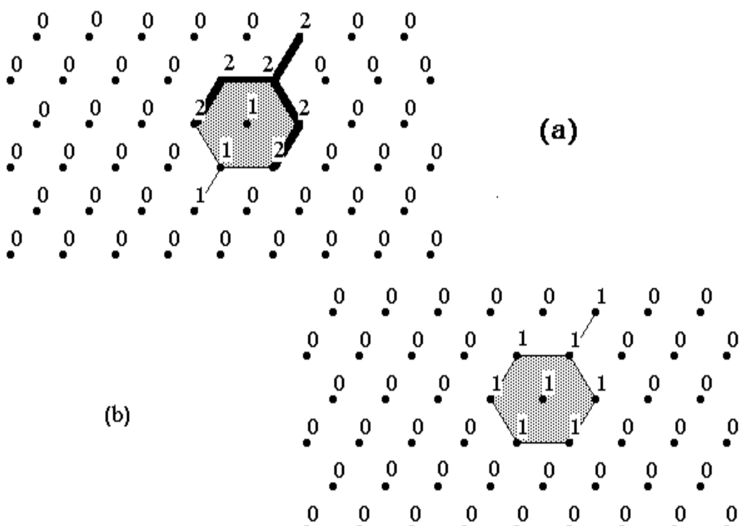
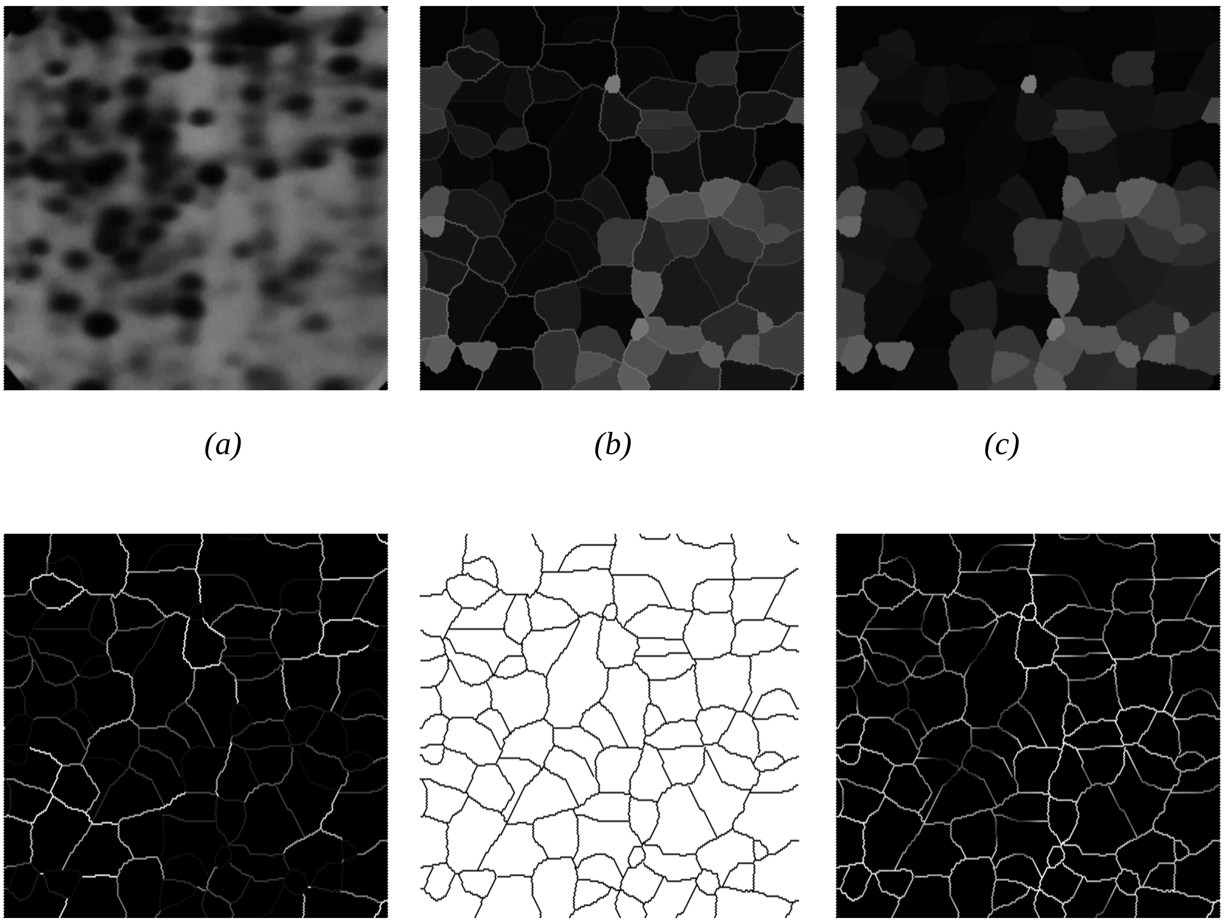


Figure IV-18

Fonction après squelette : d'autres étapes de squelettisation sont nécessaires après l'ébarbulage dissocier les éléments structurants de l'ébarbulage (l'ensemble $\mathcal{T}$') dans la procédure. L'amincissement doit être effectué avec $\mathcal{W} = \mathcal{T} \cup \mathcal{T}'$. C'est pourquoi, il est inexact d'affirmer que la LPE peut se construire en effectuant un squelette numérique, suivi d'un ébarbulage. Cette façon de faire laisse en effet dans l'image des objets constitués de barbules terminées par des masselottes qui font qu'il est nécessaire de réitérer le couple d'opérations squelette-ébarbulage souvent même plusieurs fois (Figure IV-18).



(a) *(b)* *(c)*

(d) *(e)* *(f)*

Figure IV-19

Construction de la LPE à partir de la fonction $(f \circ \mathcal{W})^{\infty}$

(a) image initiale, (b) $(f \circ \mathcal{W})^{\infty}$, (c) ouverture,

(d) différence, (e) seuil de la différence, (f) LPE numérique

De plus, la ligne de partage des eaux obtenue par amincissement (les murs de $(f \circ \mathcal{W})^{\infty}$) n'est que la trace de la ligne de partage des eaux réelle de f. En effet l'altitude des points de l'aminci est inférieure ou égale à l'altitude des points de la LPE. Il faudra tenir compte de ce phénomène si on désire utiliser la hauteur des lignes de partage à d'autres fins, comme on le verra dans la seconde partie. On peut obtenir la ligne de partage vraie par les opérations suivantes :

- Calculer $[(f \circ \mathcal{W})^{\infty}]_B$, ouvert de l'aminci

- Faire la différence :

$$g = (f \circ \mathcal{W})^{\infty} - [(f \circ \mathcal{W})^{\infty}]_B$$

La fonction g seuillée à 1 est l'indicatrice de la LPE.

- Il ne reste plus qu'à masquer f à l'aide de l'indicatrice pour récupérer l'altitude réelle des points de la LPE (Figure IV-19).

La construction de la ligne de partage des eaux par amincissement est une opération lourde, même lorsque, pour des raisons de vitesse de traitement, on l'effectue avec des séquences d'amincissements par des éléments structurants en rotation, et non comme on l'a présenté ici en prenant en compte directement toutes les orientations d'éléments.

Il est cependant crucial que la ligne de partage des eaux puisse être réalisée de la façon la plus rapide possible. Il existe d'ailleurs actuellement une compétition entre différentes approches algorithmiques (voir plus haut).

Beaucoup de ces approches appartiennent au premier groupe (inondation à partir des minima). La LPE par amincissement appartient on l'a vu au second groupe (recherche de propriétés locales). Le prochain chapitre introduira une algorithmique appartenant également à ce dernier groupe, algorithmique basée sur la représentation d'une fonction sous forme d'un graphe de fléchage.

CHAPITRE 5

FLÉCHAGE ET PROPAGATIONS

INTRODUCTION

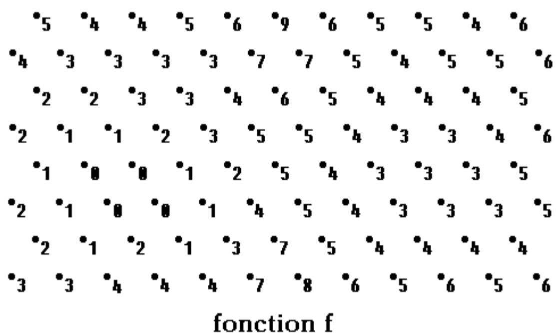
Beaucoup de transformations morphologiques semblent trop riches lorsqu'on les utilise sur des fonctions numériques. Explicitons en quoi consiste cette richesse : on a constaté que, très souvent, la valeur de gris de chaque pixel de l'image ne présente en soi que peu d'intérêt. Ce qui importe est la relation de ce pixel avec son environnement, sa valeur de gris est-elle égale plus grande ou plus petite que celle de tel ou tel point de son voisinage ? Ainsi, dans le chapitre précédent, l'épaississement et l'amincissement de fonctions sont des exemples typiques de l'usage de telles relations. Manipuler les relations d'ordre entre les valeurs de gris des différents pixels d'une image est d'ailleurs la base de la plupart (si ce n'est toutes) les transformations morphologiques. Il paraît alors intéressant de définir une représentation d'une fonction où seules seraient conservées les relations d'ordre des points avec leurs voisins immédiats. Cette représentation s'appelle le fléchage d'une fonction. Elle a été utilisée pour la première fois par F. MAISONNEUVE et nous l'appliquerons dans ce chapitre à la réalisation d'un algorithme rapide de lignes de partage des eaux locales. On verra également de façon succincte quels autres usages peuvent être faits de cette représentation.

I) FLECHAGE D'UNE FONCTION DIGITALE

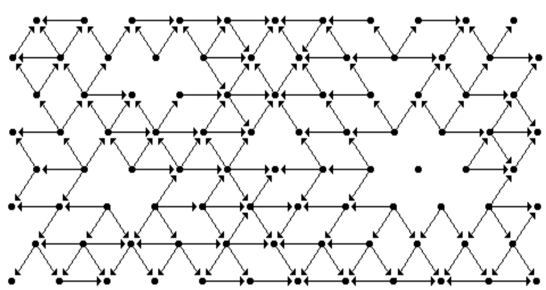
I-1) Définition

Soit une fonction f, définie sur un support $Z \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^2)$. Le graphe (Z,D) associé à Z permet de définir les voisins de tout point $x \in Z$ (Le graphe est le plus souvent soit un graphe carré, soit un graphe hexagonal). La fonction f sera supposée prendre ses valeurs sur $\mathbb{N}^+$.

Considérons deux points voisins x_i et $x_j \in Z$ (les points étant voisins, cela signifie qu'il existe une arête $x_i\ x_j \in D$).



(a)



(b)

Figure V-1

Exemple de fonction (a) et du flèchage correspondant (b)

Soient $f(x_i)$ et $f(x_j)$ les valeurs prises par la fonction f en ces deux points. Nous allons définir un nouveau graphe, dont les sommets sont encore constitués des points de Z, mais dont l'ensemble D_f des arêtes est défini de la façon suivante :

$\forall\ (x_i,x_j)$; $x_i \in Z$, $x_j \in Z$, $x_i x_j \in D$,$\exists$ une arête d'origine x_i et d'extrémité $x_j \in D_f$ ssi :

$$f(x_j) > f(x_i)$$

Le graphe (Z,D_f) orienté ainsi défini est appelé le *graphe de fléchage* (ou simplement fléchage) de la fonction f. Les arêtes orientées appartenant à D_f sont appelées *flèches*. La figure V-1 illustre cette définition dans un cas simple. On constate immédiatement que le graphe de fléchage fournit une bonne représentation des chemins ascendants que l'on peut dessiner sur la surface topographique formée par la fonction f. On aurait pu, de la même façon, représenter les chemins descendants. Il suffit pour cela de retourner les flèches. On remarque également que les points voisins à la même altitude ne sont pas connectés par une arête. Cela est bien évidemment dû au fait qu'une inégalité stricte a été choisie dans la définition du graphe de fléchage. On aurait pu choisir une inégalité large et connecter par des flèches des points adjacents de même altitude. Cependant le graphe ainsi obtenu serait équivalent au graphe précédent. On a donc choisi la première représentation, en particulier parce qu'elle est plus simple et parce qu'elle n'engendre pas de circuits dans le graphe de fléchage.

(a) (b)

Figure V-2
Points flècheurs (a) et fléchés (b)

Soit x, un point quelconque de Z. Si ce point est origine d'une ou plusieurs flèches, il est dit *flécheur*. De la même façon si ce point est extrémité d'une ou plusieurs flèches, ce point est dit *fléché* (Figure V-2). Un point peut bien sûr être à la fois fléché et flécheur. L'inverse est aussi possible. Dans ce cas, les points qui ne sont ni fléchés, ni flécheurs appartiennent à des zones plates (plateaux, cuvettes, etc...) du relief dessiné par le sous-graphe de la fonction f. On verra que ces zones plates nécessitent un traitement particulier, notamment lorsqu'il est nécessaire de compléter le graphe de fléchage.

I-2) Fléchage : Utilisation et limites

Il est intéressant de se demander dès maintenant quelles peuvent être les limites de ce genre de représentation. Plus précisément, est-il possible de définir les transformations appliquées au graphe de fléchage qui correspondent aux deux transformations élémentaires en morphologie mathématique : l'érosion et la dilatation. En d'autres termes, en désignant par A(f) le fléchage d'une fonction f, existe-t-il une transformée Φ appliquée à ce fléchage telle que :

$$\begin{array}{ccc} f & \longrightarrow & A(f) \\ \downarrow & & \downarrow \Phi \\ f \ominus B & \longrightarrow & A(f \ominus B) \end{array} \qquad \Phi[A(f)] = A(f \ominus B)$$

La réponse à cette question est négative. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer le contre-exemple ci-dessous (Figure V-3). Deux fonctions f et g ont le même graphe de fléchage. Cependant les fléchages de leurs érodés respectifs $f \ominus H$ et $g \ominus H$ (H, hexagone élémentaire) sont radicalement différents. Le fléchage a donc évacué d'emblée l'information sur la fonction numérique nécessaire à la construction de son érodé ! Ce fait ne saurait nous surprendre. On a déjà dit en effet que le fléchage avait pour rôle principal la description des chemins parcourus sur le graphe d'une fonction. Or, il n'existe aucune relation directe entre les configurations de ces chemins sur la fonction originale et sur son érodé (ou son dilaté).

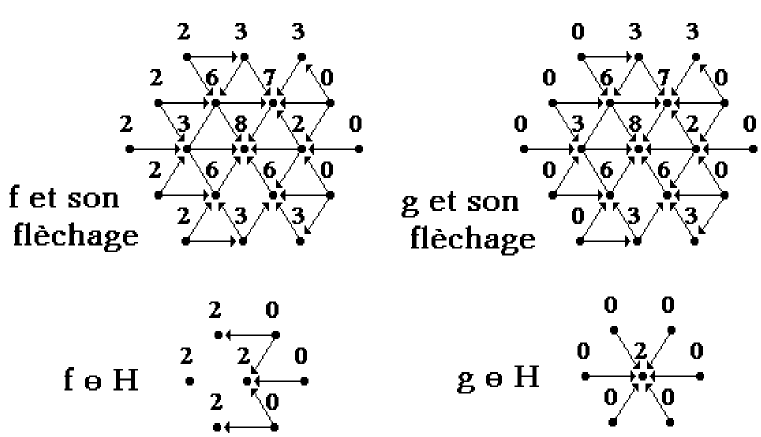


Figure V-3

Transformations morphologiques élémentaires et flèchage

Par contre, toutes les transformations où ces chemins interviennent explicitement, et en particulier les transformations homotopiques (cf. chapitre 4) vont se voir éclairer d’un jour nouveau par cette représentation. Ce sera le cas en particulier pour la ligne de partage des eaux. Mais auparavant, illustrons l’usage du fléchage dans l’extraction des extrêma (minima et maxima régionaux) d’une fonction numérique. Cette opération permettra d’introduire la notion de complétude du graphe de fléchage.

I-3) Extrêma d’une fonction et fléchage

I-3-1) Complétude d’un flèchage

On a vu, au chapitre précédent et au chapitre 3, la définition des minima et maxima régionaux d’une fonction.On a vu également que ces extrema régionaux ont une altitude constante.

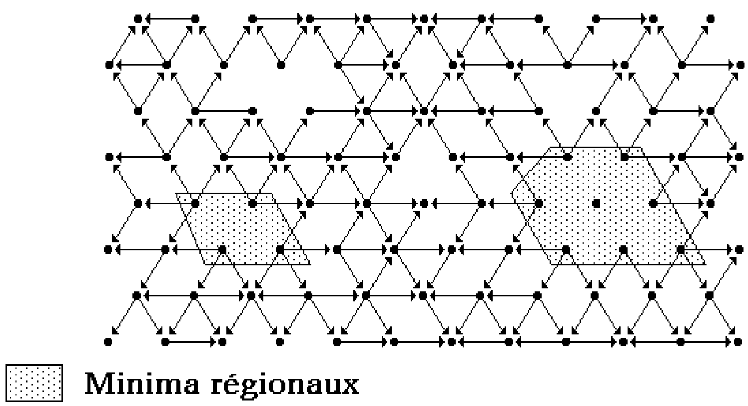


Figure V-4

Minima régionaux et flèchage

Soit m_i, un des minima d’une fonction f. Les points intérieurs à m_i (c’est-à-dire les points appartenant à $m_i \ominus H$) sont à la fois non flécheurs et non fléchés puisque leur voisins sont à la même altitude. A l’inverse, les points du bord sont nécessairement flécheurs; par contre, ils ne sont pas fléchés. En effet, si c’était le cas, ils seraient extrémités d’un chemin ascendant, et donc ne pourraient pas appartenir à un minimum. Une condition nécessaire pour qu’un point appartienne à un minimum régional est donc qu'il ne soit pas fléché. Cette condition n'est bien sûr pas suffisante puisque, en particulier, tous les points intérieurs aux zones plates (plateaux, cuvette, etc...) remplissent cette condition. Une condition suffisante pour qu'une composante connexe m_i soit un minimum régional est que tous ses points ne soient pas fléchés (Figure V-4).

Cette analyse cependant semble tourner en rond, puisqu'il est nécessaire de connaître a priori et séparément les différentes composantes connexes constituant les zones plates de la fonction, or cela est souvent impossible car des plateaux différents peuvent très bien être adjacents (telle une structure en marches d'escalier). Pour trouver les points non fléchés du graphe, il est en fait nécessaire de prolonger les chemins ascendants arrivant aux bords des zones plates. En effet, tout point fléché, flèche vers ses voisins à une altitude supérieure mais doit également flécher vers ses voisins de même altitude. Cette opération de *propagation* du fléchage peut être ré-itérée jusqu'à idempotence. Cette procédure appelée *complétude du graphe* de fléchage par F. MEYER (1987, *in* [84]), complète comme son nom l'indique le graphe de fléchage, en propageant dans les zones plates le fléchage ascendant.

Un algorithme de complétude du graphe, formulé par F. MAISONNEUVE (1982, [57]), consiste à appliquer de façon itérative la règle suivante :

$\forall\ x \in (Z,D_f)$, graphe de fléchage de f :

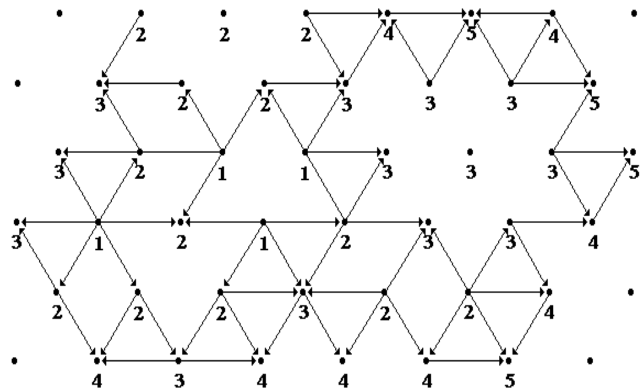
si x est fléché, alors x flèche vers les points de son voisinage qui ne sont pas déjà fléchés.

En désignant par (Z,D_f^*) le graphe complet de f, par Z_d, l'ensemble des sommets de (Z,D_f) fléchés, la règle s'écrit de manière plus formelle :

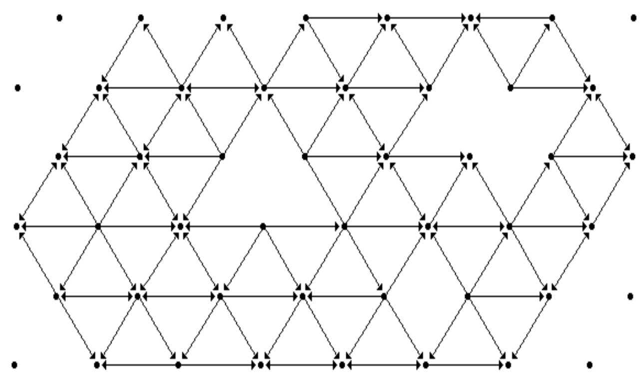
$$\forall\ x \in Z_d,\ \forall\ y,\ (xy) \in D :\quad (xy) \in D_f^* \iff y \notin Z_d$$

On peut remarquer que cette règle peut encore se simplifier. Il suffit en effet qu'un point fléché flèche vers tous les points de son voisinage qui ne flèchent pas vers lui. Cette règle produit un graphe de fléchage avec un double fléchage. Mais, on a vu précédemment que ce graphe était équivalent à la représentation sans cycles qui a été retenue. Cette variante s'écrit formellement :

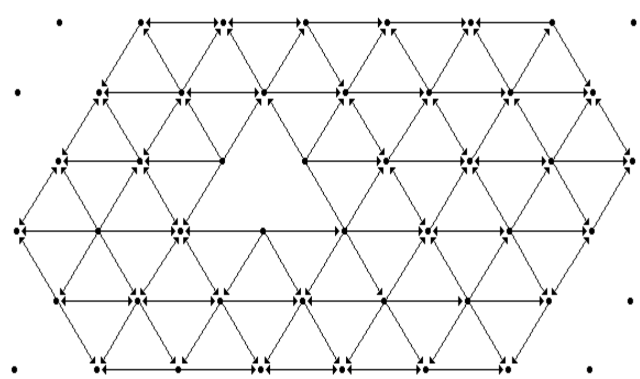
$$\forall\ x \in Z_d,\ \forall\ y,\ (xy) \in D :\quad (xy) \in D_f^* \iff (xy) \notin D_f$$



fonction et flèchage initiaux



1ère étape de complétude



Flèchage complété

Figure V-5

Complétude avec double flèchage

La figure V-5 illustre l'algorithme dans cette deuxième variante.

Les minima régionaux de la fonction f sont alors les points non fléchés du graphe (Z, D_f^*).

La mise en évidence des maxima peut se faire de façon tout à fait similaire, en utilisant le graphe dual de (Z,D_f), c'est-à-dire le graphe obtenu en retournant toutes les flèches.

I-3-2) Mise en oeuvre

Nous allons maintenant décrire brièvement une mise en oeuvre pratique de cette procédure de complétude, car c'est une étape indispensable vers l'algorithme de ligne de partage des eaux, mais également parce qu'on pourra ainsi mettre en évidence les liens étroits entre la procédure de complétude et la distance géodésique. La relation étroite entre l'opération de complétude et le calcul de la distance géodésique permet d'utiliser l'algorithmique rapide présentée au chapitre 3 (algorithmes récursifs) pour effectuer cette opération.

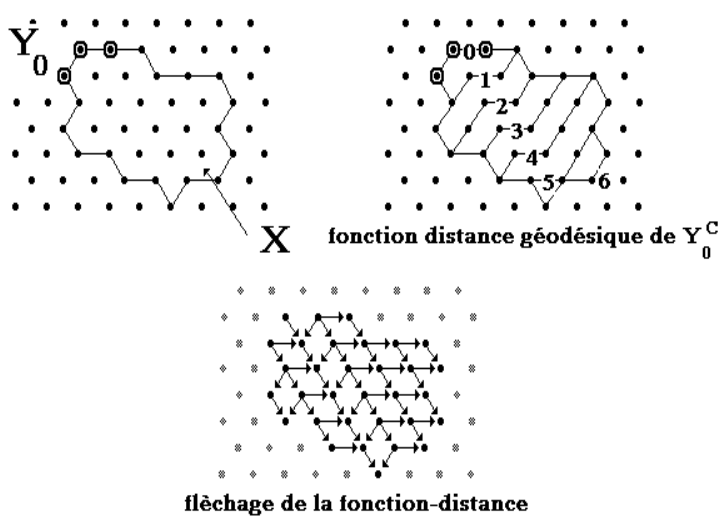


Figure V-6

Flèchage des plateaux et fonction-distance géodésique

Considérons un plateau, désigné par X, de la fonction f. Certains points de la frontière de X sont des points fléchés. On atteint ce plateau par un de ces points en escaladant la surface topographique dessinée par f. Désignant par Y_o cet ensemble de points fléchés, on constate alors immédiatement que la procédure de complétude précédemment décrite consiste à rechercher, pour les flécher, les points de X situés à la distance géodésique unitaire de Y_o. De plus, si on affecte arbitrairement aux points de Y_o l'altitude 0, la complétude du fléchage équivaut à affecter aux nouveaux points atteints l'altitude 1, et ainsi de suite pour tous les points du plateau appartenant aux dilatés géodésiques successifs de Y_o dans X. Autrement dit, le graphe de fléchage construit sur le plateau X est celui de la fonction distance géodésique du complémentaire de Y_o dans X, telle qu'elle est définie au chapitre 3 (Figure V-6). On a vu également qu'il était possible de calculer très rapidement cette fonction distance à l'aide d'algorithmes en ré-écriture. On semble donc tenir là un moyen rapide pour effectuer la complétude du graphe de fléchage. Il faut cependant prendre en compte une difficulté supplémentaire liéee à la nature des ensembles manipulés (des plateaux) et déjà évoquée plus haut : plusieurs plateaux $X_i,...,X_j$ peuvent être adjacents, et leur projection sur le plan formera alors un seul espace géodésique. Il ne sera plus alors possible d'effectuer globalement les dilatations géodésiques des ensembles $Y_{i_o},...,Y_{j_o}$ (Figure V-7).

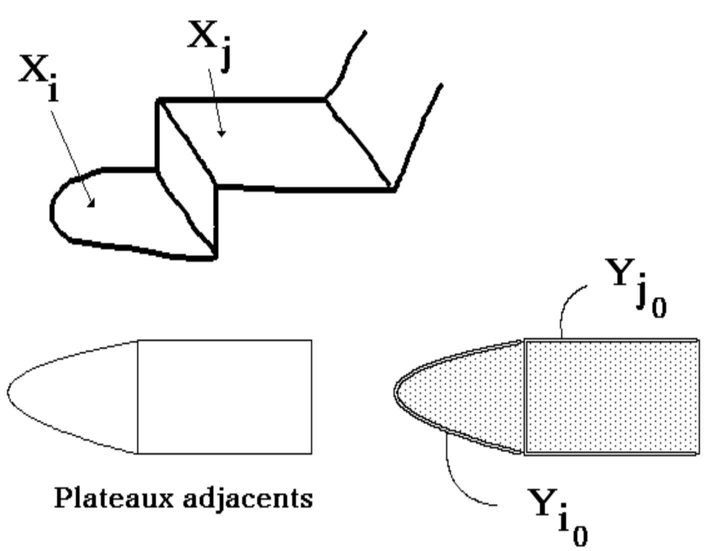


Figure V-7

Séparation des plateaux adjacents

Pour éliminer ce problème, la première dilatation des ensembles Y_{i_o} (c'est-à-dire les points fléchés) doit être directionnelle. On dilate chaque point y fléché dans toutes les directions d'où il n'est pas fléché. L'intersection de ces dilatés avec l'ensemble des points non fléchés constitue ainsi l'ensemble des points d'altitude 1 de la fonction distance géodésique des plateaux comme l'illustre la planche V-8, où les différentes étapes de l'algorithme sont représentées. La fonction f originale (Fig. V-8-a) est fléchée (Fig. V-8-b). Les points fléchés sont alors extraits (Fig. V-8-c). L'ensemble Z_d des points fléchés peut se décomposer en plusieurs sous-ensembles Z_{d_i}, chacun d'eux contenant les points dont une flèche provient de la direction i. Le complémentaire Z_d/Z_{d_i} de cet ensemble, formé des points fléchés mais dont le fléchage n'est pas issu de la direction i est alors dilaté dans cette direction (Fig. V-8-d). Toutes les directions sont ainsi traitées (Fig. V-8-e à V-8-i). On peut alors écrire que l'ensemble :

$$R_{d_i} = (Z_d/Z_{d_i} \oplus L_i) \cap Z_d^c$$

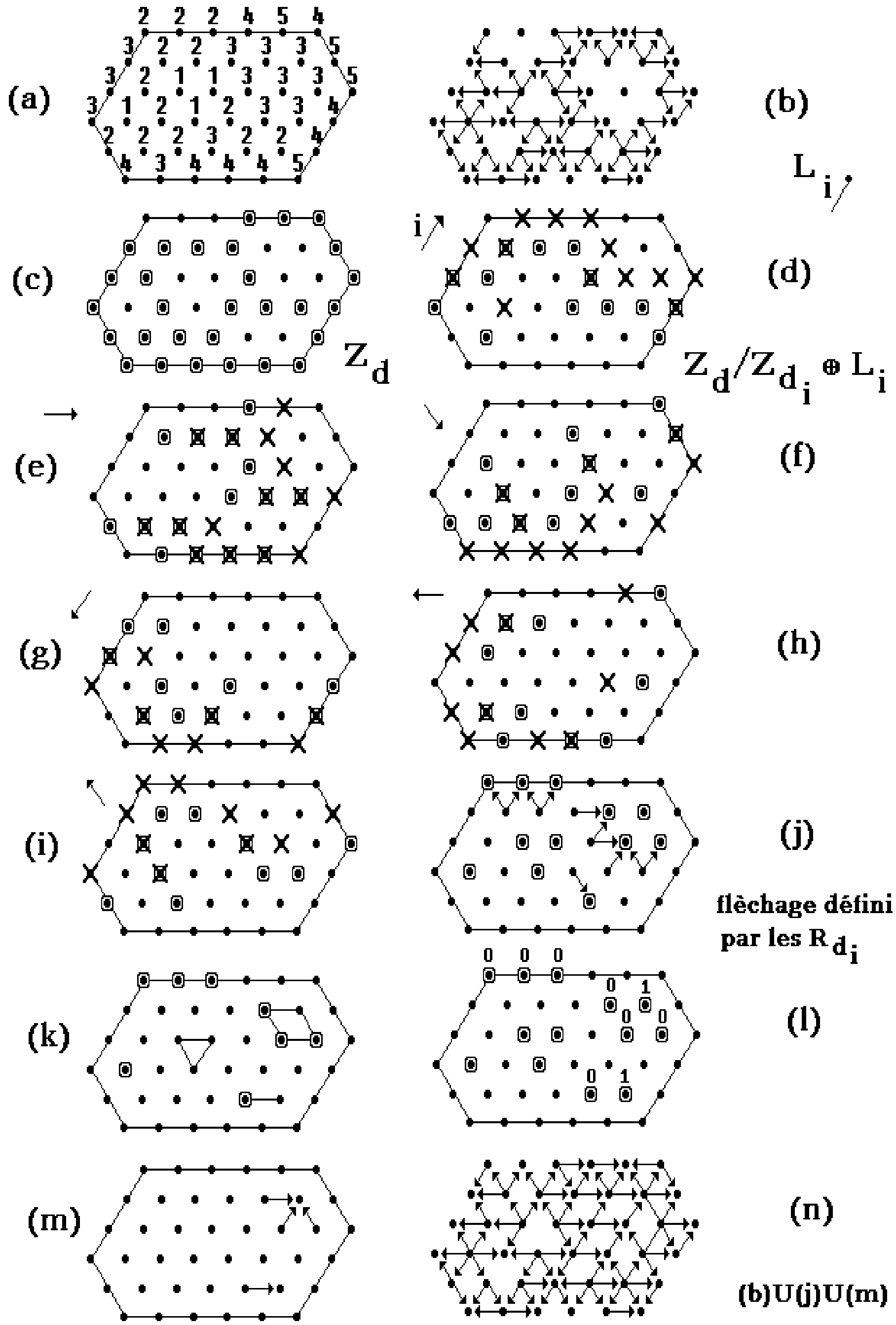
représente les points des plateaux dans la direction i (Fig. V-8-j). De plus :

$$R_d = [\cup_i (R_{d_i})] \cap Z_d^c$$

est l'ensemble des points non fléchés atteints par la propagation du fléchage à partir des bords (Fig. V-8-k). On détermine alors la fonction distance géodésique de l'ensemble Z_d^c / R_d (les points non fléchés pas encore atteints) dans l'espace Z_d^c, à l'aide de la procédure récursive déjà citée (Fig. V-8-e). Il ne reste plus alors qu'à calculer le fléchage de la fonction distance (Fig. V-8-m). Ce fléchage ajouté à celui défini par les ensembles R_{d_i} complète le fléchage initial de f (Fig. V-8-n).

On remarquera que pour mettre en évidence les minima de f, il suffit de reconstruire les composantes connexes de Z_d^c marquées par la propagation du fléchage (étape k). Les composantes connexes non reconstruites sont alors nécessairement des minima régionaux.

Cet algorithme de complétude en dépit de son apparente complexité présente le double avantage d'être exact et rapide. En effet, le passage par la distance géodésique permet d'effectuer très rapidement ce qui constitue



<u>Planche V-8</u>

Les étapes de l'algorithme de complétude du flèchage

l'étape essentielle de la complétude du graphe de fléchage : la propagation le long des plateaux.

I-4) <u>Codage du fléchage. Opérations élémentaires</u>

Avant d'introduire le rôle du fléchage dans la ligne de partage des eaux, il convient de définir la représentation du graphe de fléchage et l'utilisation de cette représentation pour effectuer quelques opérations de base (extraction des points fléchés, passage des points flécheurs aux points fléchés et inversement,...), opérations qui ont déjà été utilisées pour compléter le graphe, mais sans détailler leur réalisation.

I-4-1) <u>Représentation du fléchage</u>

Considérons en trame hexagonale (cette restriction n'enlève aucune généralité à la représentation) un point et ses six voisins. On convient de numéroter ces voisins d'une façon arbitraire, par exemple :

$$\begin{array}{ccccc} & 4\bullet & & \bullet 5 & \\ 3\bullet & & \bullet & & \bullet 6 \\ & 2\bullet & & \bullet 1 & \end{array}$$

Le point central peut être fléché et/ou flécheur. Le codage du fléchage devrait donc être capable de représenter pour chaque direction l'état du point central (fléché, flécheur ou à niveau). En fait, on peut se contenter d'un codage binaire (point fléché ou non) car on verra qu'il est possible de passer simplement de ce codage à son dual (point flécheur ou non).

Considérant un point x quelconque de Z, le codage du fléchage ascendant de x, noté $F_d(x)$ est un n-uplet de valeurs :

$$F_d(x) = (a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6)$$

avec $a_i \in [0,1]$ et

$$a_i = 1 \quad \text{ssi } f(x_i) < f(x)$$

$$a_i = 0 \quad \text{sinon}$$

Ce codage peut être interprété de deux façons différentes, d'ailleurs équivalentes :

- Ou bien, on définit n ensembles Z_{d_i}, avec :

$$Z_{d_i} = \{x : a_i = 1\} \qquad a_i \text{ étant la i-ème valeur de } F_d(x).$$

Z_{d_i} représente alors l'ensemble des points fléchés dans la direction i (c'est-à-dire ceux qui reçoivent une flèche en provenance de cette direction).

Cette interprétation est notamment celle qui a été utilisée dans l'algorithme de complétude.

- Ou bien, on associe au codage une valeur numérique définie en tout point x par :

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i 2^{i-1}, \quad \text{avec } F_d(x) = (a_i ...)$$

L'image de gris ainsi obtenue (Figure V-9) synthétise le fléchage ascendant de la fonction f. Evidemment, les valeurs de gris n'ont aucune signification en elles-même puisqu'elles dépendent de la numérotation arbitraire des directions.

(a)

(b)

Figure V-9

Représentation codèe (b) du flèchage d'une image à teintes de gris (b)

Cette représentation présente cependant une certaine utilité, notamment pour mettre en évidence des changements brutaux de pente, l'extraction de certaines configurations particulières.

Les ensembles Z_{d_i} sont les différents plans binaires de la fonction h_d, d'où l'équivalence des deux descriptions.

I-4-2) Opérations élémentaires

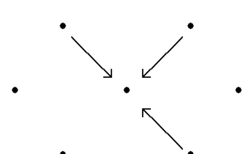
Ces deux représentations permettent d'effectuer certaines opérations élémentaires sur le fléchage. Ainsi, l'ensemble Z_d des points fléchés peut s'écrire :

$$Z_d = \cup_i Z_{d_i}$$

ou encore :

$$Z_d = \{x : h_d(x) > 0\}$$

De la même façon, la sélection de certaines configurations de fléchage s'effectue soit par de simples opérations booléennes, soit par l'extraction de certaines valeurs particulières de h_d. Par exemple, extraire la configuration :



$$F_d(x) = (1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0)$$

revient à effectuer l'opération :

$$Z_{d_1} \cap Z^c_{d_2} \cap Z^c_{d_3} \cap Z_{d_4} \cap Z_{d_5} \cap Z^c_{d_6}$$

ou encore à extraire les points tels que $h_d(x) = 25$.

Enfin, une dernière opération de base consiste à partir du *fléchage ascendant* d'une fonction à calculer le *fléchage descendant*. Cette opération peut paraître de peu d'intérêt puisqu'il suffit pour cela d'écrire que le codage du fléchage descendant noté $F_u(x)$ est un n-uplet :

$$F_u(x) = (b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ b_6)$$

$b_i \in [0,1]$

$b_i = 1$ si $f(x_i) > f(x)$

$b_i = 0$ sinon

Seulement, cette définition impose que l'on connaisse la fonction f. Or, et cela sera évident lorsqu'on abordera la description de l'algorithme de ligne de partage des eaux, cela n'est pas toujours possible, car le fléchage pourra être modifié sans qu'il soit nécessaire (ou même possible) d'assigner à f de nouvelles valeurs en rapport avec le nouveau graphe de fléchage.

Soit x_o un point de Z, et désignons par $x_1,x_2,...,x_6$ les points de son voisinage. Chaque point x_i est affecté d'un code de fléchage ascendant $F_d(x_i)$:

$$F_d(x_i) = (a_1^i\ a_2^i\ a_3^i\ a_4^i\ a_5^i\ a_6^i)$$

On note immédiatement que tout point x_i fléché dans la direction j conjuguée de i est fléché par x_o. La valeur a_j^i de $F_d(x_i)$ est donc égale à la valeur b_j de $F_u(x_o)$.

On peut alors écrire :

$$F_u(x_o) = (a_4^1\ a_5^2\ a_6^3\ a_1^4\ a_2^5\ a_3^6)$$

Là encore, $F_u(x_o)$ peut être représenté, soit par une séquence de nensembles Z_{u_i} :

$$Z_{u_i} = \{x : b_i = 1\} \qquad b_i,\ \text{ième valeur de } F_u(x)$$

soit comme une valeur $h_u(x)$:

$$h_u(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i\ 2^{i-1}$$

Il est particulièrement facile de déduire les Z_{u_i} des Z_{d_i}. En effet, on voit immédiatement que :

$$Z_{u_i} = (Z_{d_j})_j$$

où j est la direction conjuguée (opposée) de i. $(Z_{d_j})_j$ représente le translaté dans la direction j de Z_{d_j} (Figure V-10).

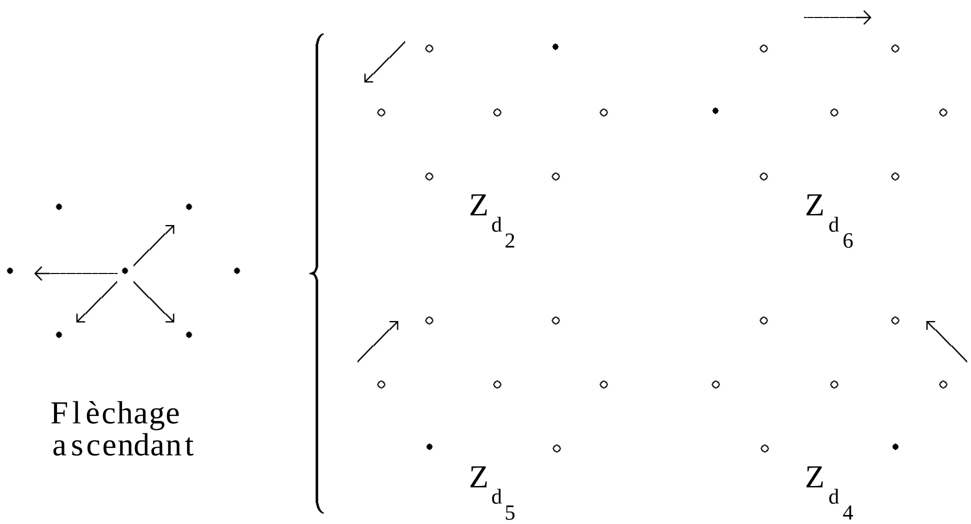


Figure V-10

Flèchage et les différents plans Z_d correspondants

Nous disposons donc désormais d'un certain nombre d'outils de manipulation des graphes de fléchage : complétude, passage d'une représentation à l'autre, sélection de configuration, etc... .

Nous allons utiliser ces outils pour effectuer la ligne de partage des eaux d'une fonction. Nous utiliserons dorénavant et sauf indication contraire, le fléchage complet de la fonction f.

II) FLECHAGE ET LIGNE DE PARTAGE DES EAUX

II-1) Présentation du problème

On a présenté (cf. chapitre 4) la ligne de partage des eaux d'une fonction à l'aide d'un processus d'inondation. Les minima régionaux agissent comme des points-source et inondent progressivement le relief dessiné par le graphe de f. Le graphe de fléchage (ou de drainage) d'autre part suggère fortement de réaliser cette inondation en "suivant les flèches". les points sources du graphe (c'est-à-dire les minima régionaux si ce graphe est complet) flèchent vers les points inondés à la prochaine étape, qui flèchent eux-mêmes vers d'autres points, et ainsi de suite jusqu'à l'envahissement complet du relief, les points de jonction entre les différentes composantes connexes propagées constituant la ligne de partage des eaux de la fonction. F. FRIEDLANDER et F. MEYER (1987, [37]) ont proposé un algorithme de ligne de partage des eaux récursif utilisant ce schéma de principe. Si l'idée de rechercher un moyen rapide de réaliser la ligne de partage des eaux est intéressante, l'algorithme est malheureusement inexact. Il n'évite pas en effet un piège de la LPE par inondation, à savoir qu'il est possible de passer d'un bassin versant à un autre sans quitter un chemin ascendant (Figure V-11). Or, deux phénomènes interviennent dans la construction de la ligne de partage des eaux : d'une part, les minima régionaux ne sont pas synchrones dans la propagation de l'inondation. D'autre part, cette inondation ne se fait pas à vitesse constante. Considérant deux points, l'un origine, l'autre extrémité d'une flèche, l'inondation se propagera à une vitesse inversement proportionnelle à la différence des valeurs prises par la fonction f en ces deux points. L'ignorance de ces deux faits conduit à une propagation le long de certains chemins plus rapide (ou plus lente) que nécessaire. Ces chemins peuvent alors très bien passer dans un autre bassin versant et atteindre des points qui n'ont pas encore été atteints par des chemins en provenance d'autres minima. Ces points seront alors faussement assimilés à des points du bassin versant associé au premier minimum.

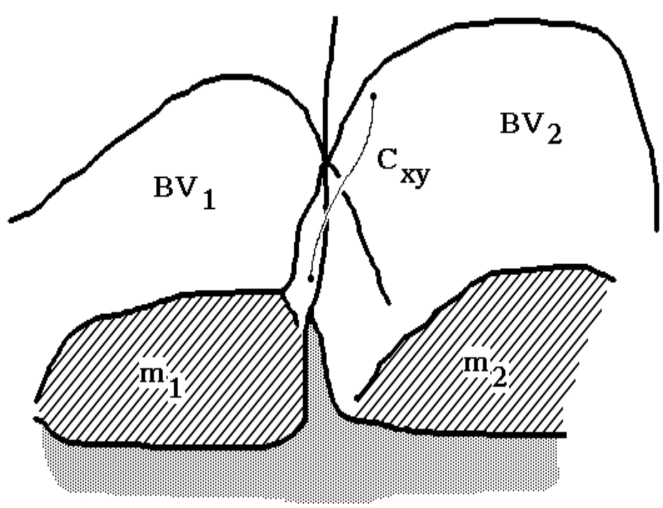


Figure V-11

Chemin ascendant passant d'un bassin versant à un autre

Pour que la propagation se fasse sur le graphe de fléchage de façon équivalente à l'inondation des bassins versants, il est donc indispensable que ce graphe soit valué. Comment alors déterminer cette valuation et que représente-t-elle ?

Cette valuation doit représenter la vitesse de propagation de l'inondation d'un point à un autre. Cette vitesse, on l'a vu est inversement proportionnelle à la différence d'altitude entre les points fléchés. On peut donc valuer chaque arête (flèche) en lui affectant la différence $f(x_j) - f(x_i)$ entre les valeurs prises par la fonction en son point origine x_i et son point extrémité x_j. Ces valeurs représentent donc le temps mis par l'inondation partie du point x_i pour atteindre le point x_j. Cette valuation n'est cependant pas suffisante car elle ne prend pas en compte le fait que les minima n'inondent pas le relief au même moment. On pourrait forcer l'altitude des minima à une valeur commune égale à l'altitude du plus bas, mais on aboutit à une procédure assez complexe, et finalement équivalente à l'algorithme d'inondation niveau par niveau déjà utilisé pour introduire la notion de ligne de partage des eaux.

Cette valuation du graphe est en fait analogue à la notion de distance géodésique généralisée et au squelette par zone d'influence ou SKIZ (chapitre 3). La ligne de partage des eaux semble être un squelette par zone d'influence, les bassins versants constituant les zones d'influence des minima, mais il est difficile d'exhiber la distance qui contrôle le phénomène d'inondation, car cette distance n'est pas aussi immédiate que dans le SKIZ classique. Or, il est cependant possible de mettre en évidence cette distance par le biais du problème "inverse" du fléchage. Ce problème peut se poser de la façon suivante :

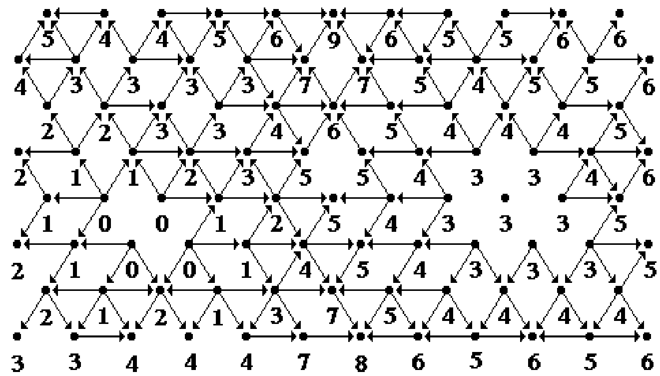
Etant donné un graphe de fléchage (Z,D_f) quelconque (complet ou non), graphe de fléchage obtenu à partir d'une fonction f, est-il possible de déterminer une fonction g minimale, telle que :

$$(Z,D_g) = (Z,D_f)$$

$$\forall\ g' :\ (Z,D_{g'}) = (Z,D_g) \iff g \leq g'$$

Autrement dit, g est la plus petite fonction ayant le même graphe de fléchage que f.

f



g

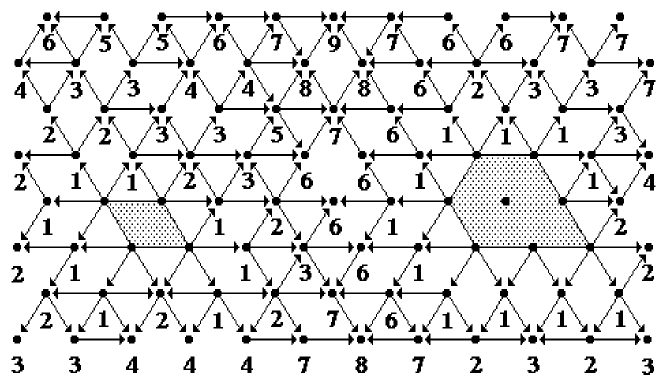


Figure V-12

Génération de la fonction minimale g ayant même flèchage complet que f

La réponse à cette question est affirmative et on peut en donner un algorithme simple. Définissons une fonction g en affectant à tous les points du support Z de f une valeur minimale (égale à 0 par exemple si f est supposée positive) :

$$\forall\ x \in Z, \quad g(x) = 0$$

Considérons, pour chaque point x, l'ensemble de ses voisins, et sélectionnons dans cet ensemble deux classes : la classe des voisins de x qui flèchent vers x, désignée par $T_1(x)$, et celle des voisins qui ne sont ni flécheurs, ni fléchés, désignée par $T_2(x)$. On peut alors remplacer la valeur g(x) définie au point x par une nouvelle valeur ainsi définie :

$$g(x) = \mathrm{Sup}\left(\mathrm{Sup}_{y \in T_1(x)} (g(y)+1), \quad \mathrm{Sup}_{z \in T_2(x)} (g(z)) \right)$$

La procédure peut alors être réitérée jusqu'à idempotence. La figure V-12 illustre le résultat obtenu sur le graphe complet d'une fonction f (on cherche à déterminer g minimale telle que $(Z,D_g) = (Z,D_f^*)$. Dans ce cas bien évidemment, si g est minimale, on ne peut cependant écrire que $g \leq f$).

On aura remarqué que g est générée par des dilatations tridimensionnelles (cf. chapitre 1). Mais à la différence d'une dilatation classique, l'élément structurant dans le cas présent dépend du point x (c'est le doublet $[T_1(x), T_2(x)]$) et est en quelque sorte conditionné par le fléchage. On voit émerger ici une *fonction structurante* au sens défini par J. SERRA (1986, [82]). De plus, cette fonction ayant le même graphe de fléchage que f aura même ligne de partage des eaux. Mais, contrairement à f, les minima de g sont tous à la même altitude, et g représente donc bien une fonction distance généralisée (chapitre 3). La différence $|g(x_j) - g(x_i)|$ où x_j et x_i sont deux points adjacents quelconques représente le temps de parcours entre les deux points. Les dilatations géodésiques successives des minima régionaux atteignent les points de l'espace situés à des distances d_g (exprimées en temps de parcours) de plus en plus grandes. Les bassins versants de f sont les zones d'influence de ces minima relativement à la distance d_g. La ligne de partage des eaux de f est donc bien un squelette par zone d'influence. Seulement, dans ce cas, la distance utilisée est plus complexe que la distance euclidienne classique, l'espace se trouvant en quelque sorte gauchi par la fonction f. Ce gauchissement est quantifié par g, représentant minimal de la classe d'équivalence des fonctions ayant même fléchage que f.

La fonction g peut être calculée à l'aide d'une procédure en ré-écriture. En effet, on peut très bien pour chaque point écrire immédiatement la nouvelle valeur de g(x) qui sera donc prise en compte lorsque ce point x sera considéré à son tour comme un voisin des prochains points traités.

Cette longue digression montre que la génération de la ligne de partage des eaux par propagation d'une inondation sur le graphe de fléchage nécessite la prise en compte de sa valuation, ce qui contribue à alourdir de façon conséquente les algorithmes utilisés. On pourrait envisager néanmoins de travailler sur le graphe non valué, de la manière suivante :

Considérant tout point x du graphe, la propagation de l'inondation ne pourra se faire qu'à condition que tous les points qui flèchent vers lui aient déjà été inondés. Par cette procédure on évite de prendre en compte explicitement la valuation du fléchage tout en conservant l'ordre de parcours des différents chemins définis sur le graphe.

Malheureusement, cette approche ne présente que peu d'intérêt, pour deux raisons. D'abord, la procédure envisagée se trouve être très similaire dans son fonctionnement et sa vitesse d'exécution à l'algorithme classique de la ligne de partage des eaux niveau par niveau. De plus, contrairement à la procédure classique, cette dernière exige une certaine préparation (calcul du graphe de fléchage, complétude, etc...) qui risque encore d'augmenter son temps d'exécution. La dernière raison est qu'il paraît douteux de définir un algorithme récursif à partir de cette procédure afin d'améliorer les vitesses de traitement. En effet, le blocage de la propagation inhérent à ce type de processus semble peu propice au développement de procédures récursives dont la caractéristique principale est précisément de favoriser l'emballement de la propagation.

Il existe néanmoins un autre algorithme de construction de la ligne de partage des eaux à partir d'un graphe de fléchage complet mais non valué. Cet algorithme, ébauché dans son principe dans [07] (BEUCHER, 1982), sera décrit complètement, en détaillant particulièrement certaines astuces algorithmiques, astuces destinées à résoudre certaines difficultés de l'algorithme, en particulier les problèmes de parité liés à l'épaisseur de la ligne de partage des eaux ("astuces" ne signifie pas bricolage, mais au contraire, raffinements chargés d'atteindre à la fois exactitude du résultat et promptitude d'exécution).

II-2) Algorithmes de LPE locales par flèchage

La notion de ligne de partage des eaux pas plus que celle de bassin versant ne sont des notions locales, en ce sens qu'il n'est pas possible généralement de décider par une simple analyse de son voisinage immédiat si un point appartient ou non à une ligne de partage des eaux. Ce point a déjà été évoqué antérieurement, mais il n'est pas inutile de s'y intéresser à nouveau. Considérons en effet le processus d'inondation à un instant donné, et marquons d'un 1 les points du graphe mouillés à cet instant, et d'un zéro les points secs. Imaginons que nous rencontrions la configuration suivante :

	1	1	
0	0		0
	1	0	

L'ensemble des points mouillés est constitué de deux composantes connexes. Ces deux composantes connexes peuvent être connectées (Figure V-13-a) ou bien appartenir à deux bassins versants différents (Figure V-13-b), auquel cas le point central appartiendra à la ligne de partage des eaux.

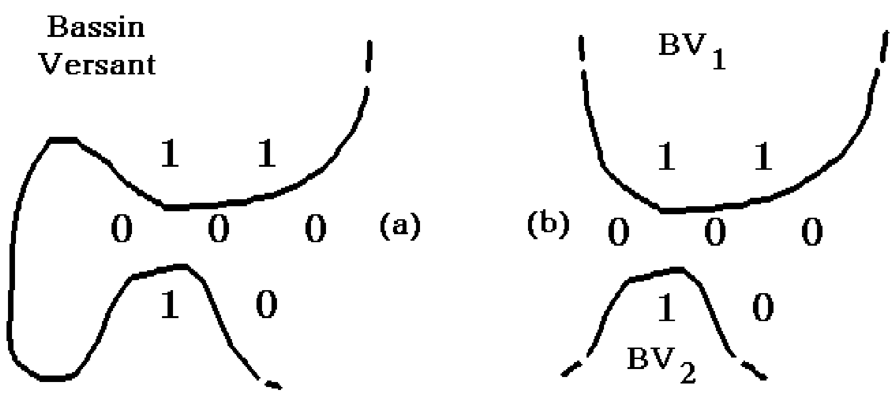


Figure V-13
Différences entre une LPE locale (a) et régionale (b)

En fait, dans les deux cas, le point central appartient à une ligne de partage des eaux mais ce qu'on ignore,c'est de savoir si ce sont les mêmes eaux (cas a) ou au contraire des eaux différentes (cas b), ce dernier cas seul nous intéressant. On ne pourra trancher que lorsque l'ensemble de la ligne de partage contenant le point central aura été déterminée. Alors, de deux choses l'une :

- ou bien cette ligne de partage locale possède une ou plusieurs extrémités (Figure V-13-a), et dans ce cas, elle n'est pas une vraie ligne de partage des eaux, c'est-à-dire une ligne de séparation entre deux bassins versants adjacents, mais simplement une ligne de partage locale. On peut donc l'éliminer.

- ou bien, elle ne possède pas d'extrémités isolées, et alors elle peut être une vraie ligne de partage (Figure V-13-b). Cela n'est cependant pas sûr, car certaines configurations semblables à celles qui apparaissent avec le SKIZ binaire peuvent se produire (cf. chapitre précédent, Figure IV-7).

Or, dans ces deux cas, il n'est pas très difficile, une fois les lignes de partage locales mises en évidence, de déterminer celles qui correspondent au vrai partage des eaux. Diverses techniques existent, de l'ébarbulage des lignes à l'analyse des différentes composantes connexes de la partition générée. Il est donc naturel de chercher les points de l'image qui, localement, peuvent être candidats pour la ligne de partage des eaux. Lorsque tous ces points auront été trouvés, la dernière étape (tri des vraies lignes de partage) ne posera pas de problème particuliers. On verra que, très souvent, elle sera même inutile.

Comment caractériser sur le graphe de fléchage les points qui peuvent être candidat à la LPE ? On a vu, dans l'exemple précédent, que ces points

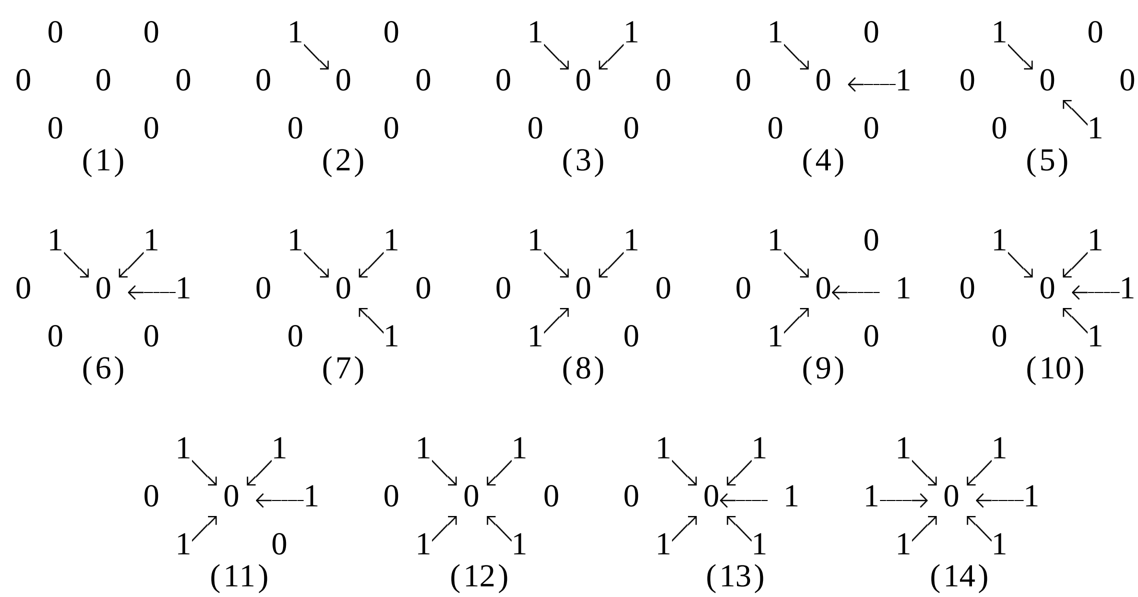


Figure V-14

Les différentes configurations de flèchage en trame hexagonale sont ceux qui reçoivent plus d'un front d'inondation. En reprenant les mêmes conventions de notation, et en examinant les différentes configurations possibles pour le voisinage et le fléchage d'un point (en trame hexagonale), on constate que ces points correspondent (à une rotation près) aux configurations (4), (5), (7), (8), (9), (11) et (12) de la Figure V-14.

Ces configurations sont-elles les seules valables ? La réponse à cette question est non, pour deux raisons, l'une liée à l'"épaisseur" de la ligne de partage des eaux, l'autre plus fondamentale encore dûe au fait qu'une inondation localement bloquée en un point appartenant à la LPE ne se propage évidemment plus à partir de ce point d'où apparition possible d'autres points candidats. De ces deux raisons, la deuxième seule constituera l'essence même de l'algorithme. Nous y reviendrons plus loin. La première est cependant assez gênante, car elle implique que l'on travaille sur un voisinage du point central plus grand que 1. Illustrons ce fait sur un exemple. Le graphe de la figure V-15 est un graphe complet. Les points notés a et b sur ce graphe appartiennent à une ligne de partage locale. L'inondation de ces deux points, qui se produira au même instant, connectera deux eaux dont rien nous permet d'affirmer qu'elles appartiennent au même bassin versant.

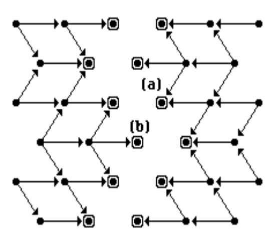


Figure V-15
Fléchage et ligne de partage des eaux "épaisse"

Or, les points (a) et (b) ne présentent aucune des sept configurations de fléchage précédemment décrites. Cependant, en considérant la composante connexe constituée par ces deux points, celle-ci reçoit deux fronts d'inondation. Les points (a) et (b) agissent solidairement car ces deux points sont inondés en même temps. Il est donc nécessaire pour prendre en compte ces points candidats à la LPE, d'examiner leur voisinage de taille 2. Cela n'est évidemment pas très pratique. Il existe heureusement une procédure permettant la prise en compte de ces points particuliers à partir de leur seul voisinage immédiat. Cette procédure est la *sur-complétude* du graphe de fléchage.

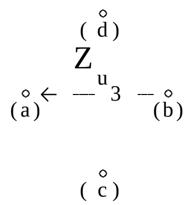
Donnons la définition de la sur-complétude en reprenant notre couple de points (a) et (b). On peut imaginer que l'inondation simultanée de (a) et (b) est en fait l'inondation de (a) à partir des points qui le flèchent mais aussi à partir de (b), de même que l'inondation de (b) se produit à partir de ses points flécheurs et de (a). Cela revient à ajouter au graphe de fléchage une flèche de (a) vers (b) et une flèche de (b) vers (a). Ce double fléchage peut être réalisé car l'inondation vers (a) ∪ (b) est formée de plusieurs composantes, ou encore parce qu'il n'existe aucun point du voisinage de (a) ∪ (b) qui flèche à la fois vers (a) et vers (b). Il définit la sur-complétude du graphe de fléchage. L'algorithme général peut s'écrire :

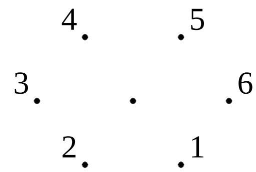
Tout point x fléché flèche vers tous les points de son voisinage qui ne flèchent pas vers lui et qui ne sont pas eux-mêmes fléchés par un point qui flèche x.

Cette règle est plus restrictive que la deuxième règle de complétude énoncée plus haut (cf. § I-3-1). Dans le graphe sur-complété, le double fléchage n'est plus équivalent à l'absence de fléchage entre deux points adjacents. On remarquera que cette règle peut s'appliquer à un graphe de fléchage incomplet, et qu'elle remplace donc avantageusement les règles de complétude précédentes. En reprenant les notations du § I-3, elle peut s'écrire, (Z,D_f^{**}) désignant le graphe sur-complété :

$$\forall\ x \in Z_d,\ \forall\ y,\ (xy) \in D\ :$$
$$(xy) \in D_f^{**} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy) \notin D_f \\ \text{il n'existe pas } z:\ (xz) \in D_f \text{ et } (yz) \in D_f \end{cases}$$

On peut également déterminer le nouveau codage du fléchage. Donnons en la formule pour deux points (a) et (b) horizontaux :





Calculons la nouvelle valeur $Z_{u'_3}$ de Z_{u_3} au point (a) (c'est le fléchage issu de (a) dans la direction 3). On peut écrire :

$$Z'_{u_3} = Z_{u_3} \cup [(Z_{u_3} \cap Z_{d_3})^c \cap W]$$

Z'_{u_3} ne change pas si le point (a) est déjà flécheur (Z_{u_3}) ou s'il est au même niveau que (b) ($(Z_{u_3} \cap Z_{d_3})^c$) tout en respectant la règle de sur-complétude W. On voit que :

$$Z'_{u_3} = Z_{u_3} \cup W$$

Explicitons W. Les deux seuls points susceptibles de flécher à la fois (a) et (b) sont (c) et (d). Pour que (a) flèche (b), il faut donc , en supposant que (b) ne flèche pas (a), que ni (c) ni (d) ne flèchent (a), condition qui peut s'écrire :

$$Z^c_{d_3} \cap Z^c_{d_2} \cap Z^c_{d_4} = (Z_{d_3} \cup Z_{d_2} \cup Z_{d_4})^c$$

D'autre part, (a) doit être fléché. Il ne peut l'être, d'après ce qui précède, qu'en provenance des directions 1, 5 ou 6, ce qui s'écrit :

$$(Z_{d_1} \cup Z_{d_5} \cup Z_{d_6})$$

La condition W s'écrit alors :

$$W = (Z_{d_1} \cup Z_{d_5} \cup Z_{d_6}) \cap (Z_{d_3} \cup Z_{d_2} \cup Z_{d_4})^c$$

Soit :

$$Z'_{u_3} = Z_{u_3} \cup [(Z_{d_1} \cup Z_{d_5} \cup Z_{d_6}) \cap (Z_{d_3} \cup Z_{d_2} \cup Z^c_{d_4})]$$

On a alors :

$$Z'_{d_6} = (Z'_{u_3})_3 \text{ , Translaté dans la direction 3}$$

D'où :

$$Z'_{d_6} = Z_{d_6} \cup [(Z_{d_1} \cup Z_{d_5} \cup Z_{d_6})_6 \cap (Z_{d_3} \cup Z_{d_2} \cup Z^c_{d_4})^c_6]$$

Plus généralement, on peut écrire :

$$Z'_{d_i} = Z_{d_i} \cup [[\bigcup_{j\in I_1} (Z_{d_j})_i] \cap [\bigcup_{k\in I_2} (Z_{d_k})_i]^c]$$

I_1 et I_2 étant les ensembles d'indices décrits figure V-16.

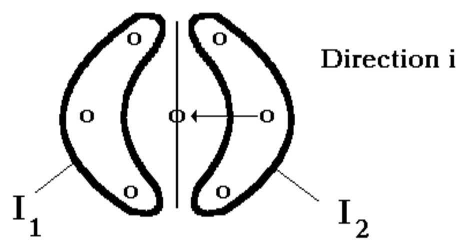
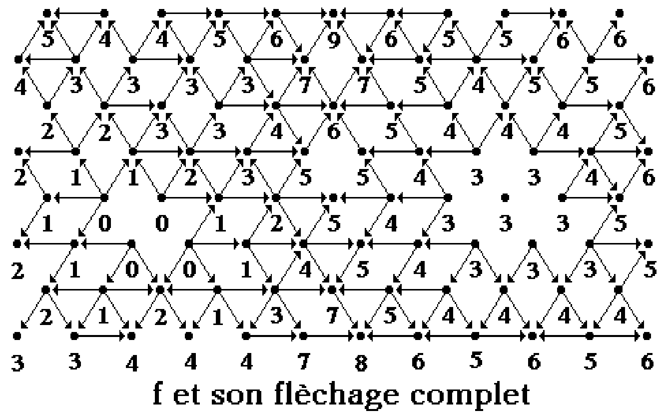


Figure V-16

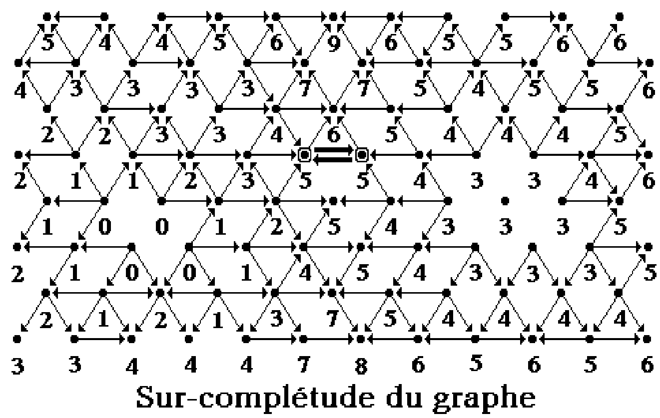
Configurations d'indices utilisées pour la sur-complétude dans la direction i

La figure V-17 illustre la sur-complétude du graphe complet de f. On remarquera que les deux points dont le fléchage a été sur-complété, points candidats à la LPE, présentent désormais une des sept configurations définies sur le voisinage élémentaire d'un point. C'est tout l'intérêt de cette opération. Grâce à la sur-complétude, tous les points candidats à la LPE, de première génération vérifient une des sept configurations de fléchage décrites figure V-14.

Ces points constituent une première génération de candidats, mais pas tous les candidats à la LPE. En effet, ces premiers points ne pouvant être inondés, ne propagent pas d'inondation. Si ces points étaient flécheurs, il ne doivent plus l'être. Mais la suppression de leur fléchage ascendant modifie le fléchage incident des points adjacents vers lesquels ils fléchaient. Ces points peuvent alors devenir à leur tour candidats pour la LPE, soit parce qu'ils présentent une des sept configurations valables, soit



(a)



(b)

Figure V-17

Exemple de sur-complétude : le graphe complet de f (a) est sur-complété (b)

parce que leur sur-complétude la fait apparaître. Ces points de deuxième génération peuvent à leur tour engendrer des points de troisième génération et ainsi de suite par itération de la procédure, jusqu'à idempotence, c'est-à-dire bouclage de toutes les lignes de partage des eaux locales. La planche V-18 détaille l'algorithme.

Cet algorithme peut se résumer à l'aide du diagramme ci-après.

On remarquera que la première génération de points est critique. Si cette première génération n'existe pas, aucune ligne de partage ne pourra être construite. Fort heureusement, si la fonction f possède plus d'un minimum régional, on peut être assuré de l'existence d'une première génération de points candidats.

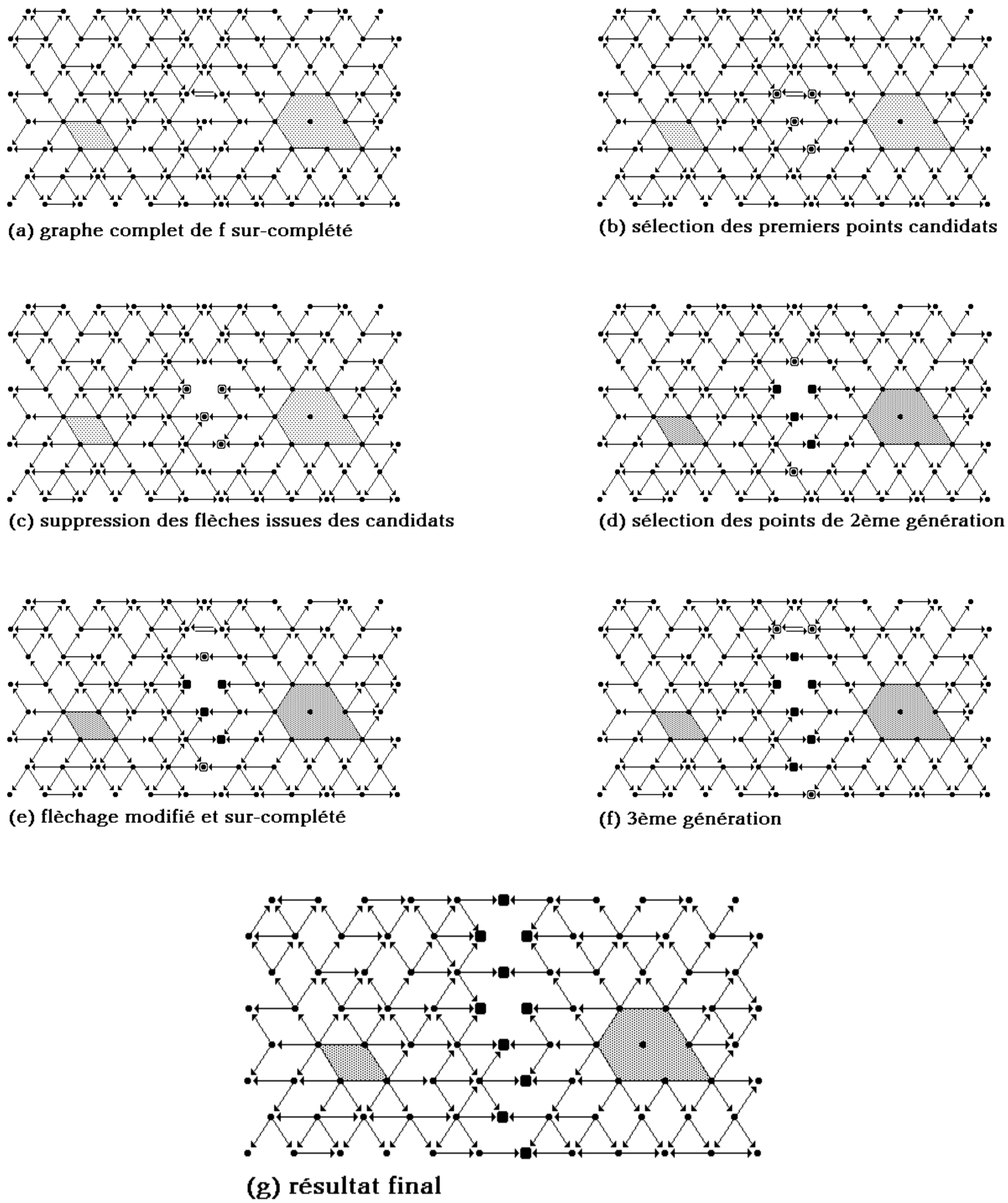
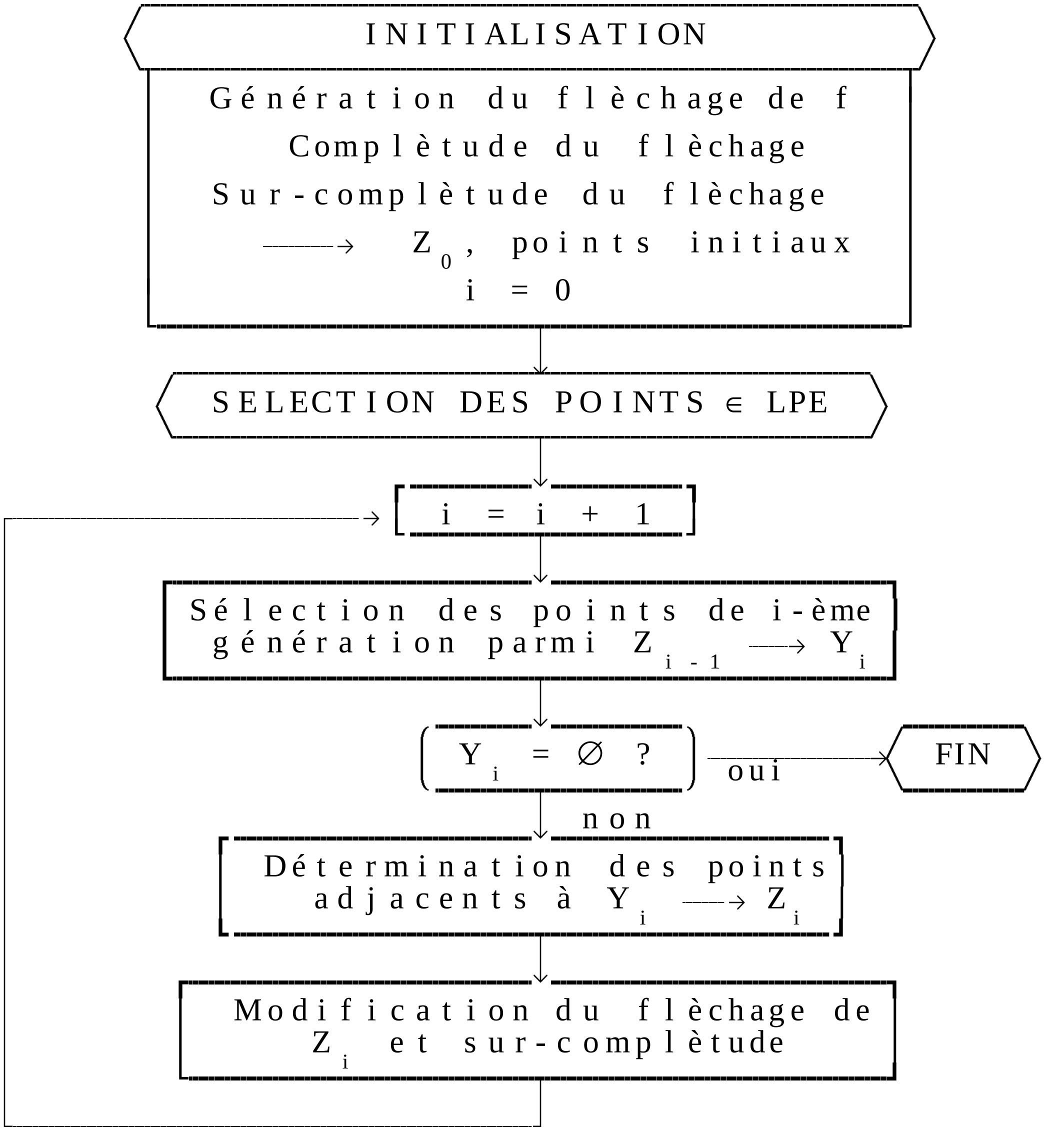


Planche V-18

Algorithme de détermination des LPE locales



A titre d'exemple complémentaire, voyons comment cet algorithme gère les zones de partage des eaux (Figure V-19).

L'algorithme considère la zone de partage des eaux comme un pseudo-bassin versant. On ne saurait s'en étonner puisqu'il est construit pour extraire les lignes de partage des eaux locales.

Cette méthode de construction de la ligne de partage des eaux est très rapide : les opérations d'initialisation, fléchage, complétude et sur-complétude, sont réalisables simplement. Le fléchage et la sur-complétude se font à l'aide d'opérateurs morphologiques binaires simples (érosions, décalages) quant à la complétude, elle n'est pas pénalisante en

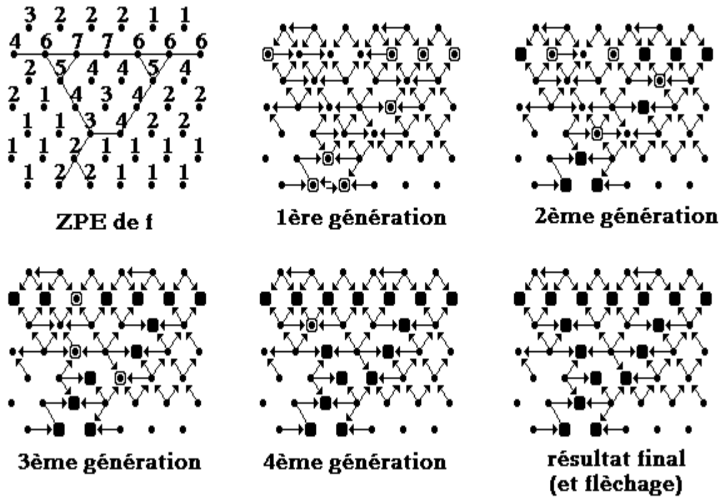


Figure V-19

Détection des ZPE par l'algorithme précédent

temps de calcul si on l'effectue en utilisant comme indiqué les algorithmes récursifs de distance géodésique. Enfin, l'étape de sélection des points de la LPE est extrêmement rapide. En effet, après un premier balayage de l'ensemble des points de l'image indispensable pour extraire les points de première génération, il suffit pour trouver les points suivants d'examiner les points adjacents aux points déjà extraits. Bien plus, il n'est pas indispensable de prendre en compte tous les points adjacents, mais seulement ceux qui sont fléchés par les points appartenant à la génération antérieure. Le temps de traitement est donc proportionnel à la longueur cumulée des lignes de partage, puisque chaque point n'est pris en compte qu'une seule fois. Un autre avantage de l'utilisation du fléchage réside dans le fait que son codage (la fonction h_d ou h_u) est toujours compris entre 0 et 2^{n-1}, n étant le nombre de voisins d'un point, et ceci quelque soit la grandeur de la fonction f initiale. Le temps de calcul de la LPE n'augmentera donc pas proportionnellement à la résolution en niveaux de gris de la fonction.

Enfin, on remarquera que l'algorithme précédemment décrit ne dépend pas de la dimension d'espace dans lequel la fonction f est définie. On peut par exemple définir le fléchage d'une fonction tridimensionnelle. Il suffit alors pour appliquer l'algorithme de définir l'équivalent 3D des configurations de fléchage correspondant à l'inondation d'un point par plusieurs "eaux".

III) LIGNE DE PARTAGE DES EAUX ET FONCTIONS STRUCTURANTES

Revenant maintenant à la construction de la LPE par propagation d'une inondation, nous allons tenter de formuler de façon plus générale la fonction structurante déjà évoquée au § II-1, fonction structurante permettant de définir la dilatation géodésique utilisée dans la fabrication de la LPE.

Le fléchage d'une fonction f est indéniablement la représentation sous forme d'un diagramme saggital de la relation d'ordre suivante :

$\forall (a,b) \in Z^2$, $a \rightarrow b$ (a flèche vers b) ssi il existe un chemin ascendant de a vers b (c'est-à-dire un chemin fléché).

Cette relation d'ordre présente cependant quelques inconvénients. Le plus gênant est que de nombreux points de Z ne sont pas comparables : c'est vrai pour tous les points situés à la même altitude et en particulier pour toutes les zones plates (plateaux, extrêma régionaux). Mais cela peut se produire également chaque fois que les points du doublet appartiennent à des régions séparées par des plateaux (Figure V-20).

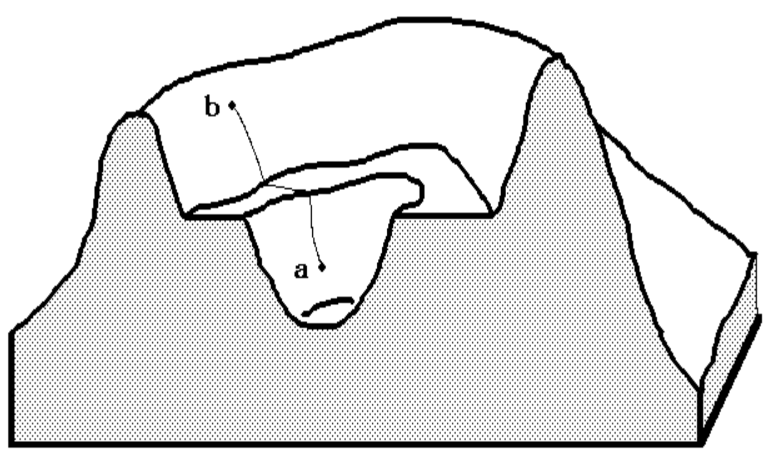


Figure V-20

Points non comparables car non reliés par des chemins strictement ascendants

Pour pallier cet inconvénient, on pourrait considérer des chemins ascendants au sens large (c'est-à-dire strictement ascendants ou à niveau). Dans ce cas cependant, la relation entre les points n'est plus une relation d'ordre, mais de pré-ordre (la relation n'est pas anti-symétrique). On peut alors revenir à une relation d'ordre en considérant comme équivalents les points a et b tels que : $a \rightarrow b$ et $b \rightarrow a$ (BIRKHOFF, [26]).

On définit ainsi un ordre non pas sur Z mais sur l'ensemble quotient $Z|\leftrightarrow$, le symbole $\leftrightarrow$ désignant la relation d'équivalence citée plus haut. Les points de l'ensemble quotient sont constitués de toutes les composantes connexes de $\mathcal{P}(Z)$ formées par les points de la fonction au même niveau. Cependant, cette façon de faire regroupe beaucoup de points de Z. C'est la raison pour laquelle on préfère adopter une représentation intermédiaire, en considérant que tous les points des zones plates de Z (et en particulier les points qui ne sont pas à la fois flécheurs et fléchés) sont équivalents. On travaille alors sur l'ensemble quotient $E = Z|\sim$, où $\sim$ est la relation d'équivalence :

$a \sim b$ ssi a et b appartiennent à une même zone plate.

Les seuls chemins autorisés dans cette représentation sont les chemins strictement ascendants sauf dans les zones plates (plateaux et extrema) où des chemins à niveau sont acceptés. Cela est d'ailleurs conforme au phénomène physique de l'inondation : l'eau arrivant sur une zone plate l'inonde d'un seul coup. Cette zone a donc bien un comportement global. Cela correspond également au comportement des points d'écart nul de la fonction distance généralisée telle qu'elle a été introduite au chapitre 3, points qui, on l'a vu, doivent être pris en compte avant tous les autres. La relation d'ordre sur E est définie par :

$\forall (a,b) \in E \times E \quad a \rightarrow b$ ssi il existe un chemin ascendant strict d'origine a et d'extrémité b

Définissons également le *fléchage direct* de b par a :

$a \twoheadrightarrow b$ ssi $a \rightarrow b$ et il n'existe aucun point x de E (à part a et b) tel que $a \rightarrow x \rightarrow b$.

Le fléchage direct de a est constitué des points adjacents à a et fléchés par lui, mais aussi de a lui-même (puisque $a \twoheadrightarrow a$).

Nous allons maintenant tenter de définir une fonction structurante explicitant la ligne de partage des eaux d'une fonction f à partir de son fléchage. On a déjà introduit une fonction structurante définie à partir du fléchage de f (complet ou non) et permettant de générer la fonction minimale ayant même fléchage que f. Notre propos ici est différent. Il s'agit de définir une fonction structurante sur $\mathcal{P}(E)$, dont l'itéré produira les divers bassins versants de f.

Définissons d'abord une première fonction structurante $\Gamma : E \to \mathcal{P}(E)$:

$$\Gamma(x) = \{y \in E : x \twoheadrightarrow y\}$$

$\Gamma(x)$ est l'ensemble des points de E qui sont directement fléchés par x. D'après la définition du fléchage direct, on peut écrire que $x \in \Gamma(x)$.

Associons à cette première fonction structurante, une deuxième fonction $\Gamma^{v} : E \to \mathcal{P}(E)$:

$$\Gamma^{v}(x) = \{y \in E : y \twoheadrightarrow x\}$$

$\Gamma(x)$ et $\Gamma^{v}(x)$ représentent respectivement la *descendance directe* de x et l'*ascendance directe* de x.

Définissons maintenant une troisième application notée Θ, mais cette fois de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ (ce n'est donc pas une fonction structurante) :

$$\Theta : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$$
$$\Theta(X) = Y = \{y \in E : \forall\ z \text{ tel que } z \twoheadrightarrow y,\ z \in X\}$$

$\Theta(X)$ représente l'ensemble des points de E fléchés directement par des points de X et uniquement par eux. Cette transformation est anti-extensive : $\Theta(X) \subset X$. De plus, elle commute avec l'intersection. En effet :

$$\begin{aligned}\Theta(X_1 \cap X_2) &= \{y : \forall\ z,\ z \twoheadrightarrow y,\ z \in X_1 \text{ et } z \in X_2\} \\ &= \Theta(X_1) \cap \Theta(X_2)\end{aligned}$$

Cette transformation est donc une érosion. La transformée duale pour la complémentation associée Θ^{+} est définie par :

$$\begin{aligned}\Theta^{+}(X) &= [\Theta(X^{c})]^{c} \\ &= \{y : \forall\, z,\, z \twoheadrightarrow y,\, z \in X^{c}\}^{c} \\ &= \{y : \exists\, z,\, z \twoheadrightarrow y,\, z \in X\}\end{aligned}$$

Mais en posant :

$$\Gamma(X) = \bigcup_{x \in X} \Gamma(x) = \bigcup_{x \in X} \{y : x \twoheadrightarrow y\}$$

$$= \{y : \exists\, x \in X,\, x \twoheadrightarrow y\}$$

On constate que Θ^{+} n'est autre que Γ.

De la même façon, on peut expliciter l'érosion Θ^{v} associée à la dilatation Γ^{v} définie par :

$$\Gamma^{v}(X) = \bigcup_{x \in X} \Gamma^{v}(x)$$

On a : $\Theta^{v}(X) = \bigcap_{x \in X^{c}} [\Gamma^{v}(x)]^{c}$

$[\Gamma^{v}(x)]^{c} = \{y : y \not\twoheadrightarrow x\}$ (le symbole $\not\twoheadrightarrow$ signifie que x n'est pas directement fléché par y).

$$\begin{aligned}\Theta^{v}(X) &= \{y : \forall\, x \in X^{c},\, y \not\twoheadrightarrow x\} \\ &= \{y : \forall\, z \text{ tel que } y \twoheadrightarrow z,\, z \in X\}\end{aligned}$$

Considérons alors un point x de E, tel que :

$$\Gamma^{v}(x) = \{x\}$$

Ce point n'ayant pas d'ascendant autre que lui-même est un minimum régional. L'inondation à partir de x est constituée des points de E inondés uniquement par x, ou encore, des points de la descendance directe de x qui sont fléchés directement par cette descendance, ce qui peut s'écrire :

$$W(x) = \Theta \circ \Gamma(x)$$

L'itéré de W(x) sera alors le bassin versant associé au minimum régional :

$$BV(x) = W^{\infty}(x) = W \circ W \circ W \circ \ldots\ldots \circ W(x)$$

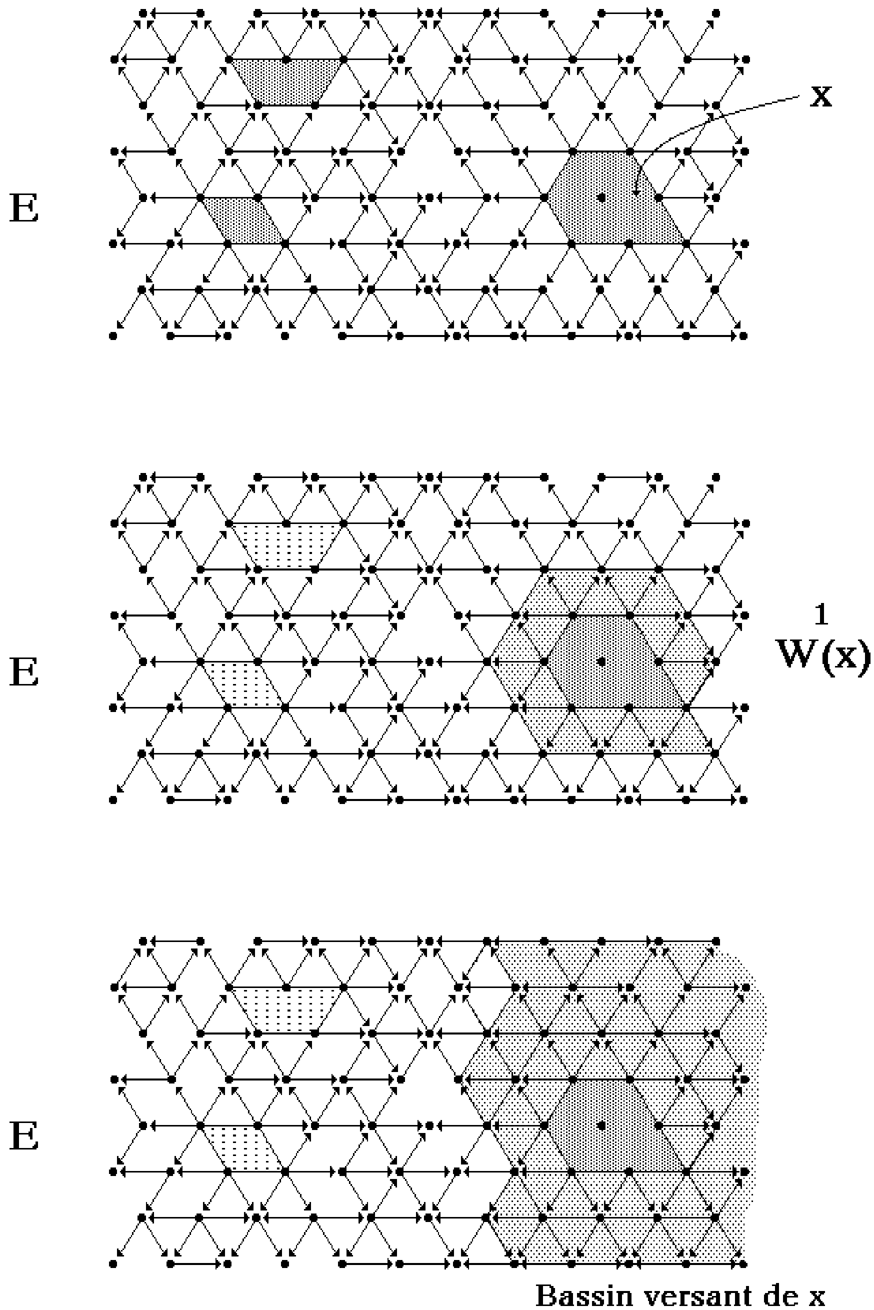


Figure V-21

Dilatations par la fonction structurante W

Le bassin versant associé à un minimum est donc la transformée ultime de ce minimum par les itérés de W. La Figure V-21 illustre la transformation.

Lorsque x n'est pas un minimum, W(x) n'a en général pas de bonnes propriétés (en fait, W(x) est très souvent vide). On peut cependant définir une dilatation de toute partie X de $\mathcal{P}(E)$ par la relation :

$$BV(X) = \bigcup_{x \in X} BV(x)$$

Si X est constitué de l'ensemble des minima de la fonction f génératrice du fléchage, alors l'itéré de cette transformation fournit les bassins versants de f :

$$X_{min} = \{x : \check{\Gamma}(x) = x\}$$

$$BV(f) = BV(X_{min}) = \bigcup_{x \in X_{min}} BV(x) = \bigcup_{x \in X_{min}} W^{\infty}(x)$$

Cette fonction structurante est à la base de l'algorithme de construction des bassins versants par étiquetage des minima. On remarquera que l'on ne peut définir de dilatation à partir de W(x), car cette transformation ne commute pas avec l'union. C'est pourquoi l'étiquetage est indispensable pour conserver la parenté ou descendance de chaque point vis-à-vis des minima.

Lorsque nous avons affaire à un point x quelconque, il n'est généralement pas possible de construire le bassin versant associé à x à l'aide d'itéré de W(x). La procédure employée dans ce cas consiste à reconstruire le bassin versant marqué par x s'il existe. Il suffit pour cela de construire l'ascendance de x et de construire le bassin versant correspondant aux minima contenus dans la descendance de x :

$$X_{min}(x) = X_{min} \cap \check{\Gamma}^{\infty}(x)$$

où :

$$\check{\Gamma}^{\infty}(x) = \check{\Gamma} \circ \check{\Gamma} \circ \check{\Gamma} \circ \ldots \circ \check{\Gamma}(x)$$

Le bassin versant associé à x est alors :

$$BV(x) = \{BV(y),\ y \in X_{min}(x) : x \cap BV(y) \neq \emptyset\}$$

Remarquons que si x appartient à la ligne de partage des eaux, alors :

$$x \cap BV(g) = \emptyset\ ,\ \forall\ y \in X_{min}(x).$$

On a donc : $BV(x) = \emptyset$.

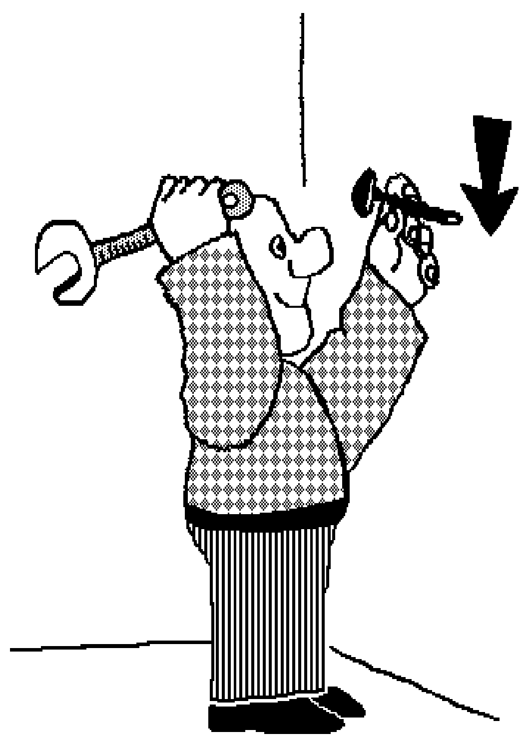
La représentation d'une fonction numérique en termes de fléchage est un outil assez puissant, à la fois parce qu'il est éclairant sur les caractéristiques de l'image qui contrôlent la ligne de partage des eaux, et aussi parce qu'il est opératoire en fournissant une algorithmique rapide et exacte de construction de cette LPE. Le fléchage, en matérialisant un ordre de parcours (ou d'inondation) du graphe de la fonction f permet, on l'a vu, la mise en évidence de la distance sous-jacente qui pilote ce SKIZ généralisé qu'est la LPE.

Cette représentation peut avoir également d'autres utilisations. Il existe par exemple des algorithmes permettant de mettre en évidence le centre géodésique et les extrémités de particules à partir de propagations sur le flèchage de leur fonction-distance (LANTUEJOUL, MAISONNEUVE, 1984, [52]). Le flèchage est également une représentation permettant de réaliser beaucoup plus facilement avec un processeur numérique adapté les épaississements et amincissements de fonctions par des ensembles d'éléments structurants. En effet, si ces opérations, en binaire, se font sans trop de difficultés grâce à des tables de correspondance - on détermine la configuration de voisinage d'un point et on regarde si elle correspond à une des configurations sélectionnées dans la table (BEUCHER, KLEIN, 1983 [20]) - il n'en est pas de même en numérique, l'explosion combinatoire des configurations rencontrées augmentant grandement la taille des tables de correspondance. Le flèchage apporte une réponse à ce problème, puisqu'on a vu qu'il permet de coder facilement les relations de voisinage entre les points. Il suffit alors de calculer le flèchage de chaque point de l'image (ascendant stricte, large, descendant stricte, large selon la transformation réalisée) et de comparer ce flèchage avec les configurations stockées dans une table de correspondance.

L'algorithme de construction de cette LPE par propagation de lignes de partage locales est rapide puisque son temps d'exécution est proportionnel à la longueur de LPE. Il est aussi exact, en ce sens qu'il ne conduit pas à une approximation de LPE comme peuvent le faire les algorithmes basés sur des séquences d'amincissements. Cette procédure, certes, nécessite une architecture de processeur particulière permettant, entre autres, à la fois un accès séquentiel et aléatoire aux points de l'image, ainsi que des processus récursifs. Cependant cette architecture loin d'être exceptionnelle tend au contraire à devenir la configuration de base des processus actuels de morphologie mathématique.

Ce chapitre clôt l'inventaire de notre boîte à outils. Nous verrons dans la deuxième partie de ce mémoire l'usage que l'on peut faire de ces outils pour segmenter des images.

DU BON USAGE DES OUTILS DE SEGMENTATION



A méchant ouvrier, point de bon outil.
Adage populaire

CHAPITRE 6

PRINCIPES GÉNÉRAUX DE LA SEGMENTATION PAR L.P.E.

INTRODUCTION

Parvenus au seuil de cette deuxième partie, nous allons essayer d'utiliser au mieux les divers outils forgés dans les chapitres précédents. On le fera à partir d'exemples réels de segmentation d'images tirés d'applications concrètes. on s'attachera également à montrer en quoi la segmentation s'avère indispensable pour la résolution du problème posé. Cette seconde partie comportera deux chapitres. Dans ce premier chapitre, on dégagera les principes généraux de la segmentation d'images par ligne de partage des eaux en montrant les difficultés rencontrées et les diverses solutions proposées. Cette méthodologie sera illustrée avec quelques exemples. Le deuxième chapitre de cette seconde partie sera consacré à la résolution de problèmes de segmentation plus complexes. On verra alors comment la méthodologie dégagée dans ce premier chapitre peut nous guider vers des solutions satisfaisantes, solutions qui, bien qu'étant le résultat d'une algorithmique plus complexe, s'insèrent cependant dans le schéma général de la segmentation d'images.

I) METHODOLOGIE DE LA SEGMENTATION D'IMAGES

I-1) Un exemple simple

La Figure VI-1 illustre ce premier exemple. Elle représente une vue (très grossie) d'un gel d'électrophorèse bidimensionnelle. L'électrophorèse bidimensionnelle est une technique d'analyse et d'identification de protéines basée à la fois sur leur poids moléculaire et leur point iso-électrique (O'FARRELL, 1975, [71]). Un gel présente un grand nombre de taches, chacune d'elles étant caractéristique d'une protéine. Déterminer la protéine en question revient alors à calculer sa position dans le gel. Point n'est besoin pour mener à bien cette tâche de contourer les taches. Cependant, il est intéressant de connaître également la taille des taches et leur densité, deux paramètres liés à l'activité de la protéine. Pour accéder à ces deux paramètres, une approche possible consiste à délimiter les contours des taches.

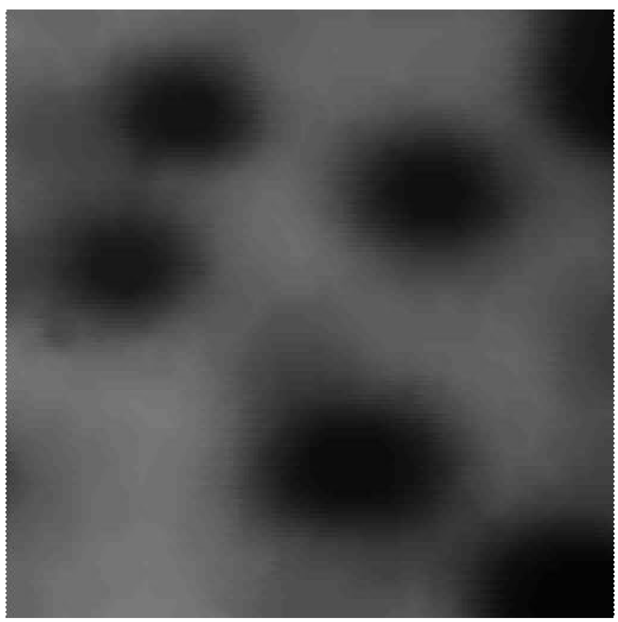


Figure VI-1

Gel d'électrophorèse : taches de protéines (détail)

Comment définir une tache ? On peut dire qu'il s'agit d'une zone homogène de l'image, entourée par une autre région homogène et de niveau de gris différent, constitué par le fond. En reprenant l'analogie avec un relief, on constate que les taches se caractérisent par des cuvettes de la surface topographique (Figure VI-2-a). Le contour de chaque tache correspondra alors aux points situés entre le centre des taches et le fond et présentant le contraste maximum. Il est alors possible de définir les contours des taches comme la ligne de partage des eaux du gradient morphologique (Figure VI-2-b).

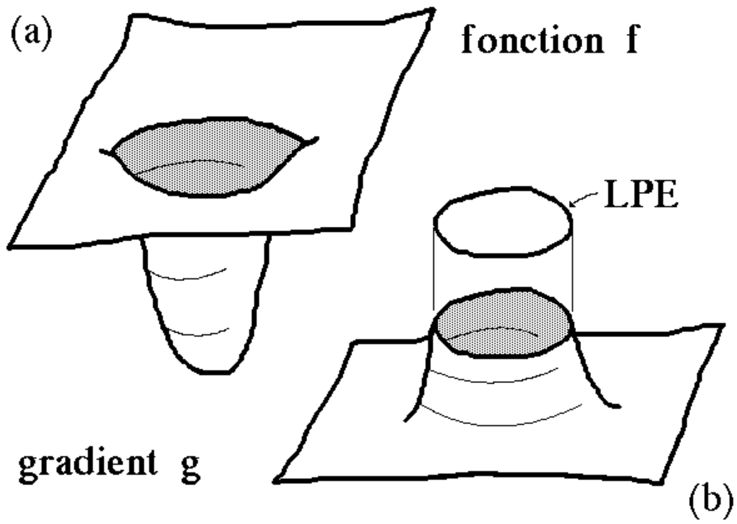
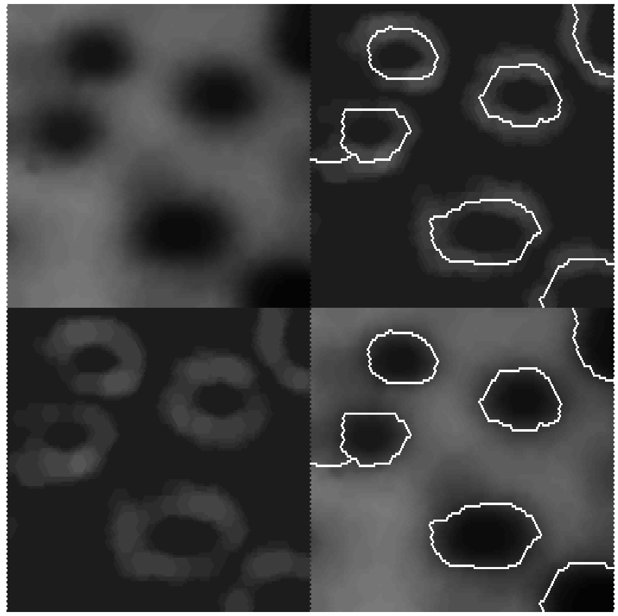


Figure VI-2

(a) Relief associé à l'image de gris des taches d'électrophorèse.
(b) Gradient et sa LPE.

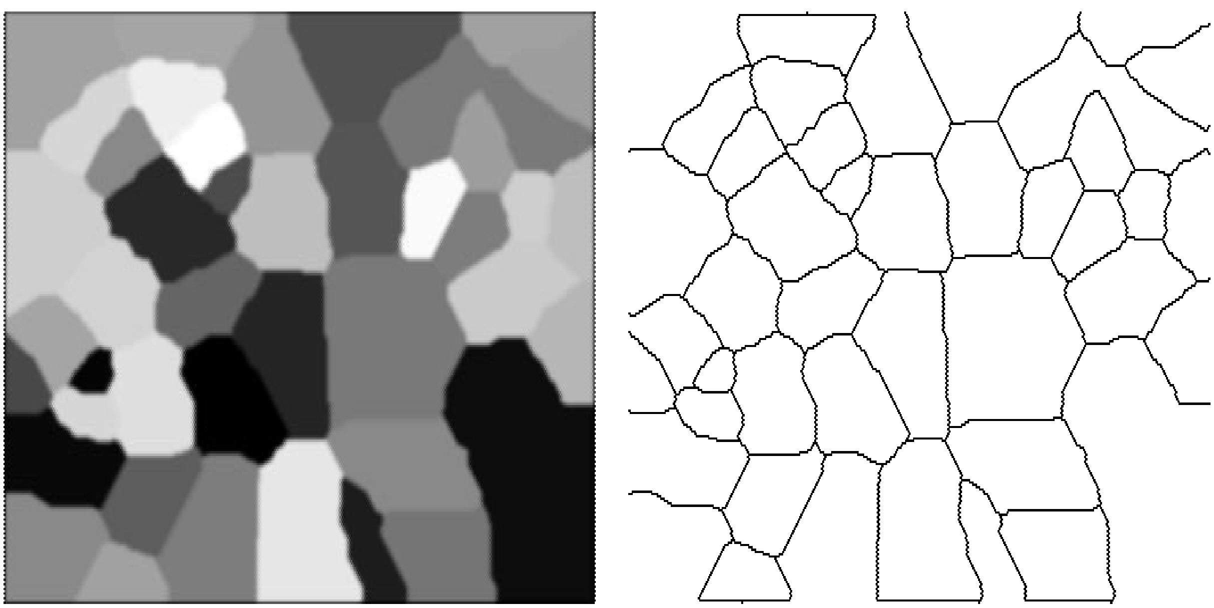
Cette définition, simple et opératoire produit le contour des taches illustré à la Figure VI-3. Ce contour présente certaines caractéristiques qu'on retrouvera constamment par la suite. La plus importante est que ce contour est toujours fermé. C'est une conséquence normale de l'utilisation de la LPE comme outil de segmentation. On remarquera également que le contour passe par les points de l'image où la transition de gris est la plus forte. Ainsi, lorsque le contraste est suffisamment élevé, le contour tracé par la LPE semble correspondre assez bien avec l'observation. Mais, lorsque ce contour est faiblement contrasté, avec des transitions de grande largeur, le contour obtenu peut parfois sembler en retrait par rapport à l'extension de la tache telle qu'elle est perçue. Cependant, compte tenu des définitions utilisées, ce comportement est tout-à-fait normal (BEUCHER, LANTUEJOUL, 1979, [21]).



(a) (b)

Figure VI-3

Gradient de l'image (a) et ligne de partage des eaux (b)



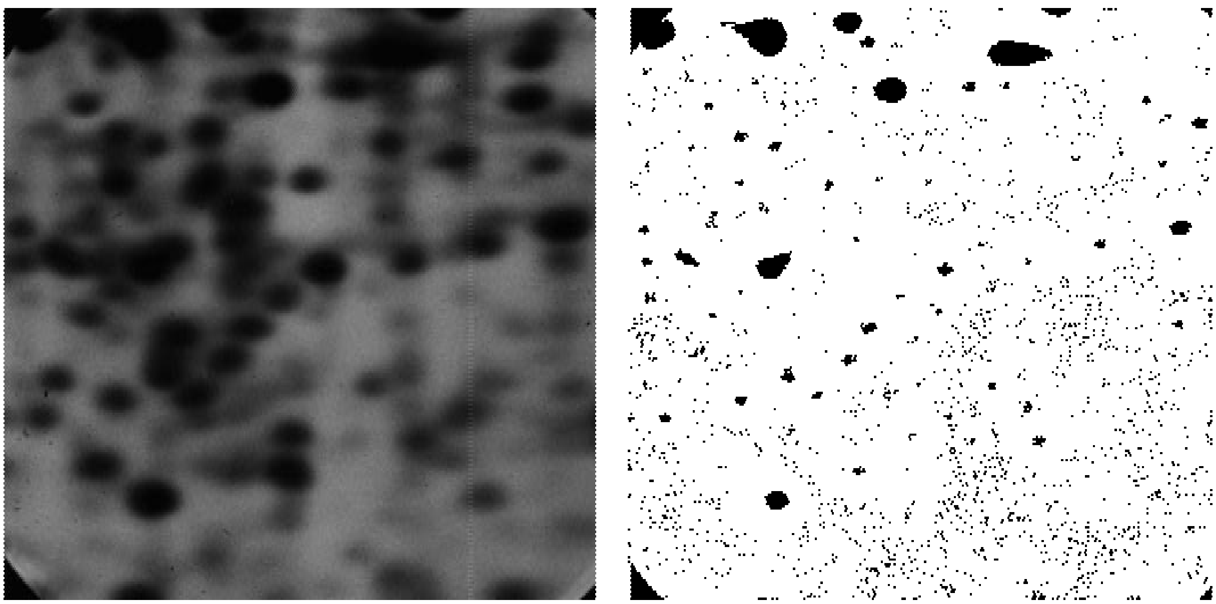
(a) (b)

Figure VI-4

Image multiphasée (a) et résultat de la LPE du gradient (b)

La même procédure peut être utilisée pour des images multiphasées (Figure VI-4). Cette méthodologie consiste donc à mettre en évidence des objets plutôt que des contours. Les objets présents dans l'image apparaissent comme des régions à niveau de gris relativement homogène. Ces régions sont mises en évidence par le gradient morphologique, dont les minima en définissent des marqueurs. La ligne de partage des eaux du gradient est alors une procédure qui lève le doute quant à l'appartenance des autres points de l'image à tel ou tel objet.

I-2) Sur-segmentation de l'image et remède



(a) (b)

Figure VI-5

(a) Image d'électrophorèse 2D et ses minima (b)

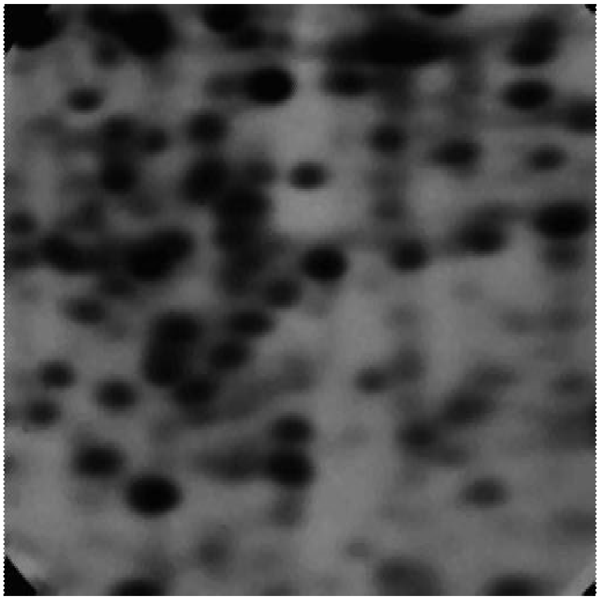
Malheureusement, les exemples précédents sont beaucoup trop simplistes. Les images utilisées présentent des niveaux de gris très homogènes, et le bruit est faible, voire inexistant. Ce n'est évidemment pas le cas dans la réalité. Reprenant l'image du gel d'électrophorèse à un plus faible grandissement (Figure VI-5-a), on constate immédiatement qu'elle est très bruitée. Il suffit pour cela de mettre en évidence les minima de l'image (Figure VI-5-b). Un nombre considérable de composantes connexes apparaît, ce qui démontre que la modélisation des taches par des cuvettes de la surface topographique ne correspond pas tout-à-fait à la réalité. Si c'était le cas, on mettrait en évidence un seul minimum par tache. Pour remédier à ce problème, on peut filtrer l'image initiale. De nombreux filtres morphologiques existent, la plupart basés sur l'assemblage d'ouvertures et de fermetures (MATHERON, 1983, [62], SERRA, 1982, [81]). Dans le cas présent, un *filtre alterné séquentiel* ou FAS a été utilisé. Ce filtre consiste, comme son nom l'indique, à alterner des ouvertures et des fermetures morphologiques de tailles de plus en plus grandes (STERNBERG, 1986, [87]). En désignant par f, l'image du gel, le FAS utilisé est défini par :

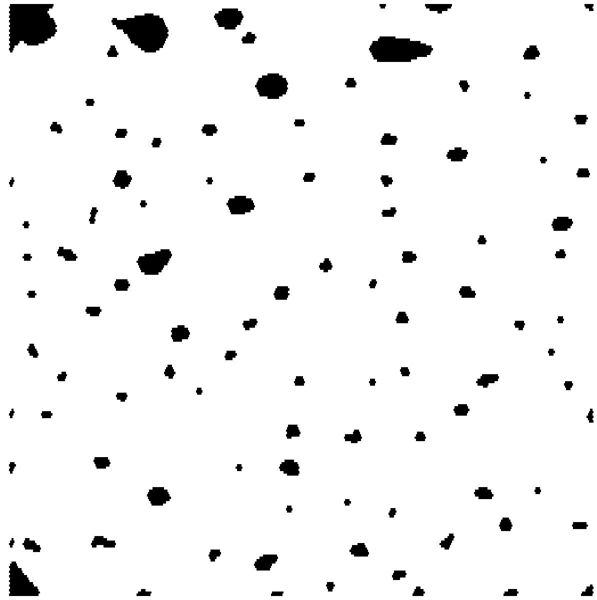
$$\gamma_1 \circ \varphi_1(f)$$

où γ_1 et φ_1 représentent respectivement l'ouverture et la fermeture par une boule élémentaire. On remarque que la première opération utilisée est la fermeture, afin de privilégier l'élimination des minima surnuméraires. Le résultat obtenu (Figure VI-6-a) s'il n'est pas visuellement très différent de l'image initiale, montre cependant une très nette amélioration du marquage des taches par détection des minima (Figure VI-6-b). Ce premier remède n'est cependant pas la panacée, car la ligne de partage des eaux du gradient de l'image filtrée est, comme le montre la Figure VI-6-c, loin du résultat escompté. Cette LPE fait apparaître une forte *sur-segmentation*, due au fait que le gradient présente encore de nombreux minima, malgré le filtrage de la fonction. Là encore, pour sortir de l'impasse, on pourrait tenter de filtrer le gradient, en utilisant en particulier des versions régularisées de l'algorithme (cf. Chapitre 2). Il existe cependant un moyen plus astucieux, proposé par F. MEYER. Il consiste à sélectionner les minima du gradient qui seront source de l'inondation dans la LPE. En effet, si on souhaite que le résultat de la segmentation soit similaire à celui obtenu précédemment dans notre exemple simple, il faut qu'un seul minimum du gradient apparaisse à l'aplomb de chaque tache et qu'un seul minimum soit également présent sur le fond. La réalisation de cette idée exige cependant deux choses :

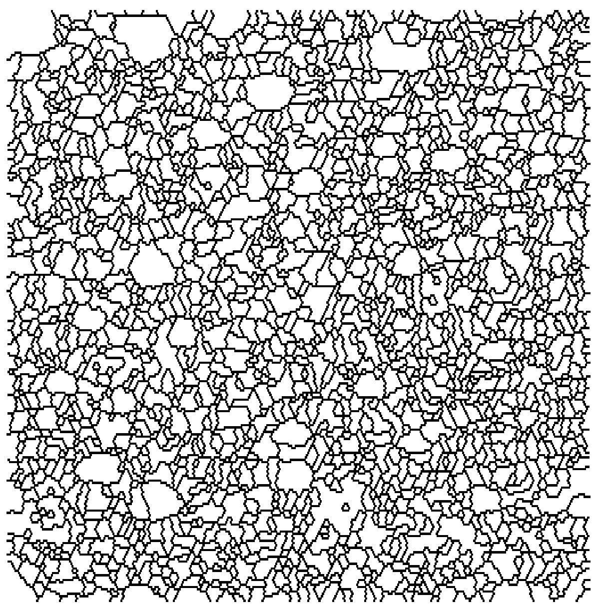
- La première est de construire les marqueurs en question, à la fois pour les taches et pour le fond.

- La seconde est de modifier la construction de la LPE de façon à prendre en compte les marqueurs précédents comme minima du gradient, tout en rejetant les autres minima du gradient.





(a) (b)

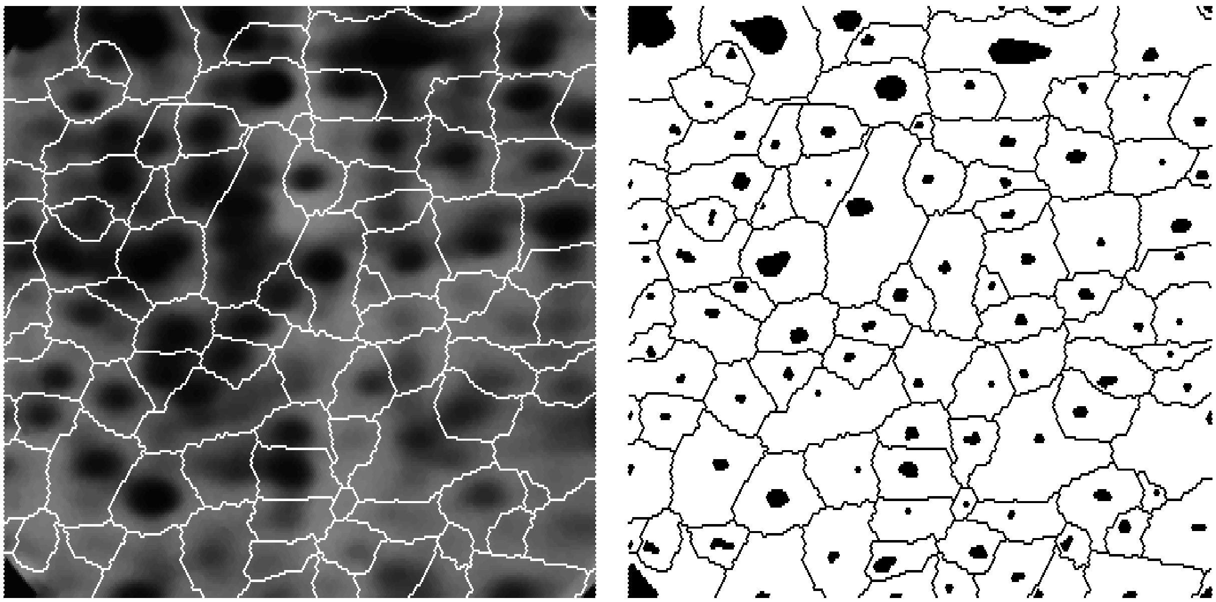


(c)

Figure VI-6

(a) Filtre alterné séquentiel de l'image de gel et (b) ses minima marquant les taches de façon plus propre. (c) La LPE du gradient reste cependant très segmentée.

En ce qui concerne la première exigence, on détient déjà la moitié de la solution : les minima de la fonction f filtrée constituent les marqueurs des taches de protéines. Quant au marqueur du fond, il peut être construit avec la LPE de l'image initiale filtrée (Figure VI-7-a). La ligne de partage obtenue est en effet connexe, et elle passe par construction par les points de l'image dont la valeur de gris est la plus éloignée de la valeur de gris des taches.



(a) (b)

Figure VI-7

(a) La LPE de l'image initiale filtrée utilisée comme marqueur du fond

(b) Ensemble des marqueurs (taches + fond)

L'union de ces deux ensembles de marqueurs constituera donc les minima choisis a priori pour réaliser l'inondation du gradient (Figure VI-7-b). Notons que les deux ensembles de marqueurs doivent être disjoints. Si M_1 désigne les marqueurs des taches, et M_2 le marqueur unique du fond, l'ensemble marqueur global n'est pas l'union de M_1 et M_2. Il se peut en effet que certaines composantes connexes de M_1 soient adjacentes à M_2. Ces composantes connexes perdraient alors leur caractère de marqueur, car leur bassin versant associé fusionnerait avec le fond. Pour éviter cela, le marqueur global M utilisé est défini par (Figure VI-8) :

$$M = M_2 \cup [M_1/(M_2 \oplus H)]$$

Remarquons que, du fait que la fonction initiale est le résultat d'un filtre alterné séquentiel, chaque composante connexe de M_1 est un ouvert de taille 1. L'opération $M_1/(M_2 \oplus H)$ ne peut donc pas supprimer de composante connexe.

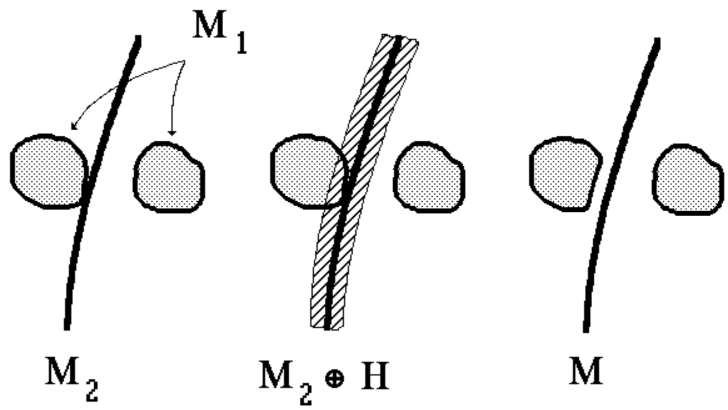


Figure VI-8

Opérations de séparation des marqueurs des taches et du marqueur du fond

Pour satisfaire la deuxième exigence, nous allons utiliser l'algorithme basé sur la construction de la LPE seuil par seuil qui nous a servi lors de la définition de cette transformation (cf. chapitre 4) en la modifiant de façon à tenir compte uniquement des minima imposés. La modification est la suivante :

L'initialisation de l'algorithme consiste à prendre l'ensemble M des minima imposés comme initiateur des bassins versants :

$$W_o = M$$

Puis l'inondation au niveau i des bassins versants W_i s'effectue par squelette par zones d'influence géodésique des bassins versants au niveau i-1, dans l'espace $Z_i(g) \cup M$, g désignant le gradient :

$$W_i = SKIZ_{Z_i(g) \cup M}(W_{i-1})$$

La Figure VI-9 illustre l'algorithme (BEUCHER, 1982, [06]).

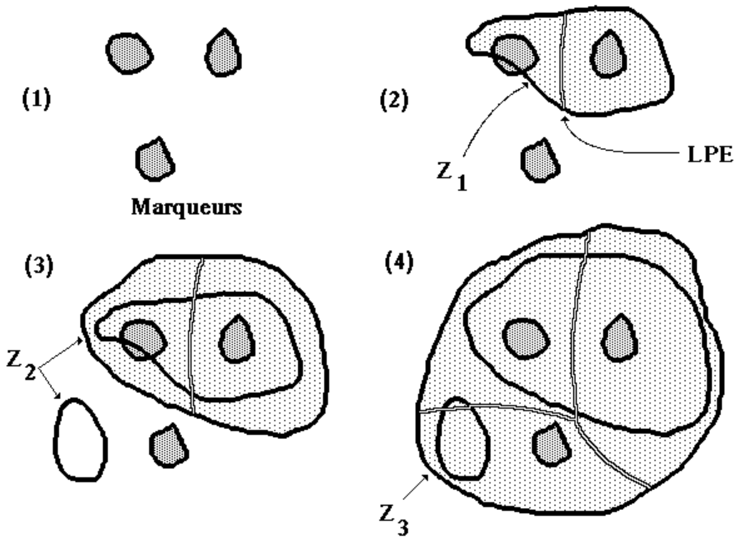


Figure VI-9

Algorithme de ligne des partage des eaux avec choix des minima. Inondation illustrée avec les sections de la fonction.

Deux différences essentielles existent entre cet algorithme et celui de la LPE classique : d'abord le SKIZ géodésique s'effectue dans $Z_i(g) \cup M$ et non dans $Z_i(g)$. En effet, W_{i-1} doit être inclus dans l'espace géodésique. Or comme :

$$M = W_o \subset W_{i-1}$$

on n'est pas assuré que W_{i-1} soit inclus dans $Z_i(g)$, d'où l'adjonction de M à ce niveau de seuil. La deuxième différence est qu'on n'adjoint pas à W_i les minima de g apparus au niveau i.

L'avantage de cet algorithme est qu'on peut en donner une formulation à l'aide de la reconstruction de fonction (cf. chapitre 3) en le décomposant en deux étapes.

Considérons en effet l'ensemble $Z_i(g) \cup M$. Cet ensemble peut être formé de plusieurs composantes connexes. Parmi ces composantes connexes, certaines contiennent des points de W_{i-1}, d'autres non (Figure VI-10).

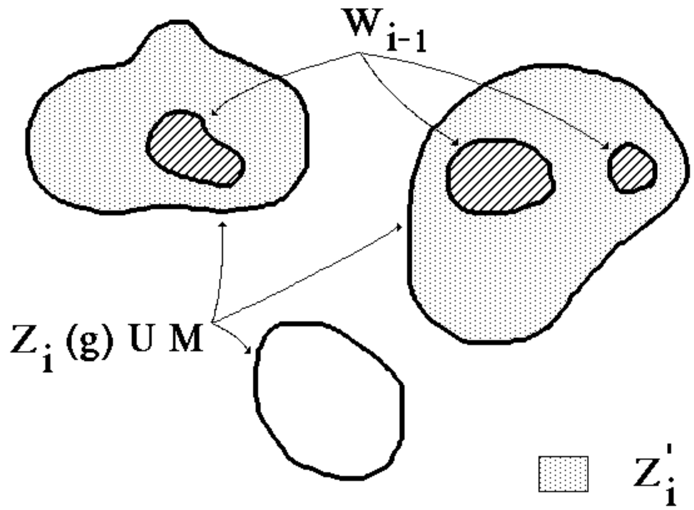


Figure VI-10

Relations entre les composantes connexes de $Z_i(g) \cup M$ et de W_{i-1}

Considérons l'ensemble Z'_i constitué des composantes connexes de $Z_i(g) \cup M$ marquées par W_{i-1}. On peut écrire :

$$Z'_i = R_{Z_i(g) \cup M}(W_{i-1})$$

(R désigne la reconstruction d'ensemble).

On constate alors immédiatement que :

$$W_i = SKIZ_{Z_i(g) \cup M}(W_{i-1}) = SKIZ_{Z'_i}(W_{i-1})$$

Explicitons alors davantage Z'_i. On peut écrire :

$$Z'_i = R_{Z_i(g) \cup M}(W_{i-1}) = R_{Z_i(g) \cup M}(M)$$

puisque $\forall i,\ W_{i-1} \supset M$.

Supposons qu'il existe une valeur g_{max} telle que le gradient g soit toujours inférieur ou égal à g_{max} :

$$0 \leq g \leq g_{max}$$

Définissons alors une fonction h :

$$h(x) = -1 \quad , \forall x \in M$$
$$h(x) = g_{max} \quad , \forall x \in M^c$$

On peut alors écrire :

$$\forall(-1 \leq i < g_{max}) \; , \quad Z_i(h) = M$$
$$\forall(i < -1) \qquad , \quad Z_i(h) = \emptyset$$

L'ensemble $Z_i(g) \cup M$ est donc, pour les valeurs de i comprises entre -1 et g_{max}, égal à :

$$Z_i(g) \cup M = Z_i(g) \cup Z_i(h)$$
$$= Z_i(\mathrm{Inf}(g,h))$$

D'après les formules de la reconstruction de fonction explicitées au chapitre 3, on peut écrire que Z'_i est le seuil au niveau i de la fonction :

$$R^*_{\mathrm{Inf}(g,h)}(h) = g'$$

où R^* désigne la reconstruction duale.

Cette fonction n'a, par construction, pas d'autres minima que ceux constituant l'ensemble M. On peut donc écrire :

$$W_i = SKIZ_{Z_i(g')}(W_{i-1}) = SKIZ_{Z_i(g')}(W_{i-1}) \cup m_i(g')$$

puisque, $\forall\ i \geq 0,\ m_i(g') = \emptyset$.

En posant :

$$W_{-1} = M$$

on trouve donc que l'algorithme précédent n'est rien d'autre que la ligne de partage des eaux de la fonction g'. Cette fonction n'est elle-même que la fonction gradient g modifiée en lui imposant comme minima les composantes connexes de M. Cette fonction s'obtient comme on l'a vu, en reconstruisant par érosions géodésiques (c'est une reconstruction duale) Inf(g,h) par h. La Figure VI-11 illustre l'algorithme. On veillera lors de la construction de h à affecter la valeur -1 aux points appartenant aux minima imposés. Si pour des raisons de facilité d'implantation en machine, on posait :

$$h(x) = 0 , \qquad \forall\ x \in M$$

$$h(x) = g_{max} + 1, \ \forall\ x \in M^c$$

il faudrait alors reconstruire la fonction Inf(g+1,h).

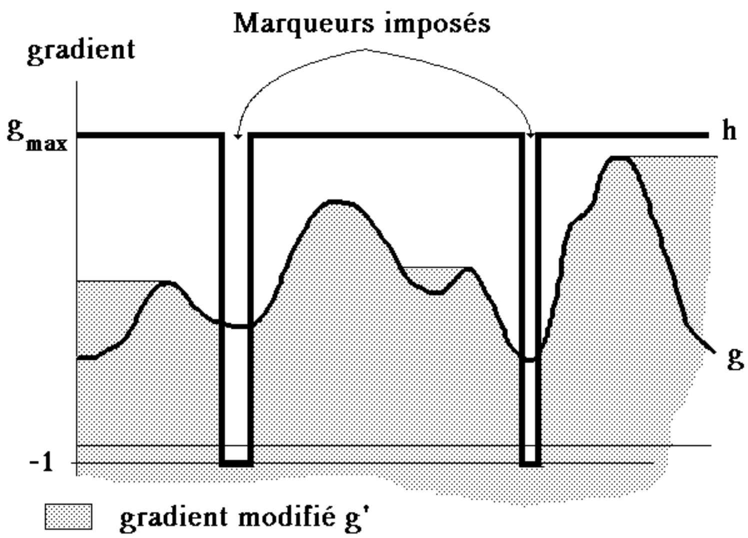
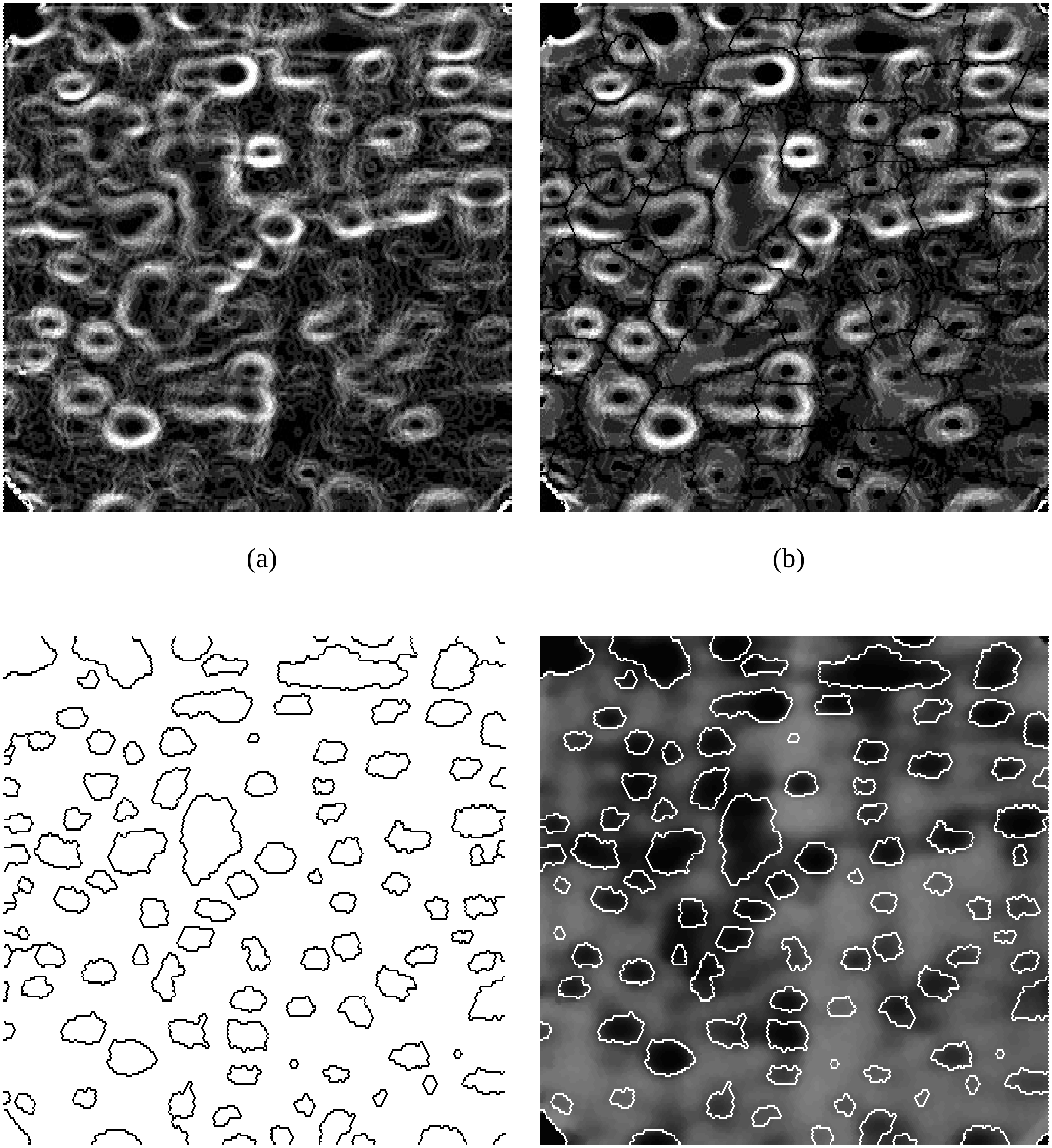


Figure VI-11

Modification de l'homotopie d'une fonction par reconstruction géodésique

L'opération ainsi réalisée apparaît donc comme une *modification de l'homotopie* de la fonction initiale (ou du moins de la semi-homotopie inférieure puisque seuls les minima sont utilisés).

Ayant désormais en mains tous les outils nécessaires à la satisfaction des exigences déjà énoncées, calculons le gradient g de notre image (Figure VI-12-a), imposons à ce gradient l'ensemble M des marqueurs des taches et du



(a) (b) (c) (d)

<u>Figure VI-12</u>

Etapes de la segmentation des taches d'électrophorèse : (a) gradient, (b) gradient modifié par reconstruction géodésique à partir des marqueurs, (c) LPE du gradient modifié, (d) résultat final.

fond (cf Figure VI-7) et modifions ce gradient par reconstruction pour obtenir l'image g' (Figure VI-12-b). Il suffit alors d'effectuer la LPE de g' (Figure VI-12-c) pour aboutir à une segmentation des taches exempte de toute sur-segmentation. Il ne reste plus alors qu'à reconstruire les bassins versants correspondant aux marqueurs des taches pour éliminer dans le fond d'éventuelles LPE locales (Figure VI-12-d).

I-3) Critiques et améliorations de la méthodologie

Plusieurs critiques peuvent être formulées à l'encontre de cette segmentation d'image. On peut remarquer que la mise en évidence des taches n'est pas parfaite : certaines semblent mal entourées, d'autres oubliées. Tous ces défauts cependant ne sont pas rédhibitoires. Ils proviennent en effet, soit d'un marquage insuffisant des taches, soit du choix du marqueur du fond, soit encore d'une sélection inappropriée de la fonction dont on réalise, après modification, la LPE. Améliorer la segmentation consistera à mieux marquer les objets à extraire d'une part, à choisir la fonction que l'on va traiter d'autre part, cette fonction mesurant en quelque sorte l'appartenance de chaque point de l'image à tel ou tel marqueur. En fait,

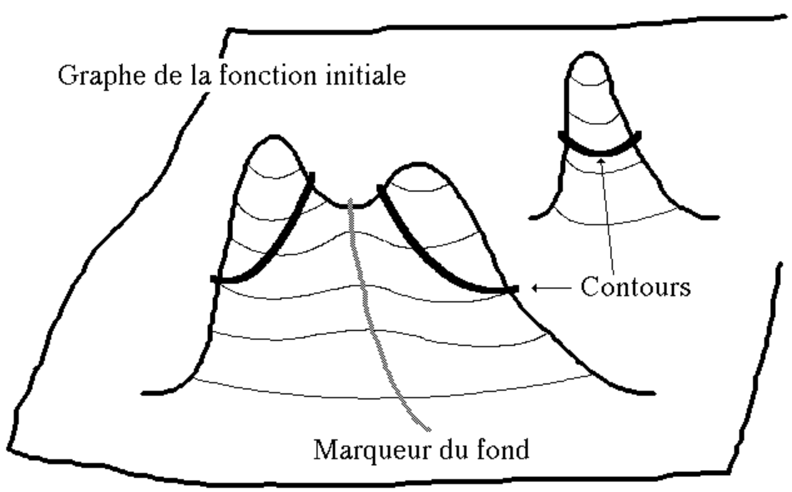
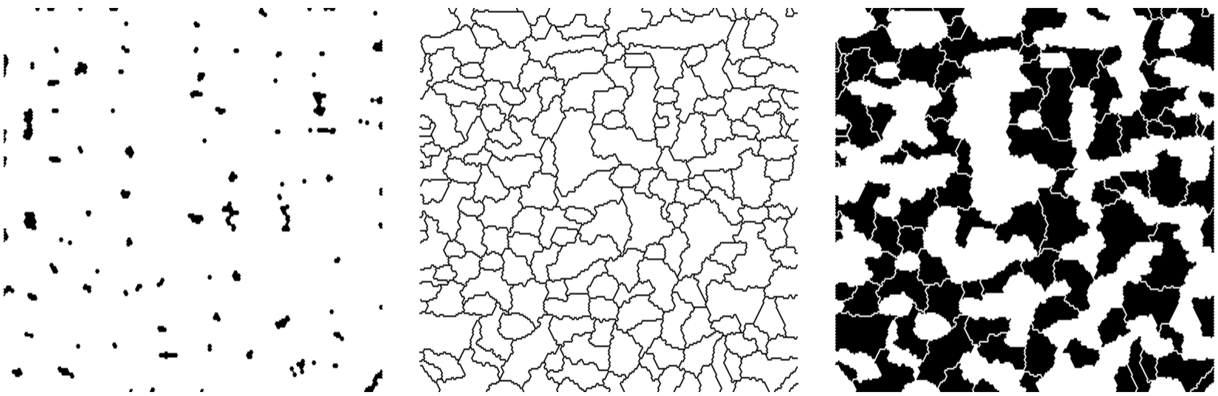


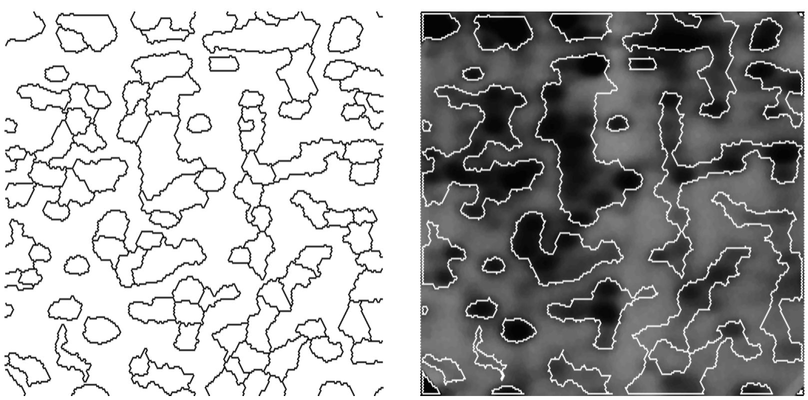
Figure VI-13

Position du contour des taches sur la surface topographique dessinée par la fonction initiale (elle a été inversée).

compte-tenu des définitions adoptées, le résultat obtenu est normal. Si le marquage des taches n'est pas complet, c'est que la définition d'une tache comme un minimum de la fonction initiale n'est pas suffisante. Il faudrait certainement tenir compte de la forme des taches, en particulier pour séparer les taches fortement imbriquées. De la même façon, le choix de la LPE de la fonction initiale comme marqueur du fond entraîne immanquablement le résultat final, où le contour des taches proches passent par les points d'inflexion maximale situé entre les minima de f et les points-selle (Figure VI-13) : les marqueurs utilisés n'autorisent pas l'adjacence de deux taches.



(a) (b) (c)



(d) (e)

Figure VI-14

Segmentation obtenue en modifiant le marqueur du fond : (a) marqueurs du fond, (b) résultat de la LPE, (c) reconstruction des bassins versants associés à des marqueurs du fond, (d) contour des taches, (e) contour des amas.

Pour illustrer notre propos, reprenons l'ensemble de la procédure de segmentation, mais en choisissant un autre marqueur du fond. Le fond n'est plus marqué par une seule composante connexe, mais par plusieurs, chacune d'elles correspondant à un maximum de la fonction de gris initiale (Figure VI-14-a). Le résultat de la segmentation fera apparaître une sur-segmentation du fond, mais cette dernière est attendue et parfaitement contrôlée (Figure VI-14-b). Pour l'éliminer, il suffit d'ôter de la LPE les éléments d'arcs séparant les bassins versants associés à des maxima de la fonction initiale (Figure VI-14-c). La modification de la définition du marquage du fond modifie également les contours obtenus. Avec cette définition, des taches peuvent être adjacentes (Figure VI-14-d). Cela permet aussi d'accéder à la notion d'amas de taches (Figure VI-14-e).

Ce premier exemple de segmentation d'image et ses variantes permettent de dégager un schéma synoptique général du processus. Segmenter une image consiste à mettre en évidence un ensemble de marqueurs M désignant les objets à extraire dans l'image et une fonction f quantifiant les transitions entre ces différents objets. La fonction f est alors modifiée par reconstruction géodésique, afin de produire une nouvelle fonction f' ayant pour minima l'ensemble M. Il suffit alors d'effectuer la ligne de partage des eaux de f' pour segmenter l'image (Figure VI-15).

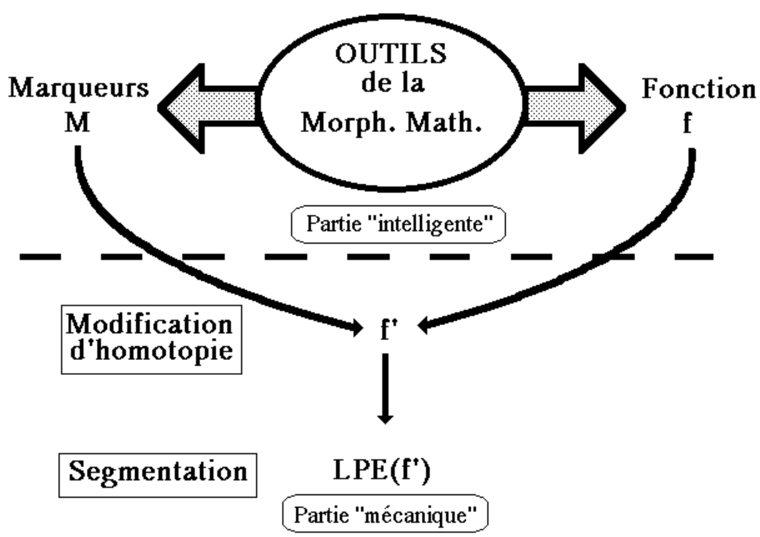


Figure VI-15

Principe de la segmentation d'image par LPE et modification d'homotopie

Le processus est ainsi divisé en deux étapes : une étape "intelligente" consistant à mettre en évidence l'ensemble M et la fonction f, et une étape "mécanique", sans surprises, consistant à utiliser les outils de la segmentation constitués de la modification de fonction et de la LPE. La première étape est donc cruciale et de la qualité des marqueurs et de la fonction numérique segmentée dépendront la qualité des résultats. C'est là que les outils de la morphologie trouvent leur pleine utilité.

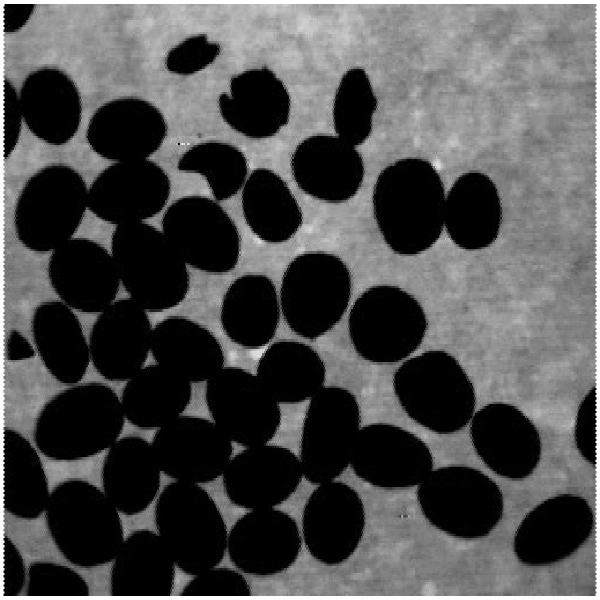
II) EXEMPLES D'APPLICATIONS

Nous allons maintenant illustrer ce processus avec quelques exemples de segmentation. Ces exemples sont également destinés à montrer la diversité des marqueurs et des fonctions utilisés ainsi que des moyens pour les acquérir.

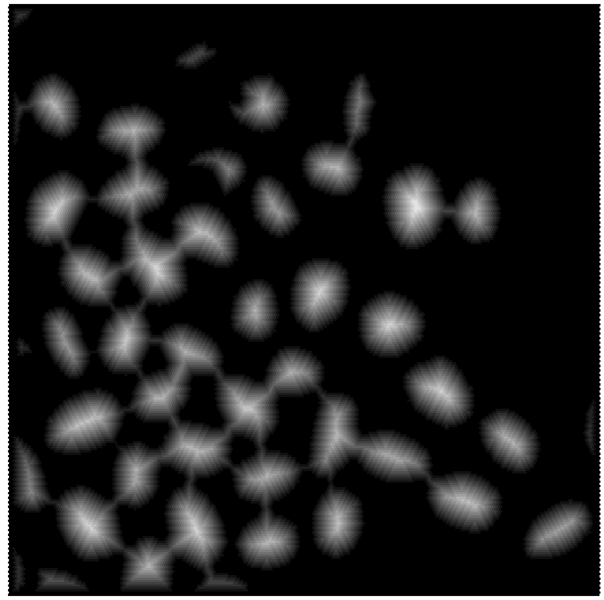
II-1) Erodé ultime et segmentation binaire

Ce premier exemple est paradoxalement plus simple que le précédent. On le décrira cependant car les transformées décrites seront utilisées plus tard, et aussi car il montre que la segmentation d'objets n'est pas forcément liée à la présence de contours.

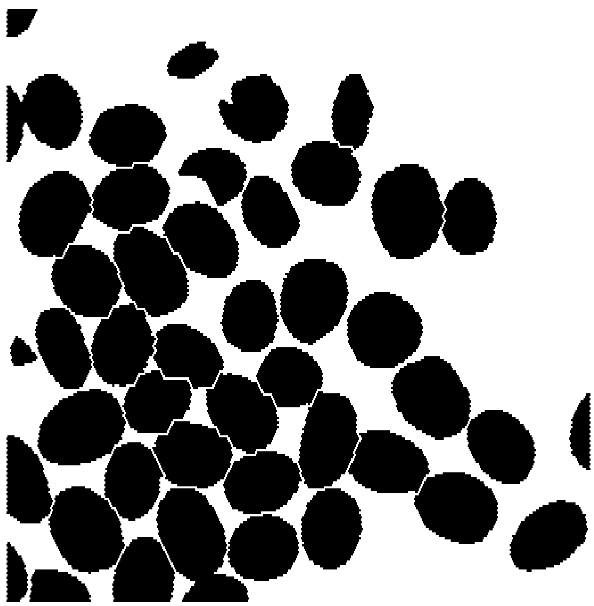
Considérons l'image de la Figure VI-16-a. Elle représente un assemblage d'objets relativement convexes et plus ou moins imbriqués. Ce type d'assemblage se rencontre assez souvent en analyse d'images : assemblage de cellules en cytologie, billes dans un matériau fritté, mélange de grains, etc... Face à ce genre d'objet, deux problèmes se posent : déterminer le nombre de particules composant l'assemblage et déterminer leur taille. Ces deux paramètres peuvent être mesurés par le biais d'une segmentation. La fonction f utilisée est la fonction distance de l'ensemble à segmenter (Figure VI-16-b). Quant aux marqueurs des particules, ce sont les maxima de la fonction-distance. Ces maxima constituent l'*érodé ultime* de l'ensemble de départ (LANTUEJOUL, BEUCHER, 1979, [51]). La ligne de cols de la fonction-distance (ou du moins sa restriction à l'ensemble à segmenter) permet la segmentation (Figure VI-16-c). Cet exemple est donc plus simple que le cas général, puisque les marqueurs sont également les maxima de la fonction-distance. Là encore, la nature des marqueurs et de la fonction



(a)



(b)



(c)

Figure VI-16

Segmentation de grains : (a) image initiale (grains de café), (b) fonction-distance, (c) résultat de la segmentation par lignes de cols de la fonction-distance.

conditionnent la qualité du résultat obtenu. Cette segmentation est adéquate si les particules constitutives de l'assemblage sont suffisamment circulaires et pas trop imbriquées. Si ce n'est pas le cas, d'autres marqueurs peuvent être utilisés, telles les bissectrices conditionnelles (MEYER, 1978, [63]) ou bien une autre fonction comme la fonction critique (MARAGOS *et Al*, 1986, [58], BEUCHER, VINCENT, 1988, [25]).

II-2) Segmentation tridimensionnelle

Ce deuxième exemple d'application nécessite la segmentation de particules tridimensionnelles. Ces particules sont des gouttes d'eau en suspension dans un brouillard. Etant donné le caractère instable et difficile à manipuler de l'échantillon, une technique particulière d'acquisition d'images a été utilisée. Elle consiste à prendre une image holographique du brouillard, puis à restituer l'image 3D grossie, à partir

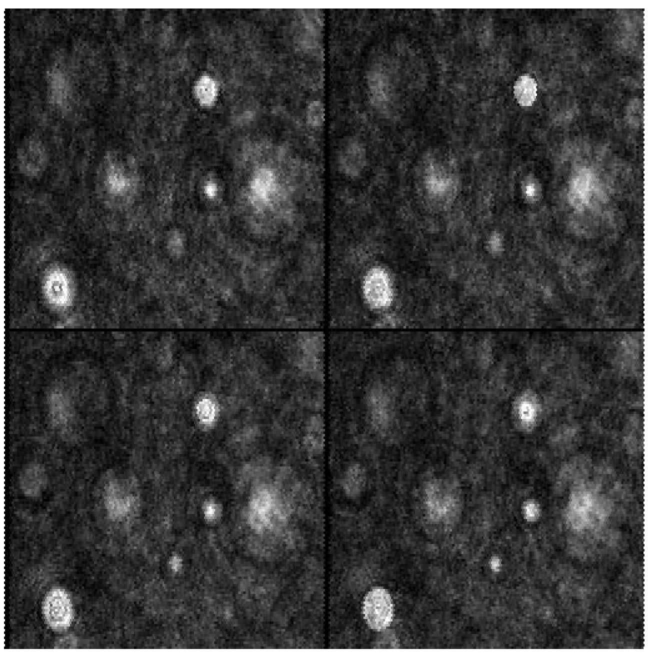


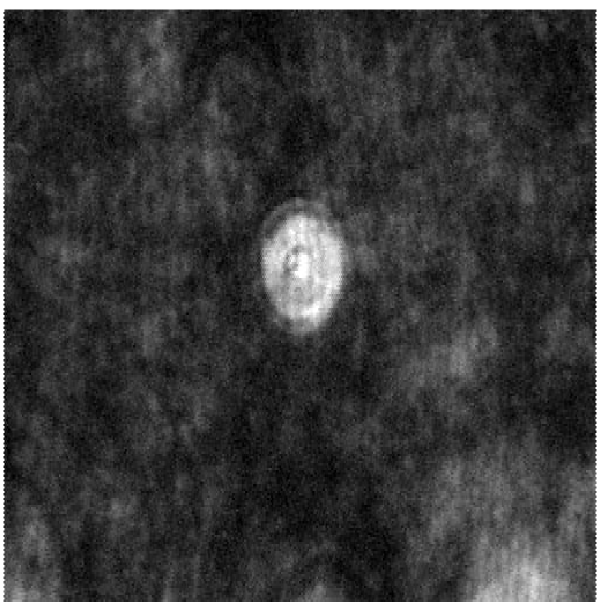
Figure VI-17

Sections successives d'une image 3D reconstituée à partir d'un hologramme

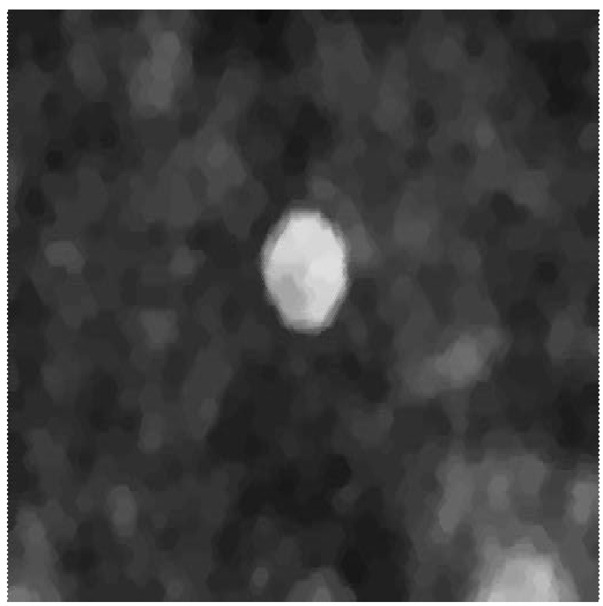
de l'hologramme. L'image 3D est alors observée avec une caméra vidéo de faible profondeur de champ, ce qui permet de découper des tranches épaisses d'observation. L'ensemble de l'échantillon est donc représenté par une séquence d'images $\{f_i\}$. La Figure VI-17 représente quelques sections de la séquence. La technique d'acquisition et le grandissement induisent divers artefacts dans les images : bruit, moiré, et surtout des anneaux de diffraction (anneaux de Newton). Le problème posé est le suivant : déterminer pour chaque goutte ses coordonnées tridimensionnelles, ainsi que son volume. Comment marquer les gouttes ? On remarque que ces gouttes apparaissent comme des taches claires dans les images f_i. La tache sera d'autant plus claire que la section observée sera proche de la goutte, la faible profondeur de champ du système optique provoquant très rapidement une perte de contraste dès qu'on s'écarte de la goutte. Comme on ne sait pas a priori dans quelle section se produira le maximum de luminance, on va utiliser toutes les images f_i, et calculer leur sup. Mais avant cela, afin d'éliminer les différents artefacts déjà décrits, un filtre alterné séquentiel est réalisé sur l'ensemble de la séquence. Ce filtre est défini par :

$$\gamma_3 \circ \varphi_3 \circ \gamma_2 \circ \varphi_2 \circ \gamma_1 \circ \varphi_1 = \Phi$$

Il commence par une fermeture afin d'éliminer les franges sombres provoquées par les anneaux de Newton. La Figure VI-18 illustre le résultat. La taille du FAS est calculée de façon à être supérieure à l'épaisseur moyenne des franges.



(a)



(b)

Figure VI-18

Image initiale (a) et FAS (b)

On peut alors mettre en évidence les taches claires en calculant le sup des images et en prélevant les maxima significatifs. Partant de l'image g des sups (Figure VI-19) :

$$g = \operatorname{Sup}_i [\Phi(f_i)]$$

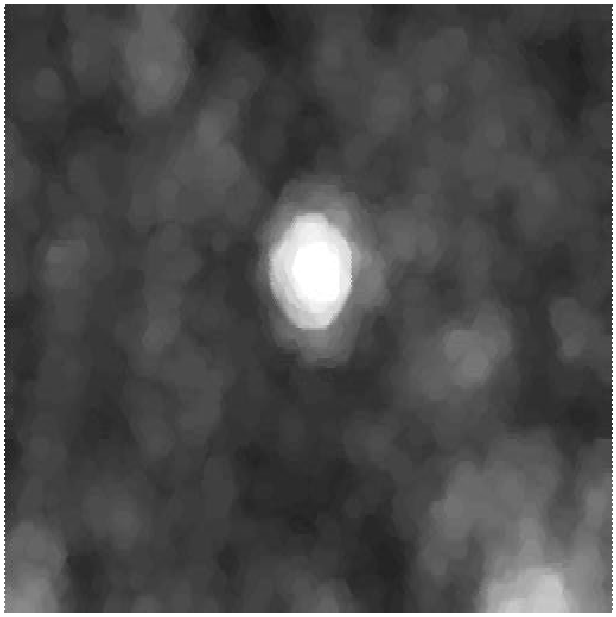


Figure VI-19
Sup des différentes sections après filtrage

on détermine sur l'image les maxima significatifs en détectant ceux qui sont suffisamment profonds. Pour cela, on utilise une variante de l'algorithme d'extraction des maxima décrit au chapitre 3. Pour mettre en évidence les maxima d'une fonction g plus profonds que h, il suffit d'effectuer la transformation suivante :

$$R_g(g - h)$$

et de déterminer les maxima de cette nouvelle fonction pour marquer les maxima de la fonction initiale de profondeur supérieure à h.

La Figure VI-20 illustre l'algorithme.

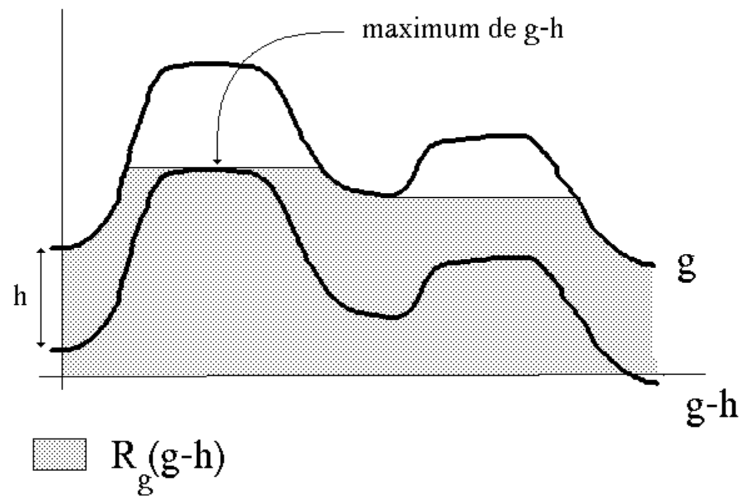
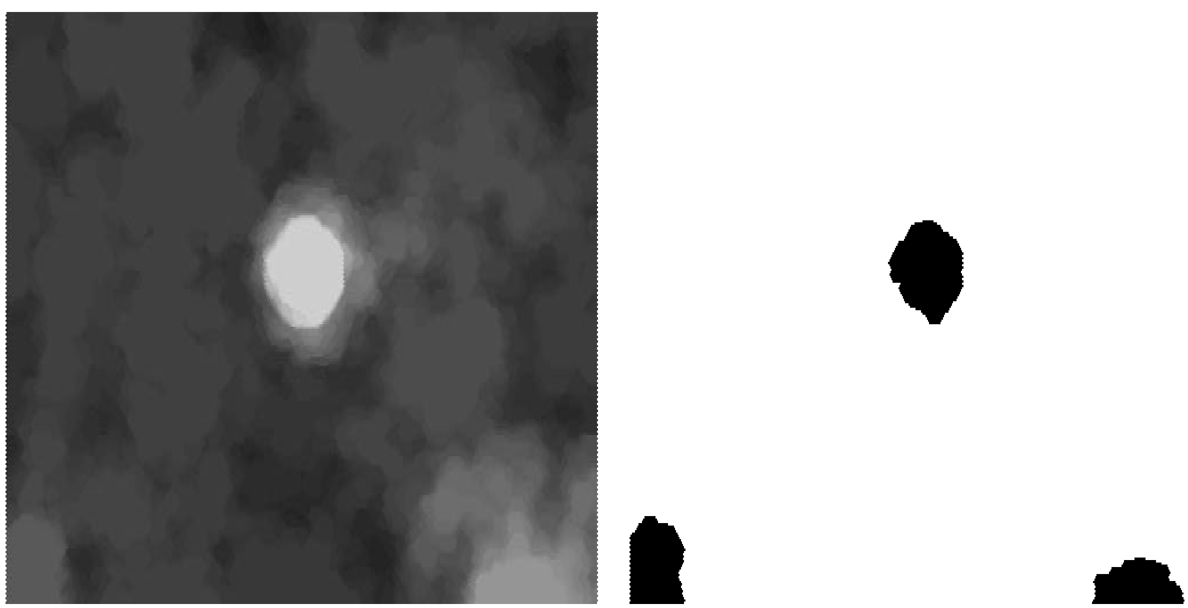


Figure VI-20

Principe de l'extraction de maxima plus profonds qu'une valeur h donnée

La profondeur h correspondant aux maxima significatifs est un paramètre caractéristique du procédé de prise de vues et du nombre de sections réalisées dans l'image 3D.



(a) (b)

Figure VI-21

(a) Image sans ses maxima non significatifs, (b) marqueurs des gouttes

La Figure VI-21-a représente l'image reconstruite, dans laquelle les maxima non significatifs ont été éliminés. Les maxima restants sont alors mis en évidence (Figure VI-21-b) et constituent les marqueurs des gouttes présentes dans le volume analysé. Notons que ce marquage sera pris en défaut si deux gouttes sont à l'aplomb l'une de l'autre. Dans ce cas, un seul marquage apparaîtra. On peut cependant améliorer l'algorithme, soit en détectant ce phénomène directement, soit en le corrigeant en fin de procédure. La prise en compte directe consiste non seulement à calculer le sup des $\Phi(f_i)$, mais également à vérifier que lorsqu'on traverse les différentes sections de $\Phi(f_i)$ suivant un axe des profondeurs perpendiculaire au plan des images, la fonction dessinée par les valeurs de gris successives rencontrées ne présente qu'un seul maximum en fonction de i. Si c'est le cas, une seule goutte est détectée, sinon il faudra utiliser autant de marqueurs qu'il y a de maxima, donc de gouttes (Figure VI-22). Dans l'exemple traité, étant donné le faible nombre de gouttes et la profondeur de la séquence, cette variante n'a pas été utilisée.

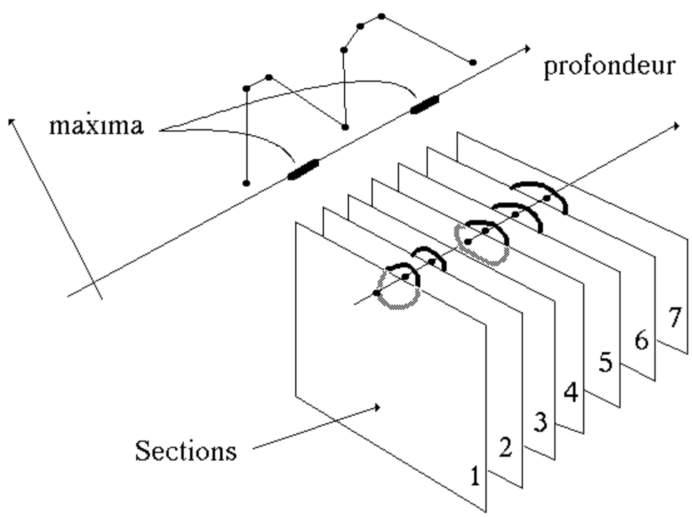


Figure VI-22

Amélioration possible dans la détection des marqueurs des gouttes en employant une vraie recherche tridimensionnelle des maxima.

Le marqueur du fond est, comme pour les électrophorèses, déterminé en effectuant la ligne de cols de l'image de travail (Figure VI-23).

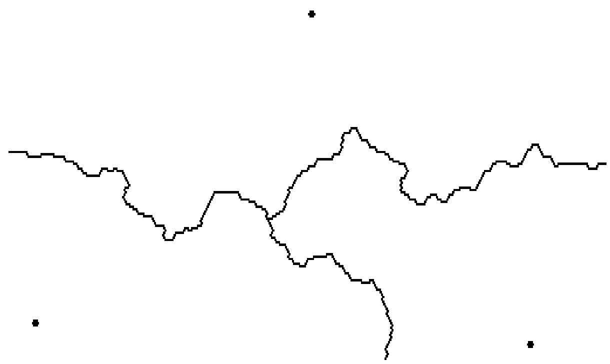


Figure VI-23

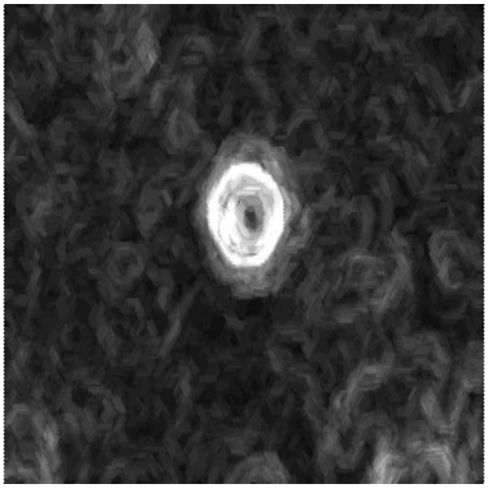
Marqueurs de gouttes et du fond

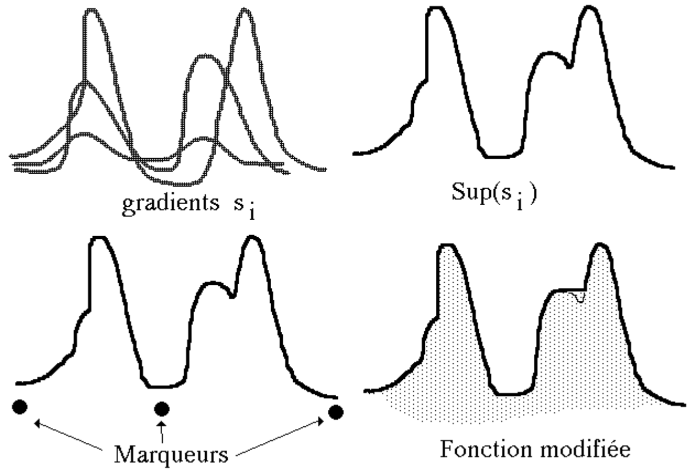
La fonction qui sera modifiée et dont la LPE délimitera le contour des gouttes est déterminée en remarquant que plus la section de l’image tridimensionnelle est proche d’une goutte, plus son contraste augmente. On pourra donc construire une fonction dont la LPE sera représentative du contour vrai de la goutte en calculant le gradient dans chaque section et en déterminant le sup de ces gradients (Figure VI-24-a). On remarquera qu’il n’est point besoin que les crêtes du gradient dans chaque section soient emboitées les unes dans les autres, puisque la modification de la fonction, par construction, ne conserve que la crête d’altitude la plus élevée. La Figure VI-24-b représente ce sup de gradient, fonction notée s. En fait, et afin d’améliorer la détection des contrastes, on calcule un gradient tridimensionnel : pour chaque section i, on tient compte des sections i - 1 et i + 1. Cela revient à calculer le gradient morphologique en utilisant comme élément structurant non pas un disque mais un "diamant". La section i du gradient est alors donnée par :

$$s_i = \mathrm{Sup}[\Phi(f_{i+1}),\ \Phi(f_{i-1}),\ \Phi(f_i) \oplus H]$$
$$- \ \mathrm{Inf}[\Phi(f_{i+1}),\ \Phi(f_{i-1}),\ \Phi(f_i) \ominus H]$$

et :

$$s = \operatorname{Sup}_i(s_i)$$





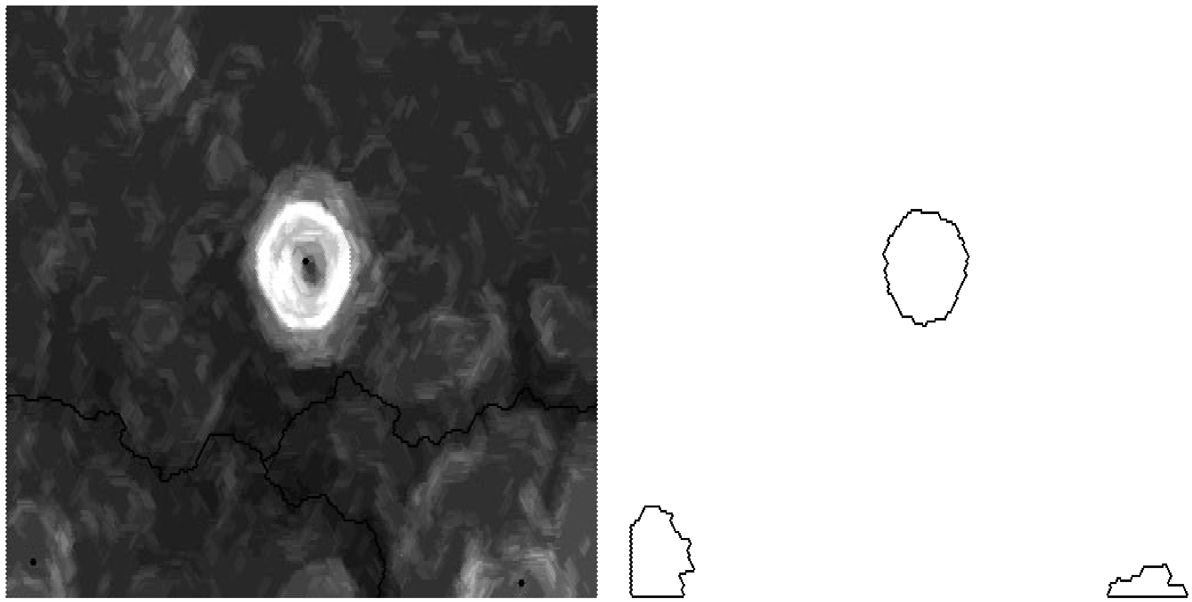
(a) (b)

Figure VI-24

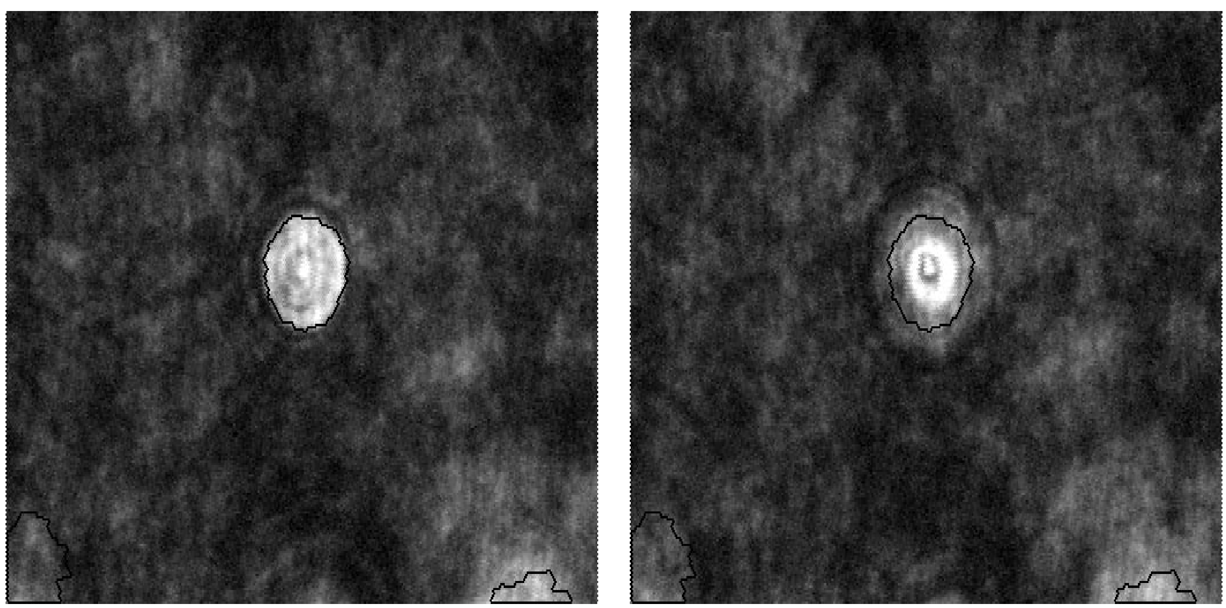
Sup des gradients des différentes sections (a). Le résultat de la modification d'homotopie n'est pas sensible à la position des crêtes dans chaque section (b).

Il ne reste plus qu'à modifier la fonction s avec les minima imposés précédemment définis (Figure VI-25-a). On remarquera que les marqueurs des taches ont été amincis afin d'être certain que leur position corresponde au centre des gouttes et qu'ils ne débordent pas sur le fond. La LPE de la fonction s' modifiée (Figure VI-25-b) correspond alors au contour le plus contrasté comme le montre les Figures VI-25-c et VI-25-d.

Il n'est pas très difficile de reprendre le même ensemble de marqueurs pour tracer les limites des gouttes dans chaque section. En effet, partant des gradients s_i, on peut modifier leur homotopie, obtenir une image s'_i dont on calcule la LPE. On peut alors comparer les images obtenues pour chaque section, avec l'image globale. En désignant par X_i^j, la jème composante connexe délimitée par la LPE dans la section i et par X^j la composante connexe correspondante dans l'image globale, il n'est pas difficile de déterminer la section i pour laquelle X_i^j est la plus proche de X^j (Figure VI-26). On peut utiliser la métrique de Hausdorff, ou plus simplement les maxima d'une fonction de vraisemblance $C_j(i)$ définie par :



(a) (b)



(c) (d)

Figure VI-25

(a) modification de l'image s, (b) résultat de la segmentation, (c) contour détecté par rapport à la section la plus contrastée, (d) contour par rapport à une section quelconque.

$$C_j(i) = \frac{\text{Aire } (X_i^j \cap X^j)}{\text{Aire } (X_i^j \cup X^j)}$$

La section i pour laquelle cette fonction sera maximale déterminera la coordonnée verticale de la goutte j.

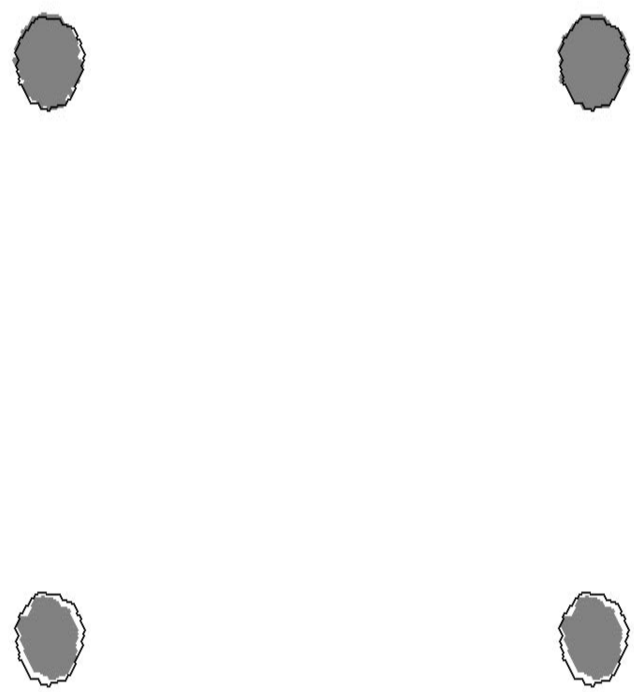


Figure VI-26

Comparaison des contours déterminés sur les différentes sections avec le contour optimal afin d'extraire la section la plus contrastée.

II-3) Segmentation d'une chaussée

Figure VI-27
Image de trafic autoroutier

Ce dernier exemple est à mi-chemin entre un problème de segmentation binaire et numérique. Le problème consiste à délimiter sur l'image d'une scène de trafic les différentes voies de circulation (Figure VI-27). De plus, on exige que cette séparation de la chaussée passe par le marquage au sol lorsqu'il existe, même s'il est composé de lignes pointillées. Cette exigence, on le comprend bien, conditionne la nature de la fonction f utilisée dans la ligne de partage. Pour construire cette fonction ainsi que les marqueurs des voies, deux images seront utilisées. La première, Im_1, est construite en calculant la moyenne sur une période de temps assez longue d'une séquence d'images. Si f_i désigne l'image de la scène au temps i, Im_1 est donnée par :

$$Im_1 = \sum_{i=1}^{n} (f_i)/n$$

où n est le nombre d'images de la séquence (typiquement plusieurs centaines). La seconde image Im_2 est calculée en sommant les différences en valeur absolue entre deux images consécutives dans la séquence :

$$Im_2 = \sum_{i=1}^{n-1} |f_{i+1} - f_i| /(n-1)$$

(a)

(b)

Figure VI-28

Les deux images utilisées pour la segmentation de la chaussée: (a) image Im_1, (b) image Im_2.

La première image représente la scène débarrassée des véhicules en mouvement, alors que la seconde au contraire marque les régions de l'image où le mouvement est important (Figure VI-28). Un seuillage adéquat de Im_2 fournira les marqueurs des voies. On ne détaillera pas ici les divers moyens permettant de déterminer la valeur de seuil appropriée pour obtenir un marqueur connexe par voie (pour cela, cf BEUCHER, BLOSSEVILLE *et Al*, 1987, [15]) d'autant que l'image étant une image moyenne, elle n'est pas très bruitée ce qui facilite cette détermination. De plus, dans ce cas de figure, seuls les marqueurs correspondant à la chaussée descendante sont conservés (Figure VI-29-a). Pour générer le marqueur du fond, une dilatation géodésique est effectuée. Cette dilatation utilise une fonction de réfringence η (cf chapitre 3) définie comme suit : l'espace-image est découpé en bandes d'égales épaisseurs. Chaque bande se voit affectée d'une valeur égale au double de la taille de la dilatation qui connecte dans la bande les marqueurs de chaque voie. En effectuant la dilatation généralisée des marqueurs des voies à l'aide de cette réfringence, on obtient un marqueur de la chaussée connexe (Figure VI-29-b). Ce marqueur tient compte de la perspective et déborde de la chaussée d'une distance égale en moyenne à la distance séparant le bord de la chaussée de la zone de circulation délimitée par les marqueurs des voies. Le complémentaire du dilaté fournit alors un marqueur de fond (Figure VI-29-c).

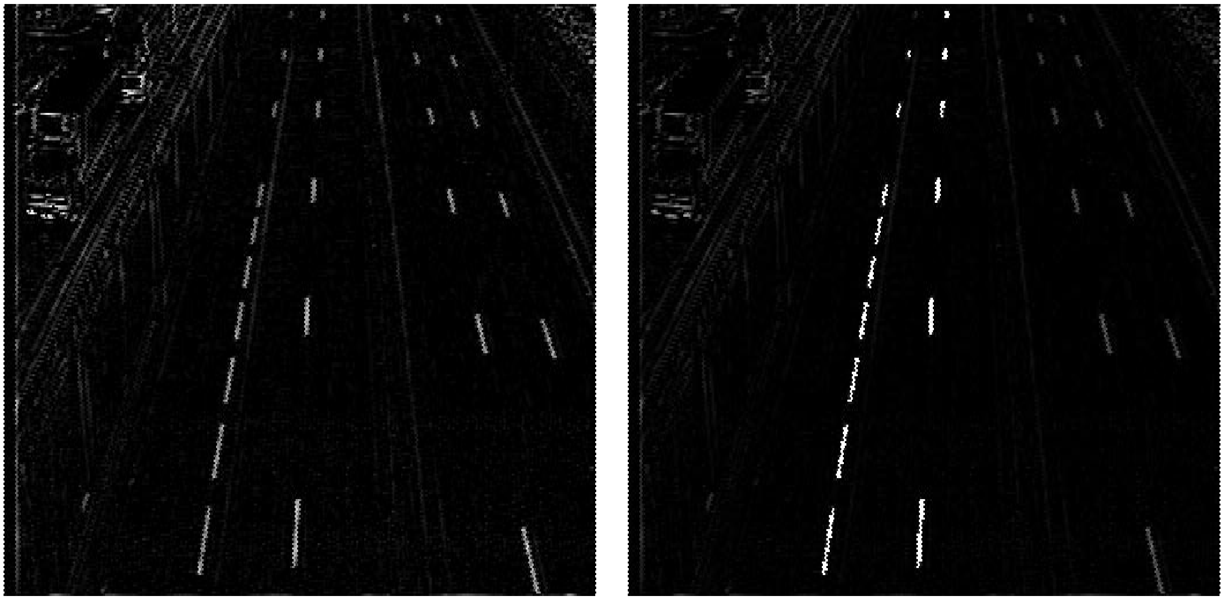
(a) (b) (c)

Figure VI-29

Marqueurs utilisés par la segmentation : (a) marqueurs des voies, (b) marqueur de la chaussée, (c) marqueur extérieur.

L'image M des marqueurs pourrait être utilisée directement pour effectuer la segmentation, en réalisant le squelette par zones d'influence SKIZ(M). Cette transformation reviendrait alors simplement à définir comme fonction origine de la LPE la fonction-distance $d(M^c)$. Cependant, comme on veut que les frontières entre les voies passent par le marquage au sol, on procède de la manière suivante : on commence par détecter le marquage au sol par une transformation Chapeau Haut-de-Forme de l'image Im_1 (Figure VI-30-a). Cette transformée seuillée et filtrée afin de ne conserver que les composantes connexes suffisamment allongées fournit l'ensemble du marquage au sol. De cet ensemble, on ne conserve que les composantes incluses dans le marqueur de la chaussée (Figure VI-30-b).

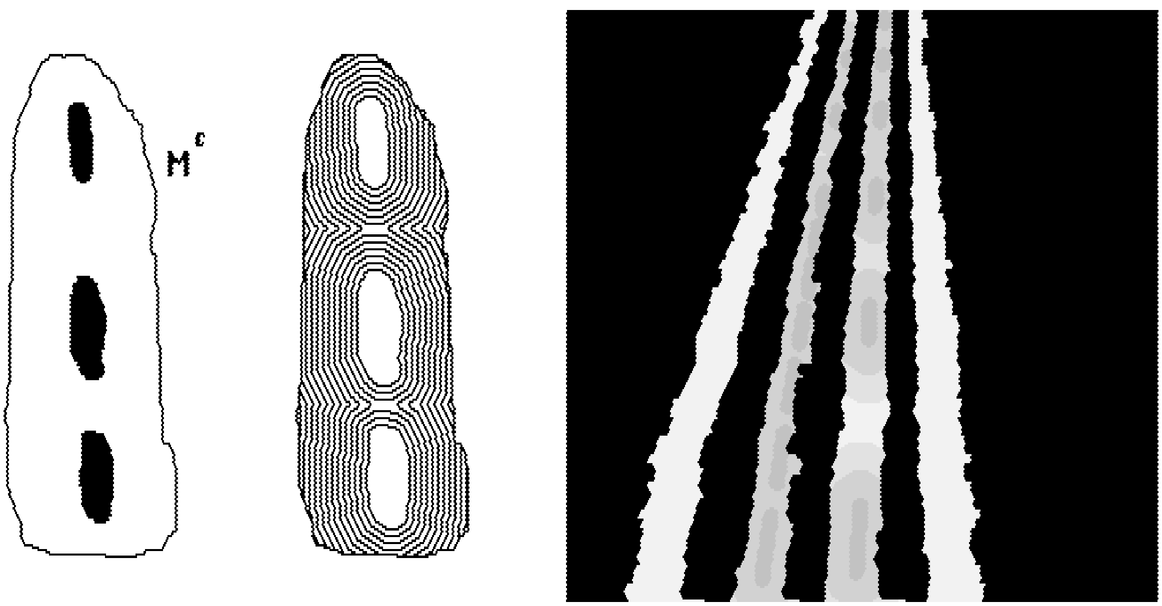
On calcule alors la fonction-distance géodésique de ces composantes du marquage au sol, ensemble noté X, dans l'espace géodésique M^c. La borne supérieure b_m de cette fonction-distance $d_{M^c}(X)$ est déterminée et on calcule alors la fonction :



(a) (b)

Figure VI-30

Détection du marquage au sol (a) et élimination des artefacts (b)



(a) (b)

Figure VI-31

(a) Principe du calcul de la fonction-distance géodésique $d_{M^c}(X)$*, et exemple réel (b).*

$$b_m - d_{M^c}(X)$$

Enfin, on définit la fonction sur laquelle on effectuera la LPE comme :

$$\mathrm{Sup}(b_m - d_{M^c}(X),\ k_{M^c})$$

où k_{M^c} désigne la fonction indicatrice de M^c. Cette fonction a comme minima les marqueurs M. De plus, s’il n’existe pas de marquage au sol (X = Ø), alors la fonction précédente vaut simplement k_{M^c} et on est ramené à un simple problème de SKIZ binaire. La Figure VI-31 donne un exemple de cette fonction. La segmentation de la chaussée s’obtient alors par LPE (Figure VI-32).

Ce dernier exemple est un peu particulier, car on n’a pas vraiment modifié l’homotopie d’une fonction pré-existante mais plutôt fabriqué de toutes pièces une fonction dont les minima avaient été choisis et qui respecte certaines contraintes (crêtes passant par le marquage au sol).

Figure VI-32

Résultat de la segmentation. Le découpage des voies de circulation passe par le marquage au sol.

De nombreuses applications de cette méthodologie existent dans divers domaines. La liste exhaustive serait trop importante. Citons cependant quelques exemples, afin de démontrer que la méthode présentée ici, loin d'être cantonnée à des problèmes particuliers se révèle au contraire très générale. Ainsi, elle s'applique en imagerie biomédicale, pour la segmentation de cellules cancéreuses (MEYER, 1979, [65]), pour la détection de vertèbres dans des images topographiques (PRETEUX, 1984, [73]), en radiologie numérique (GRIMAUD *et Al*, 1988, [39]), ou en cardiologie nucléaire où la segmentation est spatio-temporelle (FRIEDLANDER, 1989, [36]). Mais on l'utilise également dans les applications en matériaux, que ce soit en contrôle non destructif (BEUCHER, 1981, [05]), pour l'analyse de matériaux composites (KURDY, 1987, [46]) ou pour étudier le processus du frittage (DUPAIN *et Al*, 1979, [35]). Cette technique trouve d'autres applications en agro-alimentaire, pour l'analyse de processus de fermentation (LAROCHE, 1988, [53]), ou pour la quantification de poudres et de produits dispersés (BENALI *et Al*, 1986, [02]). Citons encore les applications en hydrogéologie (SOILLE *et Al*, 1989, [85]), en analyse des milieux poreux (GUEDJ, 1984, [41]), dans l'analyse de logs de sondages (RIVEST *et Al*, 1989, [74]), ou encore en télédétection (SOILLE *et Al*, 1990, [86]). Enfin, divers applications en reconnaissance de formes ont été réalisées à partir de la segmentation par ligne de partage des eaux (LOUVION, 1980, [56]).

Toutes ces applications utilisent, avec des variantes, le schéma de la segmentation décrit plus haut. Pourvu que le marquage des objets à extraire puisse se faire relativement facilement et pourvu que la fonction à segmenter soit accessible, cette méthodologie ne pose pas de problèmes et donne des résultats satisfaisants. Il existe cependant des cas, où l'extraction des marqueurs et de la fonction à segmenter ne sont pas évidents. Dans ce cas, le processus de segmentation est plus complexe, et si le schéma général marquage-segmentation demeure, il est alors souvent intégré dans des procédures plus lourdes. Nous en verrons quelques exemples dans le prochain chapitre.

CHAPITRE 7

SEGMENTATION D'IMAGES COMPLEXES

INTRODUCTION

La segmentation d'images basée sur l'utilisation conjointe de la ligne de partage des eaux et la modification d'homotopie est, les exemples du précédent chapitre l'ont montré, une méthode relativement efficace, pourvu que, d'une part, les marqueurs des objets à extraire soient faciles à déterminer, et que, d'autre part, la fonction modifiée support de la ligne de partage soit accessible de façon immédiate. Or, malheureusement, ces conditions ne sont pas toujours remplies, car le marquage est souvent complexe. Cette complexité a plusieurs causes. La première est le bruit dans l'image. En effet, si la segmentation par LPE est peu sensible au bruit dès lors que l'homotopie de l'image a été modifiée, il n'en est pas de même pour le marquage. Les applications du chapitre précédent ont d'ailleurs montré qu'un marquage efficace passe nécessairement par le filtrage de l'image. La deuxième raison de la difficulté du marquage provient de la complexité des objets à extraire. Il n'est pas toujours simple d'associer aux objets à segmenter des caractéristiques photométriques ou géométriques évidentes. Un objet peut être considéré comme un tout et se présenter néanmoins comme un assemblage de plages de gris de niveaux de gris différents. De la même façon, la géométrie des objets peut être très variable. A la difficulté du marquage, s'ajoute le problème de la détermination de la fonction qui sera modifiée puis transformée par LPE. Certes, lorsque les objets présentent des niveaux de gris suffisamment différenciés par rapport au fond, le choix du gradient ou de transformées comme le chapeau haut-de-forme sera parfaitement adapté. Mais ce n'est pas toujours le cas, en particulier lorsqu'il n'y a objectivement pas de contour fermé entourant les objets à segmenter. C'est le cas, par exemple, des voies de circulation dans le problème traité au chapitre précédent. D'autres critères de segmentation doivent alors être introduits, notamment ceux basés sur la forme et la géométrie des objets à détecter.

Que faire en pareil cas ? Puisque les difficultés rencontrées viennent de ce qui l'image à segmenter est trop complexe, une solution consiste à la simplifier, tout en conservant dans l'image simplifiée l'information pertinente pour la segmentation. On présentera une telle procédure de simplification basée sur la ligne de partage des eaux, et on montrera qu'elle conduit à une approche hiérarchique de la segmentation. On décrira ensuite quelques applications utilisant cette méthodologie, avec notamment l'introduction de quelques algorithmes permettant de prendre en compte plusieurs critères (contraste et forme) dans le processus de segmentation.

I) SEGMENTATION : UNE APPROCHE HIERARCHIQUE

Soit une image f. On a vu que la ligne de partage des eaux du gradient de f est généralement sur-segmentée. En l'absence de marquage des objets présents dans l'image, on est tenté de supprimer cette sur-segmentation en ôtant les éléments d'arc de la LPE qui correspondent à des gradients faibles. Cependant, cette procédure fait plus ou moins appel au choix de valeurs de seuils qui compromettent la robustesse du résultat. Une approche quelque peu différente sera décrite ci-dessous. Bien que la première étape du traitement ne soit pas obligatoire, sa présentation s'en trouve simplifiée dès lors qu'on passe par une image simplifiée de l'image initiale f, appelée *image-mosaïque* ou encore *image-partition*.

I-1) Image-mosaïque : définition et construction

Soit f une image et g son gradient morphologique. Effectuons la ligne de partage des eaux de g. A chaque bassin versant BV_i de LPE(g) correspond un minimum m_i du gradient. Effectuons dès maintenant une modification du gradient, en ne conservant que les minima correspondant à des zéros de g. Afin que les minima sélectionnés soient les plus représentatifs des régions homogènes de l'image, le gradient morphologique doit être calculé à l'aide d'épaississements et d'amincissements (cf. chapitre 2). Soit donc un bassin versant BV_i de l'image-gradient modifiée g' et m_i le minimum correspondant. A ce minimum, correspond une valeur de gris constante f_i sur la fonction initiale :

$$\forall \ x \in m_i \quad , \quad f(x) = f_i$$

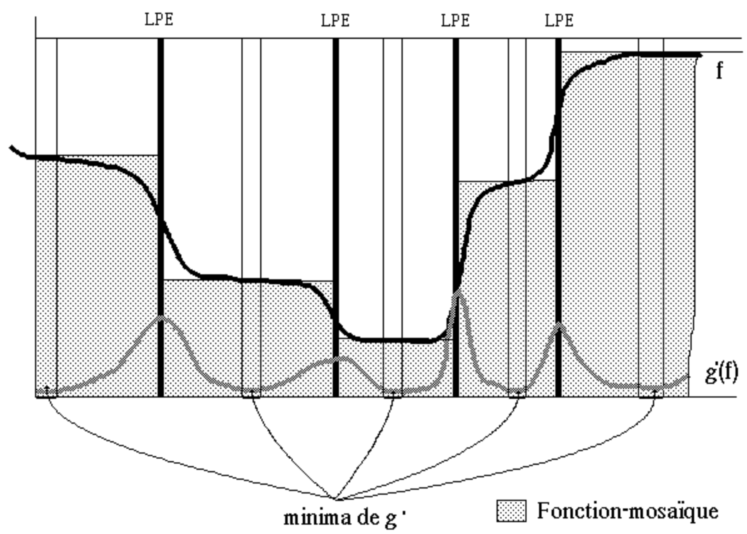
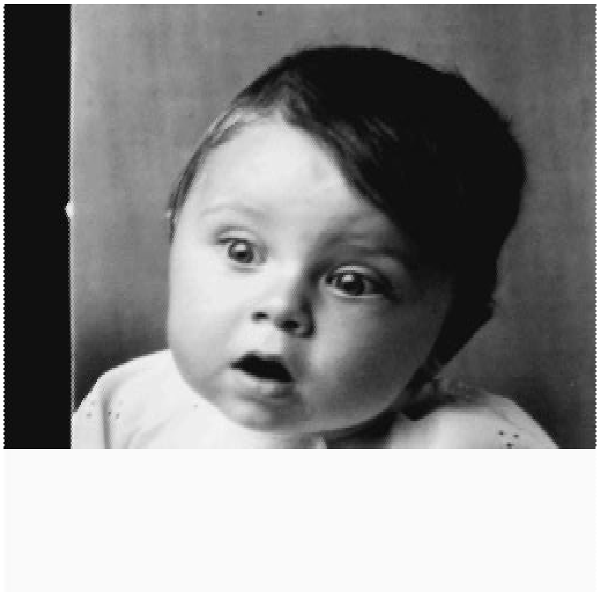


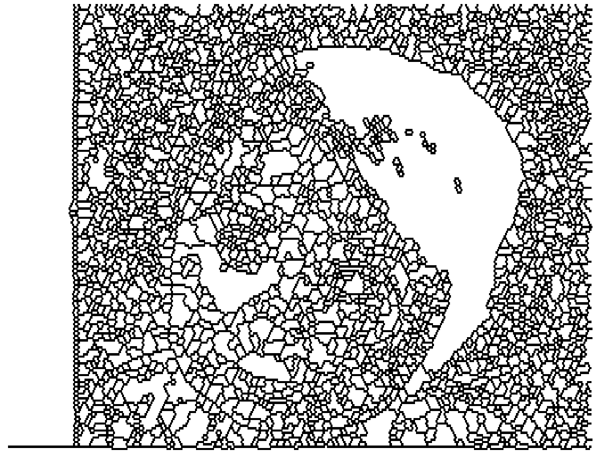
Figure VII-1

Principe de la construction de l'image-mosaïque

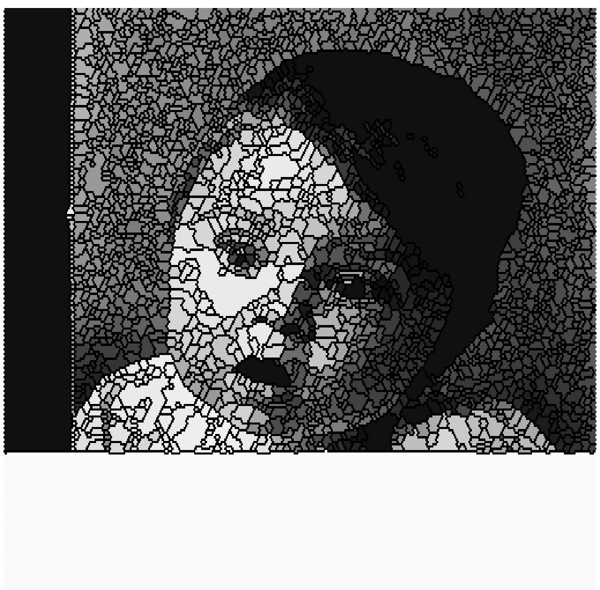
On peut alors définir une nouvelle fonction f' en affectant à chaque bassin versant BV_i la valeur f_i précédemment définie (Figure VII-1). La fonction f' ainsi obtenue est dénommée image-mosaïque ou image-partition (BEUCHER, 1981, [14], 1989, [11]).

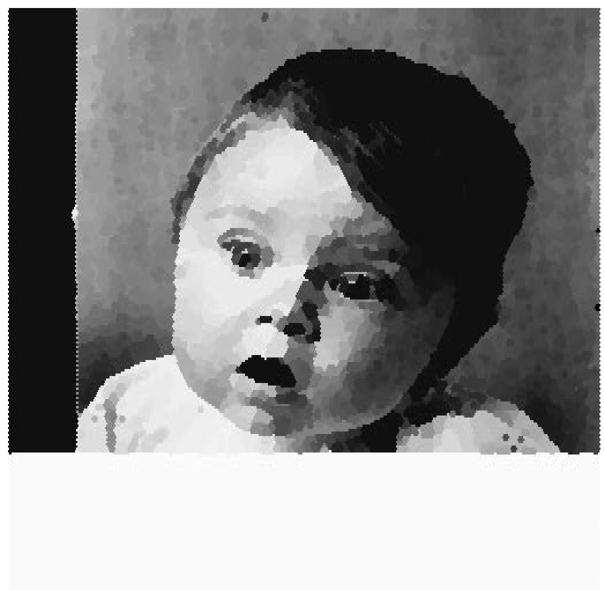
Pratiquement, comme chaque élément d'arc C_{ij} séparant deux bassins versants BV_i et BV_j adjacents n'est pas d'épaisseur nulle, on l'affecte arbitrairement de la valeur f_i ou f_j. Ceci n'aura aucune conséquence sur l'usage qui sera fait plus tard de cette image. La Figure VII-2 illustre la fabrication de cette image. Cette simplification transforme l'image initiale





(a) (b)





(c) (d)

Figure VII-2

Construction d'une image-mosaïque : (a) image initiale, (b) LPE du gradient initial, (c) valuation des bassins versants, (d) résultat final.

en une fonction étagée, un relief en terrasses. L'image-partition est intéressante à plus d'un titre. D'abord, elle présente un meilleur contraste que l'image initiale, puisque chaque contour apparaît désormais comme une marche d'escalier. Ensuite, l'information éliminée par la transformation n'est pas pertinente, puisque, par construction, on a préservé tous les contours qui sont apparus sur l'image initiale. L'image-mosaïque conserve les contours tout en les renforçant. Enfin, cette transformation permet d'utiliser sur les images à teintes de gris les opérations morphologiques définies sur des graphes (BURGER *et Al*, 1982, [28], VINCENT, 1989, [89]). Ainsi, chaque bassin versant BV_i peut être considéré comme un sommet d'un graphe valué. Le sommet Z_i a pour valuation f_i, et les arêtes D_{ij} relient les bassins versants adjacents (Figure VII-3). On verra cependant que ce n'est pas ce graphe qui sera utilisé par la suite, mais un autre généré à partir d'une autre transformation définie sur f' : le *gradient-mosaïque*. Considérons à nouveau, deux bassins versants adjacents BV_i et BV_j, valués respectivement avec les valeurs f_i et f_j. Alors, on peut affecter à chaque élément d'arc C_{ij} une valeur égale à :

$$h(C_{ij}) = |f_j - f_i|$$

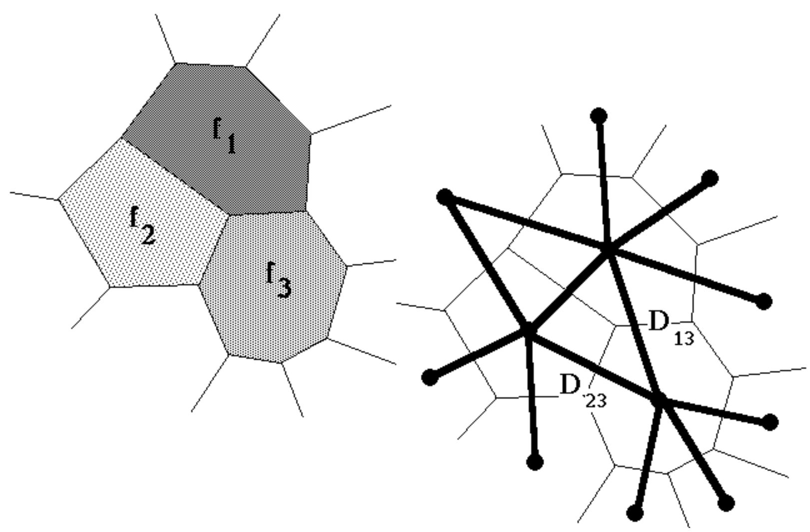


Figure VII-3
Exemple de graphe associé à l'image-mosaïque

La fonction h définie sur tout élément d'arc est le gradient de l'image-mosaïque ou plus simplement gradient-mosaïque (Figure VII-4). Ce gradient est par définition toujours non nul sur les éléments d'arcs constituant la LPE. Il peut cependant arriver, à cause d'erreurs de digitalisation ou d'un mauvais choix du gradient morphologique, qu'un arc de la LPE sépare deux bassins versants ayant même valuation dans l'image-mosaïque. Dans ce cas, le gradient-mosaïque est évidemment nul. On supprime alors de la LPE ces arcs sans intérêt pour la segmentation.

(a) (b)

Figure VII-4

Image-mosaïque (a) et son gradient (b)

I-2) Hiérarchisation et élimination de la sur-segmentation

Partant de l'image-mosaïque f' et de son gradient h, nous allons introduire une procédure de *hiérarchisation* susceptible d'éliminer la sur-segmentation de l'image. Avant de la décrire, donnons-en le principe, purement visuel et déterministe. Signalons également que le recours à l'image-mosaïque f' n'est pas obligatoire pour réaliser cette procédure. Son usage cependant simplifie grandement les algorithmes.

Considérons à nouveau le cas simple constitué par les taches d'électrophorèse idéales du chapitre précédent (voir Figure VI-1). La LPE du gradient sur-segmente l'image. Or, l'oeil distingue pourtant bien les régions plus ou moins homogènes constituées par les taches d'une part et le fond d'autre part. Les éléments d'arc de la LPE situés à l'intérieur de ces régions homogènes sont cependant moins pertinents que ceux qui contourent les taches, car le contraste entre deux bassins versants adjacents situés à l'intérieur d'une région visuellement homogène est plus faible que celui correspondant à une transition tache-fond. La solution classique pour éliminer les arcs indésirables consiste à définir une valeur de seuil pour le gradient en-deçà de laquelle on considère le contour comme non pertinent. Cette technique de séparation-fusion ("Split and Merge" en anglais) impose la sélection d'un seuil qui conditionne fortement la qualité et la robustesse du résultat (MONGA, 1988 , [70]). De plus, cette valeur de seuil peut très bien ne pas exister. Imaginons en effet que les objets présents dans l'image ne soient pas de même facture, comme c'est le cas pour les électrophorèses où les taches sombres sont les amas de polypeptides et le fond clair une gélatine-support, il n'y a alors aucune raison pour que la sur-segmentation dans les taches produite certes par le bruit électronique lors de l'acquisition mais aussi par la texture microscopique soit de même nature et de même niveau que celle qui apparaît dans le fond. C'est pourquoi le critère utilisé ne sera pas un seuil, mais simplement le fait que les contrastes sont plus faibles sur ces arcs surnuméraires, et donc que les valeurs des gradients constituent des minima. Reste à définir par rapport à quoi ces gradients sont minima, ou encore quelle est la fonction dont ils sont les marqueurs. La Figure VII-5-a permet d'éclairer le problème. Si, reprenant l'image-mosaïque associée aux taches, on calcule le gradient-mosaïque, son graphe aura l'allure représentée ci-dessous. Des murs plus ou moins hauts à l'intérieur des taches ou du fond, mais séparés par un mur (le contour de la tache) d'altitude lui aussi irrégulière mais toujours plus élevé que les murets intérieurs. Considérons alors le graphe défini de la manière suivante : ses sommets correspondent aux arcs C_{ij} de la LPE. Quant-aux arêtes de ce graphe, elles relient les sommets, c'est-à-dire les arcs de la LPE qui entourent le même bassin versant (Figure VII-5-b). Un tel graphe n'est pas du tout planaire. On peut cependant valuer chaque sommet avec la valeur prise par le gradient-mosaïque. On peut alors effectuer la ligne de partage des eaux de ce graphe tridimensionnel valué, chaque sommet C_{ij} prenant la valeur $h(C_{ij})$. Les contours minimaux entourant le même bassin versant étant connectés dans le graphe ainsi défini, ils constituent de proche en proche un minimum connexe (Figure VII-5-c).

La ligne de partage des eaux correspond alors à l'ensemble des arcs C_{ij} de la LPE primaire qui dessinent sur le graphe du gradient-mosaïque des murs fermés et d’altitude plus élevée que les murets correspondant aux arcs minimaux.

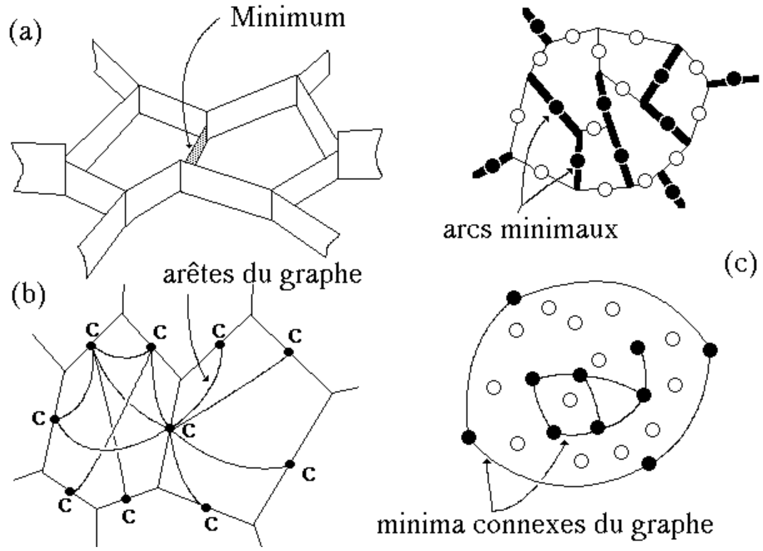


Figure VII-5

(a) Exemple de représentation 3D d’un gradient-mosaïque, (b) le graphe associé aux arcs de la LPE primaire, (c) arcs minimaux et leur correspondance dans le graphe.

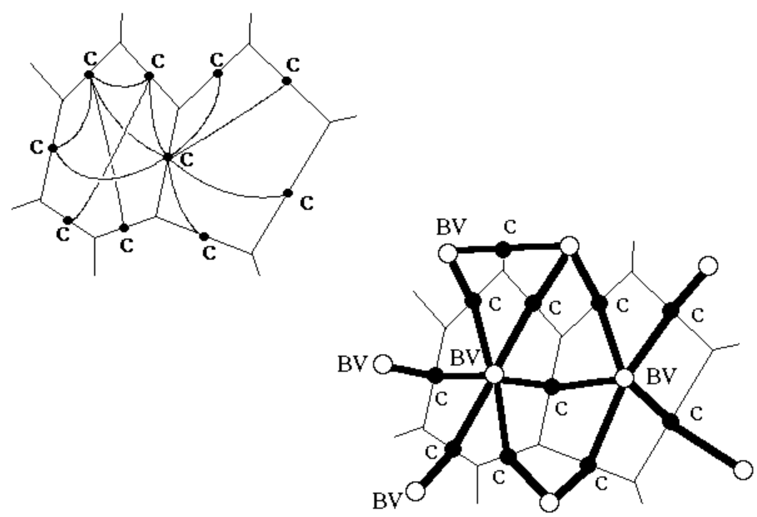


Figure VII-6

Représentation planaire du graphe associé au gradient-mosaïque

Cependant, comme le graphe précédent n'est pas facile à manipuler parce que tridimensionnel, on peut se ramener à un graphe planaire en ajoutant aux sommets constitués par les arcs C_{ij} un sommet correspondant à chaque bassin versant BV_i. Comme les arêtes du graphe précédent relient les arcs bordant le même bassin versant, il suffit, dans la nouvelle représentation, de relier chaque sommet C_{ij} avec les sommets BV_i et BV_j correspondants (Figure VII-6).

Reste à déterminer la valeur prise par les points ajoutés dans les bassins versants. Afin de préserver la connexité des arcs minimaux, les points des bassins qui les connectent doivent avoir même valeur qu'eux. Ceci est assuré quand la valeur $h(BV_i)$ est égale à :

$$h(BV_i) = \operatorname*{Inf}_i \, [h(C_{ij})]$$

C_{ij} représentant tous les éléments d'arcs entourant le bassin versant. La LPE sur ce nouveau graphe correspond (à une restriction près, sur laquelle nous reviendrons) aux contours conservés dans la hiérarchisation .

Figure VII-7

Représentation du graphe précédant sous forme d'une image

Cette représentation en amène naturellement une troisième, intéressante car c’est en fait celle qui est utilisée en pratique lorsque cette procédure de hiérarchisation est réalisée à l’aide de systèmes de traitement d’images et non sur des machines capables de manipuler des structures de type graphe. Cette dernière représentation consiste à définir une fonction à partir des bassins versants BV_i et des arcs C_{ij} de la LPE initiale. Il suffit pour cela d’affecter à l’ensemble du bassin versant ou de l’arc de LPE la valuation précédente (Figure VII-7). La ligne de partage de cette fonction correspondra également aux contours conservés par la hiérarchisation. Il se peut cependant que, dans ces deux dernières représentations utilisant les bassins versants, la LPE obtenue contienne des points du graphe correspondant aux bassins versants. Comme ces points ont été ajoutés, ils doivent être éliminés et remplacés par les points correspondants aux arcs entourant ces bassins versants (Figure VII-8).

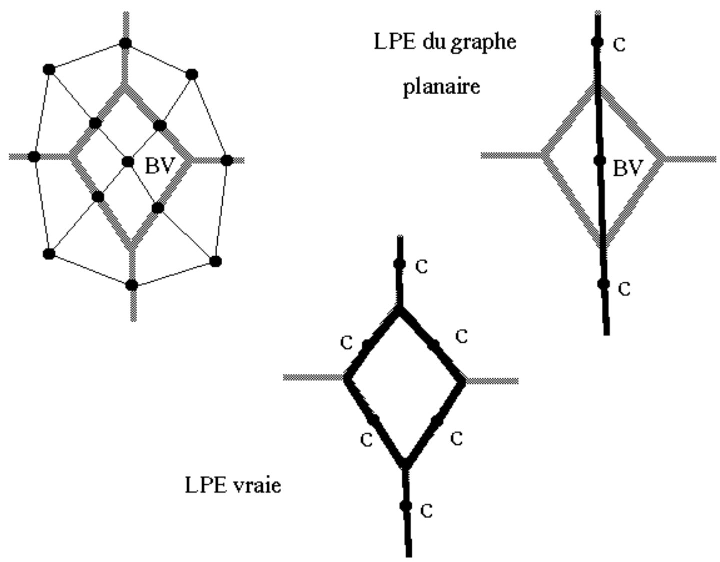


Figure VII-8

Restitution des arcs de la LPE correspondants aux bassins versants appartenant à la ligne de partage des eaux du graphe associé au gradient-mosaïque.

Cette hiérarchisation peut bien sûr être itérée, soit à partir du même gradient-mosaïque, soit après avoir généré une nouvelle image-mosaïque en calculant par exemple une valeur de gris moyenne dans les nouveaux bassins versants. Il faut néanmoins remarquer que cette itération conduit toujours à l’ensemble vide. Pour utiliser ces différents niveaux de hiérarchisation, il convient donc de bien connaître les problèmes posés par la segmentation. Seule l'analyse des différents niveaux de hiérarchie et l'apparition d'objets dont la forme, la géométrie, la luminance sont conformes à ce qu'on attend permettra d'arrêter la procédure de hiérarchisation. Ainsi, il est hautement improbable que cette hiérarchisation permette l'extraction immédiate d'objets complexes, pour la simple raison qu'il n'y a généralement pas de corrélation entre les différentes composantes de ces objets et leurs niveaux de gris respectifs. On peut cependant utiliser d'autres fonctions que le gradient dans cette procédure. Nous allons tout de suite illustrer l'usage de cette hiérarchisation sur un exemple simple.

I-3) Une application simple

Figure VII-9

Radiographie-éclair d'un jet libre de charge creuse

Curieusement, l'application traitée ici ressemble beaucoup aux images d'électrophorèses. La Figure VII-9 représente une radiographie X d'un jet libre de charge creuse. Chaque élément de jet est constitué d'une "goutte" de métal en fusion projeté à très grande vitesse (entre 8 et 10 km/s). Deux clichés du jet à des intervalles de temps proches (20 µs) permettent, à condition de mettre en correspondance les éléments homologues sur les deux images, de calculer différents paramètres cinétiques du jet (vitesse, énergie, caractéristiques de la trajectoire). Comme les éléments de jet apparaissent comme des taches claires, on pourrait les segmenter en les marquant en tant que maxima de l'image, de façon similaire à la procédure utilisée pour les taches d'électrophorèse du chapitre précédent. Cependant, dans ce cas de figure, divers facteurs limitent l'efficacité de cette approche. D'abord, les images de jet présentent de nombreux artefacts (trous dans le cliché, raccords de films, réticules, etc...). Ensuite, les éléments de jet n'ont pas toujours une géométrie simple, qui fait que, très souvent ils ne sont pas marqués par un seul maximum. Enfin, le jet étant analysé dans son ensemble, plusieurs clichés X sont utilisés afin de couvrir les trois à cinq mètres de trajectoire. Or, le contraste des éléments de jet varie grandement d'un bout à l'autre de la radiographie. Toutes ces raisons font que les éléments de jet ont été mis en évidence en utilisant la hiérarchisation de l'image-mosaïque (BEUCHER, CALVEL, 1989, [17]).

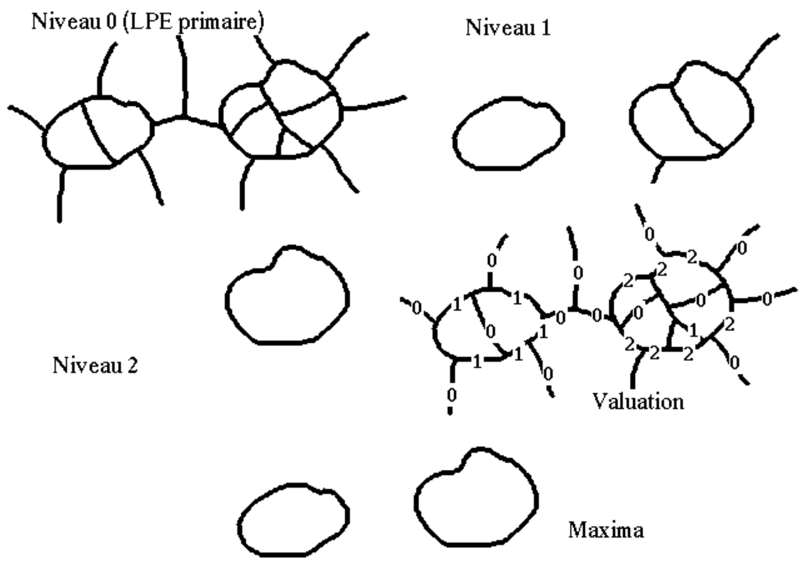
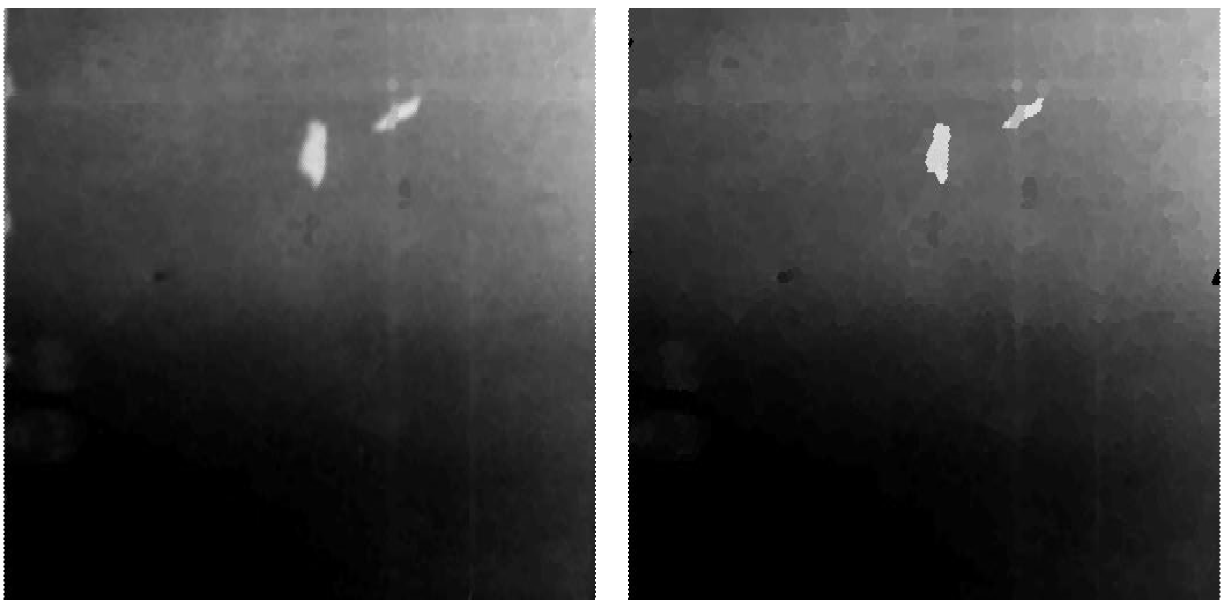


Figure VII-10

Extraction des contours ultimes

Considérant les différents niveaux de hiérarchie de l'image-mosaïque, on extrait à chaque niveau les contours fermés ultimes. Ces contours ultimes sont définis de la manière suivante : marquons chaque contour (élément d'arc) avec une valeur égale au niveau de hiérarchie le plus élevé dans lequel il apparaît. Les contours ultimes correspondent alors aux maxima de cette fonction. Ces maxima dessinent toujours des contours fermés puisque chaque niveau de hiérarchisation est obtenu par une ligne de partage des eaux (Figure VII-10). On aura remarqué l'analogie de cet algorithme avec la détection des érodés ultimes comme maxima de la fonction-distance (cf. chapitre 6, § II-1).

La Figure VII-11 représente des éléments de jet et l'image-mosaïque correspondante. Après calcul du gradient-mosaïque (Figure VII-12-a), la procédure ci-dessus fournit les contours de la Figure VII-12-b. On peut alors sélectionner parmi ces contours fermés ceux qui entourent des maxima de l'image initiale (Figure VII-12-c). On peut alors extraire les contours des éléments de jet en utilisant divers critères de taille, de contraste, ou de position dans l'image (Figure VII-12-d).

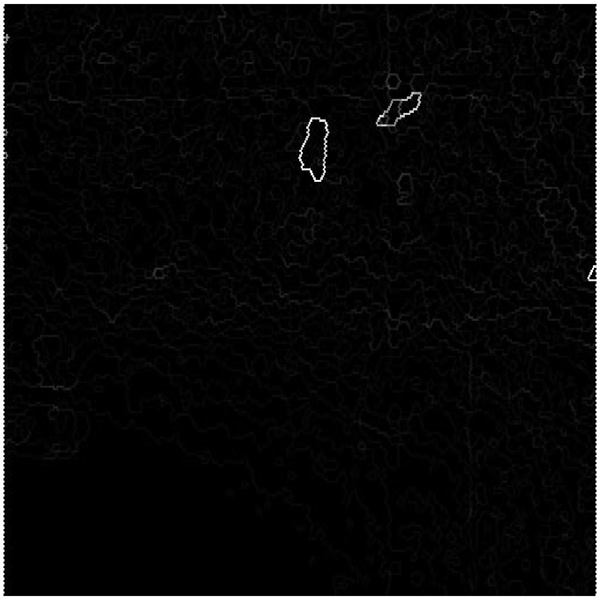


(a) (b)

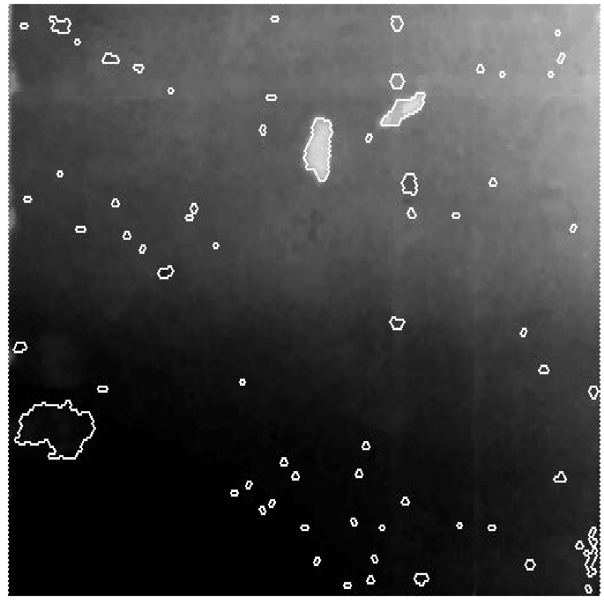
Figure VII-11

(a) Eléments de jet et (b) image-mosaïque correspondante

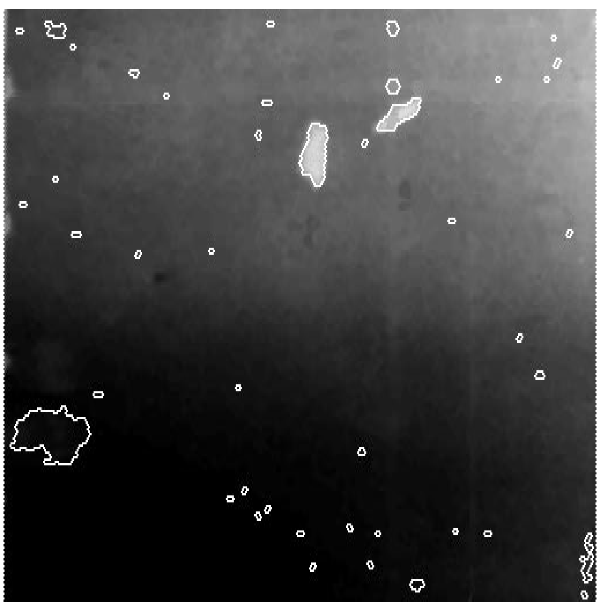
L'avantage de cette approche est de ne pas fixer a priori des paramètres pour la segmentation. Les critères utilisés sont d'abord topologiques (contours fermés entourant des maxima) et ensuite seulement numériques (taille, contraste). Cela permet notamment d'introduire dans la procédure un certain degré d'interactivité. L'opérateur peut intervenir dans la chaîne de traitement pour valider ou supprimer un contour. Cela se fait simplement en utilisant l'image des contours de la Figure VII-12-c.



(a)



(b)



(c)

(d)

Figure VII-12

Extraction des éléments. (a) gradient-mosaïque, (b) extraction des contours ultimes, (c) contours entourant des maxima, (d) sélection finale basée sur la taille et le contraste.

L'opérateur peut pointer dans l'image les objets qu'il considère comme des éléments de jets. Si ces objets sont effectivement contourés après la hiérarchisation, ils peuvent être affichés et leurs caractéristiques de taille, contraste et position utilisées dans des procédures d'apprentissage.

II) EXEMPLES D'APPLICATIONS

Pour illustrer cette présentation de segmentations complexes, nous allons décrire des exemples d'applications utilisant à la fois les techniques de marquage vues au précédent chapitre, et de hiérarchisation décrites ci-dessus. On a vu que la hiérarchisation d'une image use doublement de la LPE pour construire l'image-mosaïque et pour déterminer les différents niveaux de hiérarchie. En fait, dans l'application précédente, la pratique montre qu'il n'y a pas besoin de dépasser le deuxième niveau pour extraire tous les objets intéressants.

Trois applications seront décrites. On en profitera pour introduire quelques algorithmes permettant d'améliorer l'usage des marqueurs, ou encore pour prendre en compte à la fois des critères de contraste et de forme pour segmenter l'image.

II-1) Premier cas : segmentation d'une scène routière

La Figure VII-13 représente une scène routière telle qu'elle est perçue par un conducteur au volant de son automobile. L'analyse d'une telle scène doit fournir au conducteur diverses informations contribuant à augmenter la sécurité de sa conduite. Pour cela, de nombreux paramètres doivent être déterminés, soit directement par le traitement d'images, soit par le biais d'autres capteurs (tachymètres, télémètres, etc...). Parmi ces paramètres, la position du véhicule par rapport à la chaussée, ainsi que la longueur de voie libre de tout obstacle sont des données de première importance. Il est donc nécessaire, pour résoudre ce problème, d'extraire la route de la scène. Il faut, pour cela, marquer la chaussée. Contrairement à l'exemple similaire décrit au chapitre 6, § II-3, le marquage de la chaussée ne peut être obtenu par intégration du mouvement, car la caméra étant embarquée dans le véhicule, la scène évolue constamment. La ligne de partage des eaux du gradient de l'image fournit la désormais classique sur-segmentation (Figure VII-14). Pour obtenir un marqueur de la chaussée, diverses techniques sont

Figure VII-13

Scène routière perçue à-travers le pare-brise d'un véhicule

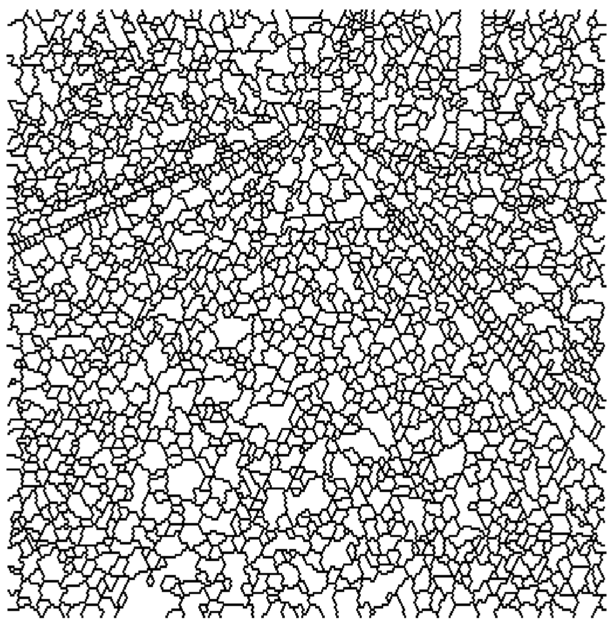


Figure VII-14

La LPE du gradient de l'image initiale

envisageables. Deux d'entre elles sont assez efficaces. La première consiste à utiliser le gradient régularisé de l'image (cf. chapitre 2). La régularisation réduisant le bruit, la LPE du gradient régularisé présente

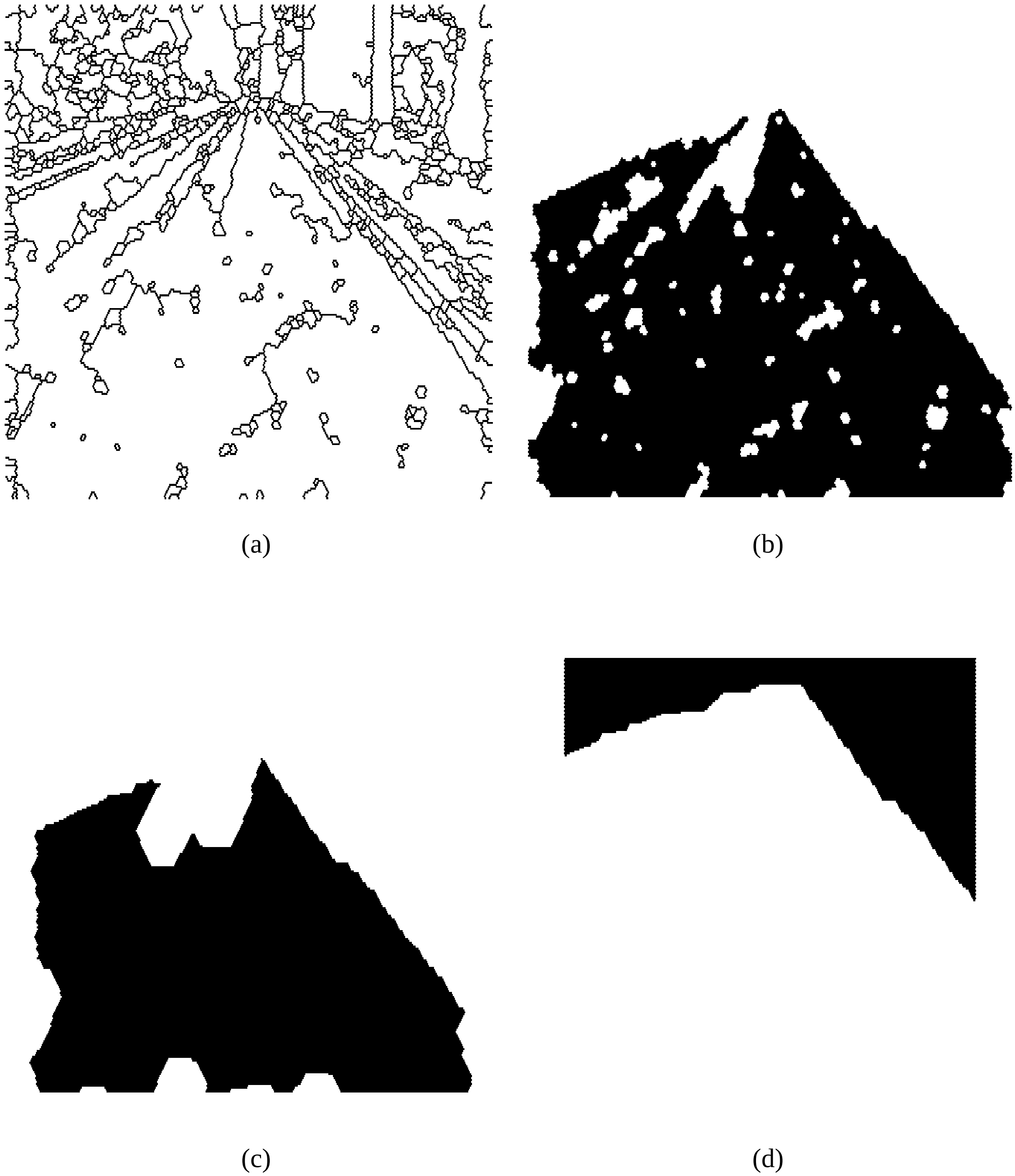


Figure VII-15

Amélioration de la LPE par régularisation du gradient (a), marqueur de la chaussée (b), le même marqueur lissé (c), marqueur extérieur (d).

des bassins versants plus larges (Figure VII-15-a). parmi eux, celui qui est à l'avant-scène peut être utilisé comme marqueur de la chaussée (Figure

VII-15-b). Ce marqueur est cependant assez souvent irrégulier, il présente des trous, et doit donc être lissé (Figure VII-15-c). Il faut également, et cela constitue un problème sur lequel nous reviendrons, disposer d'un marqueur extérieur à la chaussée afin de modifier l'homotopie du gradient. Ce marqueur extérieur peut être déterminé en complémentant le marqueur de la chaussée et en le réduisant par érosion. Cette technique est cependant dangereuse, car on n'est pas certain que le marqueur extérieur est bien positionné. De plus, cette approche introduit des paramètres (la taille de l'érosion par exemple) dont la valeur est difficile à calculer. Supposant que le marqueur extérieur a été correctement généré (Figure VII-15-d), le reste de la procédure est classique : on modifie l'homotopie du gradient et on calcule sa LPE. Le résultat est donné à la Figure VII-16.

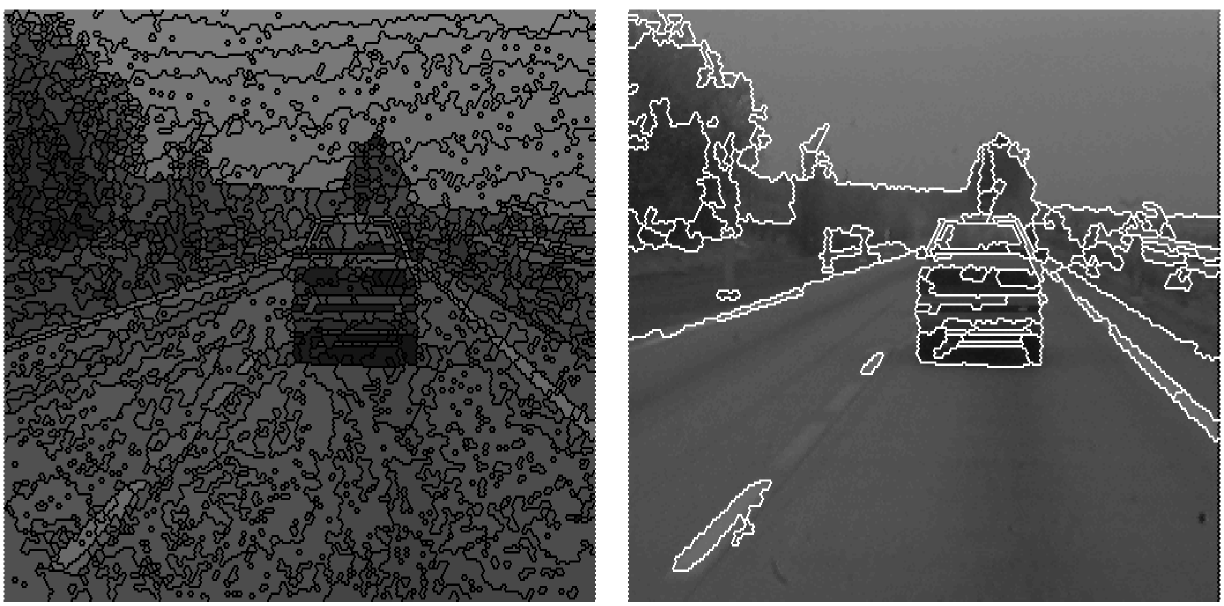
Figure VII-16

Résultat de la segmentation de la chaussée

La seconde technique consiste à utiliser la hiérarchisation de l'image. Cette approche est performante dès que la chaussée est relativement homogène et suffisamment contrastée. C'est le cas pour les images d'autoroute ou pour des scènes de campagne dès lors que la caméra vidéo est sensible au proche infra-rouge (Figure VII-17). L'image hiérarchique met en évidence la chaussée. Le marqueur est, à la différence du premier procédé, très bien positionné par rapport à la chaussée, ce qui fait qu'il est souvent inutile

Figure VII-17

Autre scène. L'image présente une forte composante infra-rouge

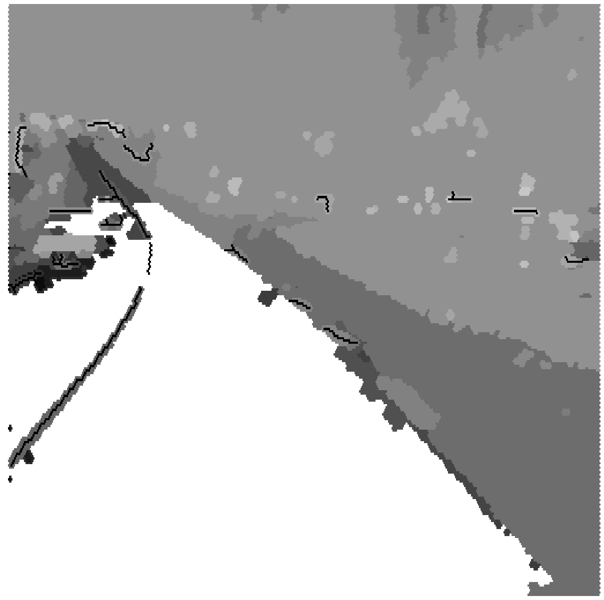


(a) (b)

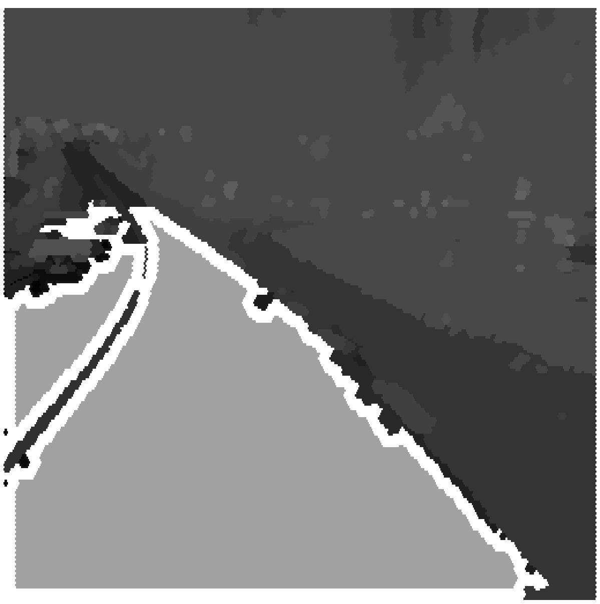
Figure VII-18

(a) Image-mosaïque et LPE initiale, (b) résultat de la hiérarchisation (premier niveau).

(a)



(b)



(c)

(d)

Figure VII-19

Segmentation en utilisant le marquage au sol. (a) image initiale, (b) marqueur de la chaussée et marquage au sol extrait par chapeau Haut-de-Forme et squelette, (c) marqueurs des voies obtenus par érosion, (d) résultat final (segmentation de la voie de droite).

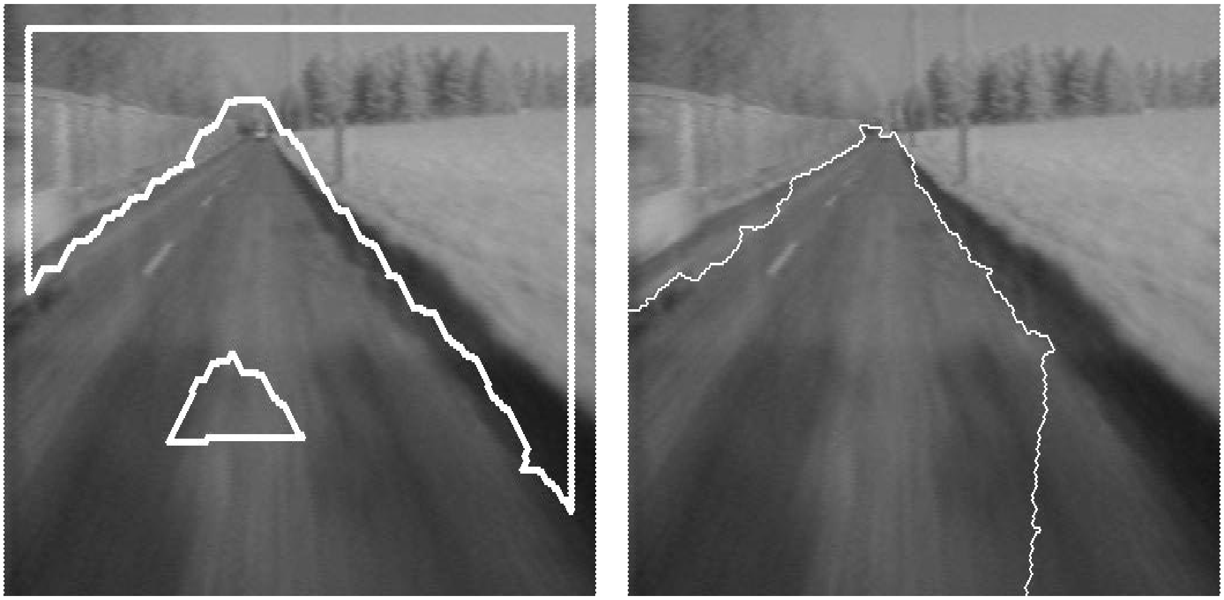
d'aller plus loin dans la segmentation (Figure VII-18). L'extraction de la chaussée permet alors la mise en évidence du marquage au sol et donc le découpage de cette chaussée en voies de circulation (Figure VII-19). De la même façon, l'introduction de critères géométriques simples liés à la forme de la chaussée conduit à la détermination de zones dans l'image où des obstacles potentiels sont susceptibles de se trouver (BEUCHER *et Al*, 1990, [13]). Toutes ces informations fournies par le traitement d'image peuvent être utilisées par d'autres capteurs (comme des télémètres) qui se voient pilotés vers les régions intéressantes de la scène (Figure VII-20).

(a) (b)

Figure VII-20

(a) Scène avec obstacle, (b) segmentation de la chaussée et détection de la portion libre d'obstacles sur l'image.

Revenons au problème énoncé plus haut et consistant en l'obligation de marquer, pour modifier le gradient, non seulement les objets à détecter, mais également l'extérieur. Ainsi, pour segmenter la chaussée, il faut la marquer d'une manière ou d'une autre, mais aussi l'extérieur. Or marquer l'extérieur n'est pas aisé et peut même engendrer des erreurs radicales (Figure VII-21). On a vu aussi que l'usage de la hiérarchisation d'image peut dans une large mesure supprimer ce problème, puisque dans ce cas le bassin versant correspondant à la route "colle" beaucoup mieux avec l'observation. En fait, on va montrer que le marquage extérieur n'est pas indispensable dès que le critère de segmentation est complètement pris en compte par la fonction f à modifier avant d'effectuer sa LPE. Prendre complètement en compte le critère de segmentation signifie par exemple que la fonction utilisée pourra être le gradient pourvu que les objets à segmenter soient séparables uniquement grâce à leurs variations de gris.



(a) (b)

Figure VII-21

(a) Marqueurs initiaux et (b) segmentation erronée dûe à un mauvais positionnement du marqueur extérieur.

Avant de décrire l'algorithme, introduisons certains paramètres caractéristiques associés aux bassins versants de la LPE d'une fonction f. Considérant deux bassins versants adjacents BV_i et BV_j, on peut déterminer le ou les points appartenant à la portion C_{ij} de la LPE pour lesquels se produit le premier débordement de l'eau inondant le bassin versant BV_i en supposant que BV_j reste sec (ou l'inverse, ce qui est équivalent, cf. Figure VII-22). L'altitude h_{ij} de ces points (ils ont tous la même altitude par définition) est un paramètre associé à C_{ij}. On peut alors pour chaque bassin BV_i déterminer l'élément d'arc à travers lequel s'effectue le premier débordement. Il lui correspond alors un point ou un ensemble de points d'altitude h_i, avec :

$$h_i = \mathrm{Inf}(h_{ij})$$

où les h_{ij} sont les altitudes de premier débordement des arcs C_{ij} de la LPE bordant le bassin versant BV_i. A ce bassin versant, on peut désormais associer le ou les bassins versants vers lesquels s'effectue ces premiers débordements.

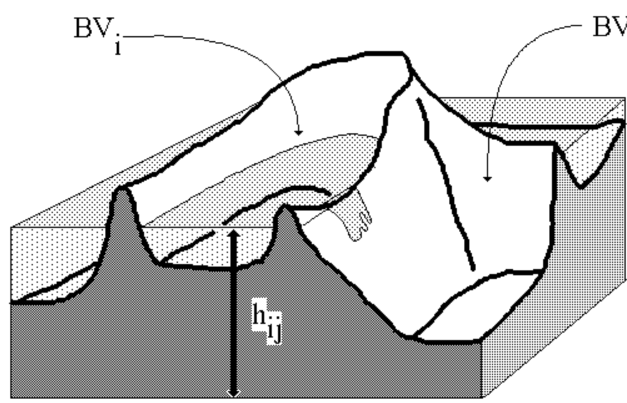


Figure VII-22
Premier débordement d'un bassin versant

Considérons alors la fonction f de la Figure VII-23-a. L'exemple est monodimensionnel, mais n'enlève rien à la généralité de l'algorithme.

Soient alors les trois marqueurs m_1, m_2 et m_3. Ces marqueurs correspondent à des minima de f. Supposons que f représente le gradient d'une image, que m_1 soit le marqueur d'un objet à segmenter, et m_2 et m_3 les marqueurs du fond ou de l'extérieur. L'approche classique, on l'a vu, consistera à modifier la fonction f puis à en calculer la LPE. Mais pour cela, les marqueurs m_1, m_2 et m_3 sont indispensables. Si m_1 seul était utilisé, un seul bassin versant s'étendant sur la totalité de l'espace serait généré par la ligne de partage. On peut cependant construire le bassin versant associé à m_1 dans l'algorithme classique, sans utiliser d'autres marqueurs que m_1. Considérons pour cela la LPE primaire de f (Figure VII-23-b), et le bassin versant associé à m_1. Ce bassin versant BV_1 se déversera d'abord dans le bassin versant BV_2. Supposons alors, comme c'est le cas dans l'exemple, que BV_2 se déverse en premier dans BV_1. Dans

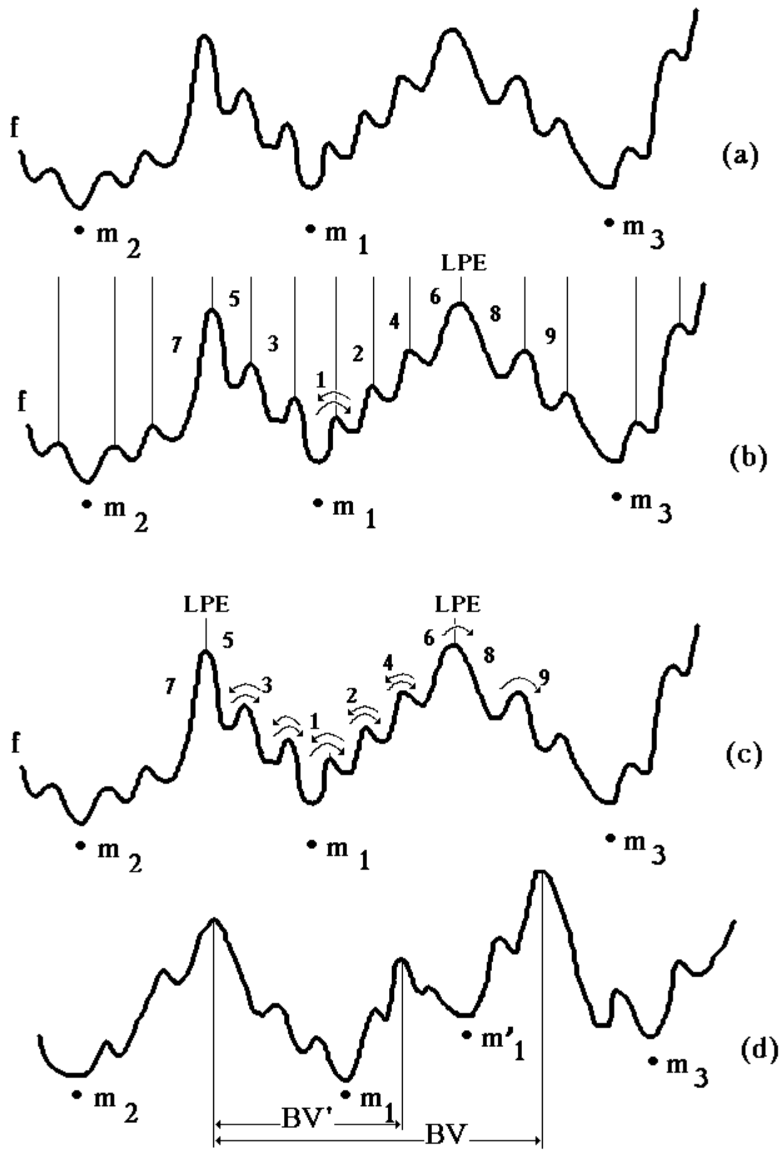


Figure VII-23

Principe de l'algorithme des cascades

cette hypothèse, l'élément d'arc C_{12} de la LPE séparant les deux bassins est éliminé. On peut alors réitérer l'algorithme, et on réunira de cette façon les bassins versants BV_1 à BV_6, parce que les cascades d'écoulement d'un bassin versant dans l'autre sont symétriques par rapport aux éléments d'arcs les séparant (Figure VII-23-c). Par contre, la LPE entre BV_6 et BV_8 ne sera pas éliminée car si $BV_1 \cup ... \cup BV_6$ se déverse dans BV_8, BV_8 se déverse d'abord dans BV_9. On délimite ainsi un bassin versant associé à m_1, et ce bassin versant correspond, dans l'exemple choisi, à celui déterminé par l'algorithme classique. Dans quelle mesure cependant cette correspondance est vérifiée ? La Figure VII-23-d montre un exemple où les deux algorithmes divergent.

La raison de cette divergence est évidente. L'algorithme classique prenant en compte les marqueurs m_1, m_2 et m_3, le marqueur m'_1 sera gommé par la modification d'homotopie. Par contre, le second algorithme (appelé encore *algorithme des cascades*) n'utilise que le marqueur m_1. Les autres marqueurs sont donc d'influence équivalente, et m'_1 a la même importance que m_2 et m_3. En fait, l'algorithme des cascades produit un bassin versant qui est égal à celui obtenu par la hiérarchisation pourvu que le bassin versant initial BV_1 du marqueur m_1 soit entouré par au moins un élément d'arc minimal. Démontrons cette proposition dans le cas où l'algorithme des cascades est utilisé non pas avec le gradient initial de l'image, mais avec le gradient de l'image-mosaïque (le débordement se produit alors pour l'ensemble des points appartenant à un élément d'arc de la LPE initiale). Soit donc BV le bassin versant contenant le marqueur m_1 obtenu avec l'algorithme de hiérarchisation et BV' le bassin versant obtenu par l'algorithme des cascades. Supposons BV $\neq$ BV'. Alors, il peut exister des bassins versants BV_i de la LPE primaire appartenant à BV et n'appartenant pas à BV', de même que des bassins versants BV_k appartenant à BV' et non à BV (Figure VII-24).

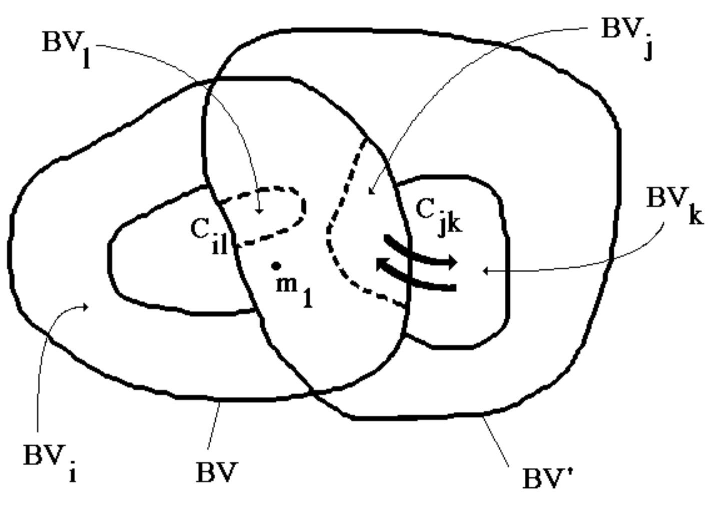
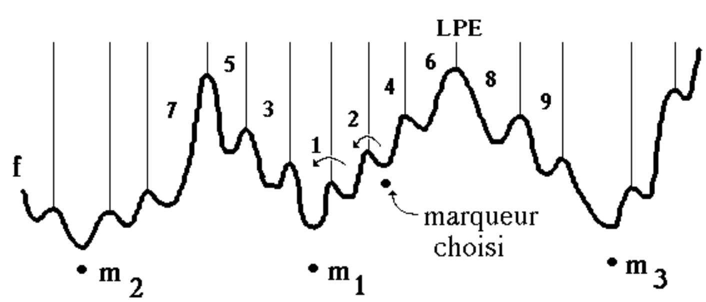


Figure VII-24

Comparaison de la hiérarchisation et de l'algorithme des cascades

Considérons, parmi les BV_k, un bassin versant adjacent à BV, et dont le débordement s'effectue de façon symétrique vers un bassin versant BV_j de BV (Voir Figure). Nous supposerons que ce bassin versant existe, sinon aucun bassin versant de $BV \cap BV'$ ne pourrait se déverser dans BV'/BV, ce qui entraînerait $BV' \subset BV$. Comme l'arc C_{jk} appartient à la LPE hiérarchisée, la valuation de C_{jk} doit être supérieure aux valuations des autres arcs C_{kl} ou C_{jm} bordant BV_j ou BV_k. Mais cela est contradictoire avec le fait que le débordement de BV_j vers BV_k (ou de BV_k vers BV_j) se fasse par l'arc C_{jk}. Le bassin BV_k est donc inclus dans BV, et ceci est vrai, de proche en proche pour tous les bassins versants de BV'/BV. On peut donc écrire que $BV' \subset BV$. Le même raisonnement tient dans l'autre sens avec les bassins BV_i adjacents à BV'. Il doit exister un bassin BV_i adjacent à un bassin BV_l de BV' tel que la valuation de C_{il} soit comprise entre les valuations de C_{in} bordant BV_i ou des arcs C_{lm} bordant BV_l. Or cela contredit le fait que C_{il} appartenant à la LPE obtenue par l'algorithme des cascades, sa valuation doit être supérieure à celles des C_{in} et celle des C_{lm}. Les bassins versants BV et BV' sont donc identiques et l'algorithme des cascades produit le même bassin versant associé à m_1 que la hiérarchisation.



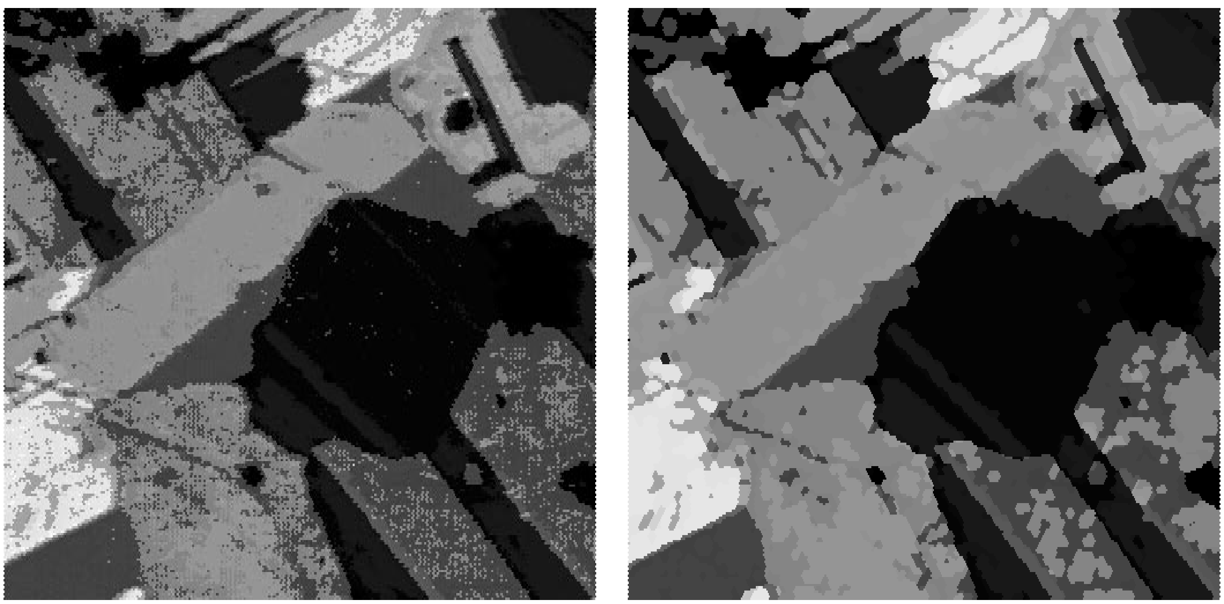
Descente du marqueur vers le minimum m_1

Figure VII-25

Algorithme des cascades lorsque le marqueur initial est quelconque

Rappelons que ce résultat n'est vrai que si le marqueur m_1 appartient à un bassin versant entouré par au moins un arc minimal de la LPE. Que se passe-t-il si ce n'est pas le cas ? La Figure VII-25 illustre le résultat. Si le marqueur appartient au bassin versant BV_4, l'arc de LPE primaire séparant BV_4 de BV_2 ne sera pas supprimé car BV_2 ne se déverse pas dans BV_4. Pour se ramener à la situation précédente, il faut effectuer une descente du marqueur. De BV_4, on passe à BV_2, puis à BV_1, et étant arrivé dans un puits puisqu'alors BV_1 se déverse dans BV_2, BV_1 (ou BV_2) peut être considéré comme le nouveau marqueur utilisé par l'algorithme des cascades. On aura remarqué la similitude de cette procédure avec celle décrite au chapitre 5, § III, où le bassin versant associé à n'importe quel point du graphe d'une fonction ne peut s'obtenir qu'en déterminant son ascendance, c'est-à-dire le minimum source de l'inondation de ce bassin versant.

II-2) Deuxième cas : segmentation d'image couleur



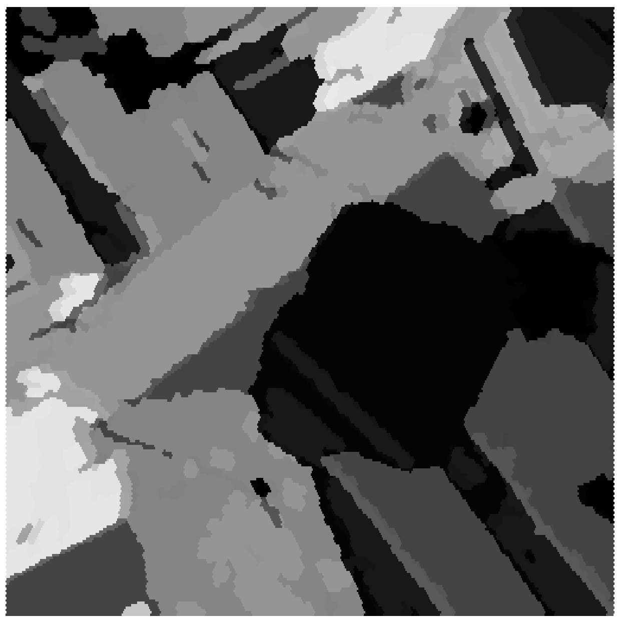
(a) (b)

Figure VII-26 (début)

(a) Image initiale (gabbro), (b) image simplifiée

Ce deuxième exemple sera beaucoup plus simple. Il illustre combien la hiérarchisation peut être efficace dans la segmentation et la compression d'images couleur. La Figure VII-26-a représente une section polie d'un gabbro, roche éruptive, observée au microscope polarisant. L'image couleur est en fait un triplet (f_R, f_B, f_V) correspondant aux composantes rouge, bleu et vert de l'image. La hiérarchisation de l'image couleur peut être

(c)



(d)

Figure VII-26 (fin)

(c) résultat de la hiérarchisation des trois composantes couleur, (d) résultat final.

réalisée sur chaque composante de la couleur. La Figure VII-26-b montre l'image simplifiée f' composée des images simplifiées f'_R, f'_B, f'_V. La hiérarchisation de l'image produit les trois nouvelles lignes de partage des eaux présentées à la Figure VII-26-c. On peut alors affecter à chaque bassin versant une valeur de gris égale à la moyenne pondérée des valeurs de gris des bassins versants primaires inclus dans le nouveau bassin. L'image résultante est donnée à la Figure VII-26-d (les images présentées sont les images de luminance). Cet exemple montre l'usage de la hiérarchisation pour compresser l'information dans une image, dès que celle-ci est bruitée. Ainsi, dans le cas présent, l'information a été réduite par un facteur 8.

II-3) Troisième cas : segmentation de paires stéréoscopiques

Ce troisième et dernier exemple ne sera pas, contrairement aux deux précédents, une application de la hiérarchisation d'images. La complexité du problème réside ici dans la difficulté de déterminer des marqueurs corrects des objets à segmenter.

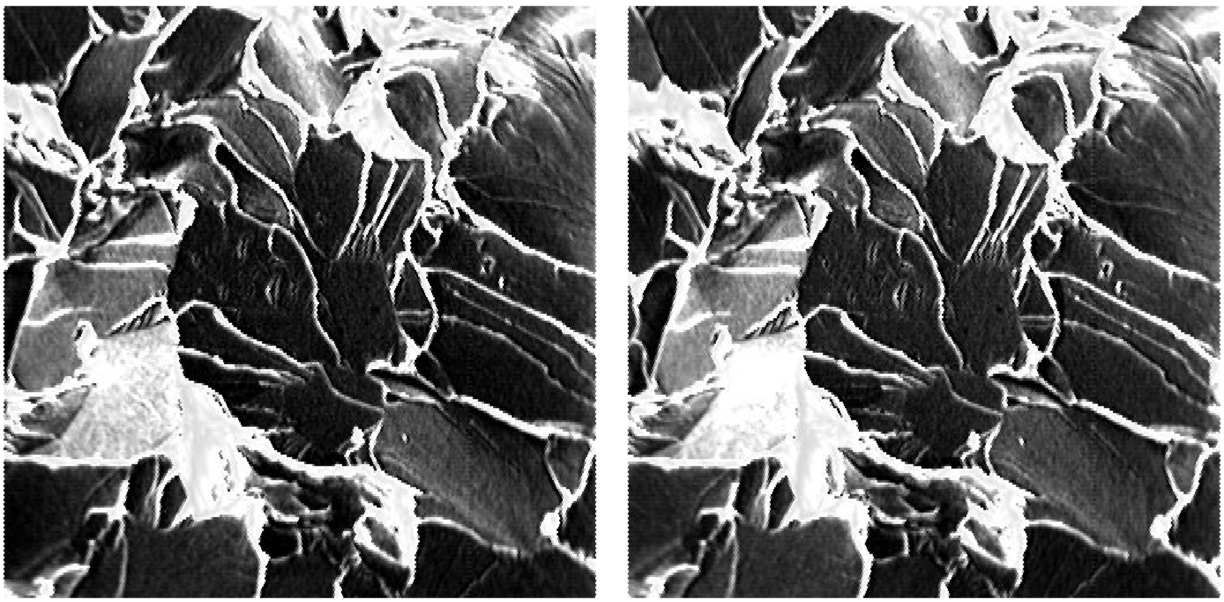


Figure VII-27
Paire stéréoscopique d'images MEB d'une fracture métallique

La Figure VII-27 représente une paire stéréoscopique. Les deux images sont des clichés de microscopie électronique à balayage d'une surface de rupture d'une éprouvette d'acier doux. Un premier cliché de l'échantillon est d'abord pris sous une certaine incidence. Puis l'échantillon est incliné légèrement, avant d'en prendre une deuxième vue (Figure VII-28-a). L'angle de rotation (encore appelé angle de tilt) est, pour les paires analysées, égal à 6°. La paire stéréoscopique permet de restituer l'altitude des points de l'échantillon, à condition de pouvoir déterminer soit manuellement, soit automatiquement, les points homologues sur les deux clichés. Le décalage de ces points homologues est lié par une formule trigonométrique simple à l'altitude du point correspondant sur l'échantillon. Compte-tenu du grandissement utilisé, on peut considérer que la source d'électrons est à une distance suffisamment grande de l'échantillon pour que l'hypothèse d'une projection parallèle de l'échantillon sur le cliché soit acceptable. Dans ce cas, le décalage se fait toujours suivant l'axe des x, et l'altitude du point M est donné par (Figure VII-28-b) :

$$z = \frac{x_1 \operatorname{Cos} \Delta\phi - x_2}{\operatorname{Sin} \Delta\phi}$$

Le plan de référence (plan de cote zéro) est le plan de la première image.

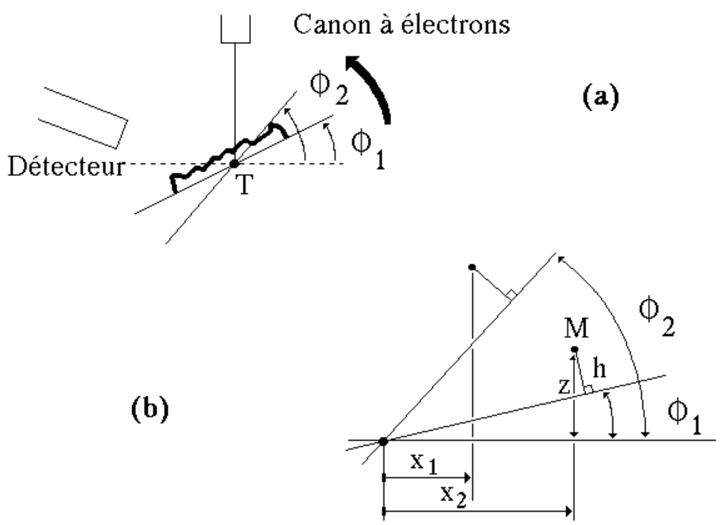


Figure VII-28

(a) obtention des deux images et (b) calcul des altitudes

La fracture observée est une fracture par clivage. L'échantillon présente un certain nombre de facettes relativement planes. Le problème consiste à déterminer l'inclinaison des facettes, afin de relier la variation d'inclinaison de ces facettes à l'énergie de la rupture. La difficulté fondamentale provient du fait que la seule façon de savoir si on a affaire à une facette est de précisément déterminer le relief de l'échantillon. Devant cette impasse, la solution adoptée a consisté à segmenter l'image en régions dont on est à peu près assuré de leur planitude. Dans cette approche, deux régions adjacentes peuvent appartenir à la même facette, mais seul le calcul de l'orientation et de l'inclinaison des deux régions permettra de lever le doute. Reste à définir ces régions. Pour cela, deux critères seront utilisés :

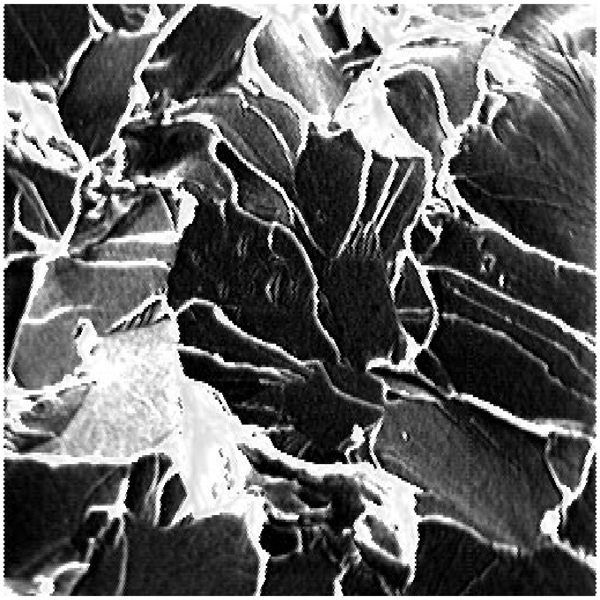
- Le premier critère est un critère photométrique. Deux caractéristiques de luminance permettent de cerner les régions de l'image appartenant à une facette. La première est que ces régions présentent un niveau de gris relativement homogène. Donc toute variation de niveau de gris sera l'indice de la transition d'une facette à une autre. L'autre caractéristique est fournie par les zones de flamboiement d'arêtes. Ces zones étroites et très lumineuses correspondent à des lignes de crête de la fracture. Ces crêtes anguleuses permettent une pénétration plus profonde du faisceau électronique primaire dans l'échantillon et donc une émission importante d'électrons secondaires. Les régions plates de la fracture seront donc bordées par des zones de flamboiement ou des transitions de gris importantes. La fonction utilisée dans la segmentation devra prendre en compte ces critères. Une telle fonction devra prendre des valeurs d'autant plus fortes que le contraste est fort ou que le flamboiement est important (ce qui se caractérise aussi par un contraste important). Voyons dès à présent comment mettre en évidence cette fonction.

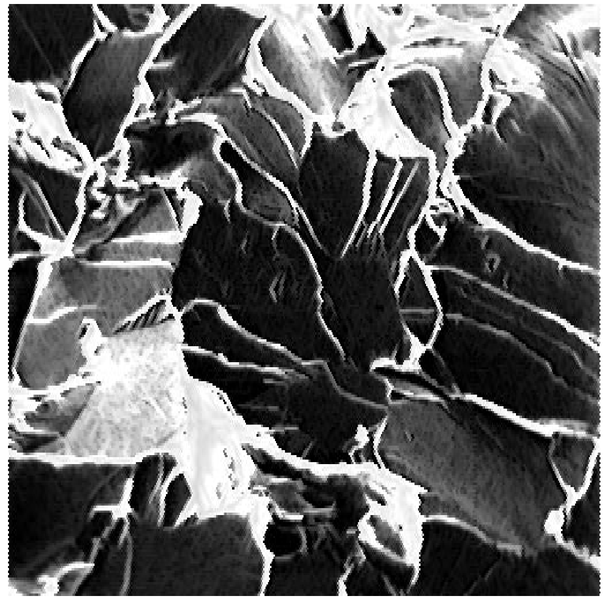
Désignons par f_1 la première image initiale de la paire stéréo. L'image f_1 n'est pas l'image brute de la fracture, mais le résultat d'un filtrage destiné à supprimer les petits pics clairs dus à des arrachements, ainsi que les parties sombres et de petite taille présentes dans les facettes; ces régions entourent souvent les zones d'arrachements, car ces dernières ont tendance à drainer vers elles les électrons rétro-diffusés. L'image initiale f (Figure VII-29-a) est ouverte par des éléments structurants linéaires L_α de même taille et d'orientations α différentes :

$$f' = \operatorname*{Sup}_{\alpha} [(f)_{L_\alpha}]$$

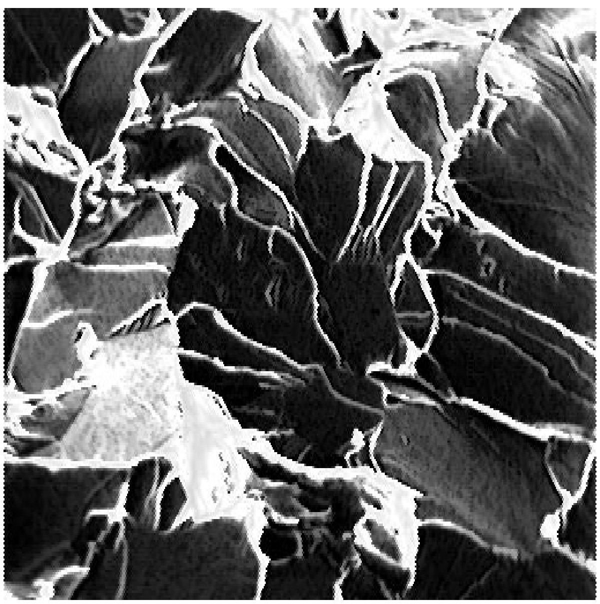
Le résultat est une image f' (Figure VII-29-b) débarrassée certes de ses zones d'arrachement, mais dont les lignes de flamboiement ont été profondément altérées. Afin de les restituer, l'image f est reconstruite à partir de f' (Figure VII-29-c) :

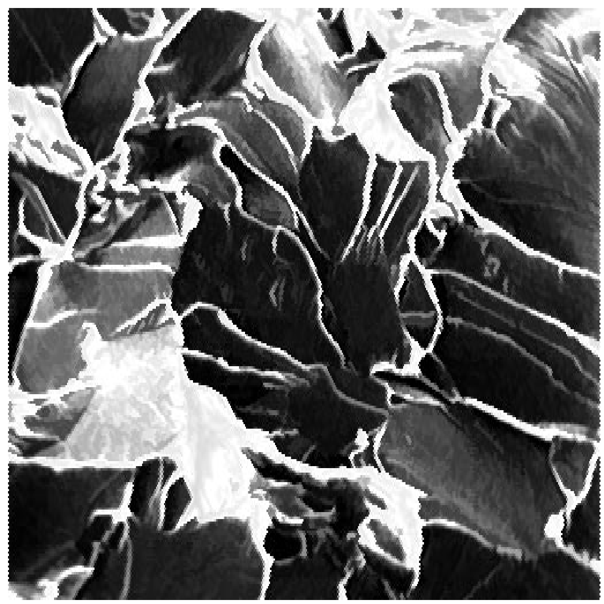
$$f'' = R_f(f')$$





(a) (b)

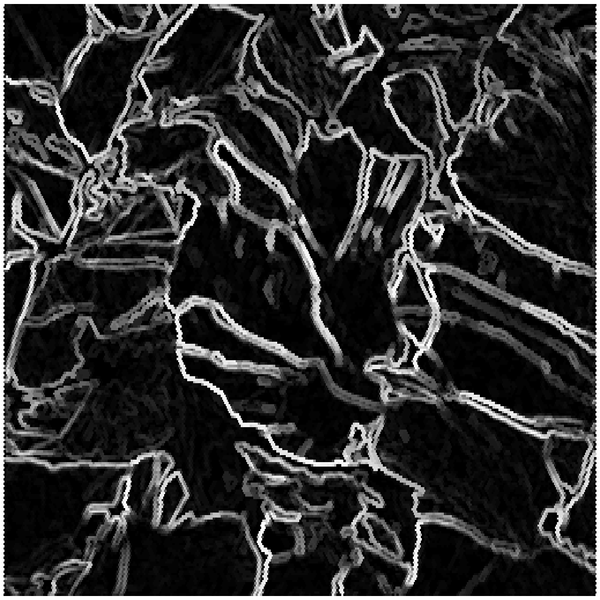




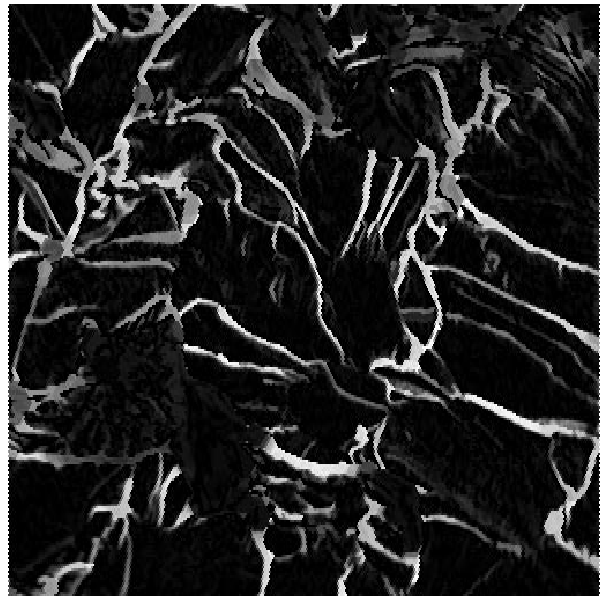
(c) (d)

Figure VII-29

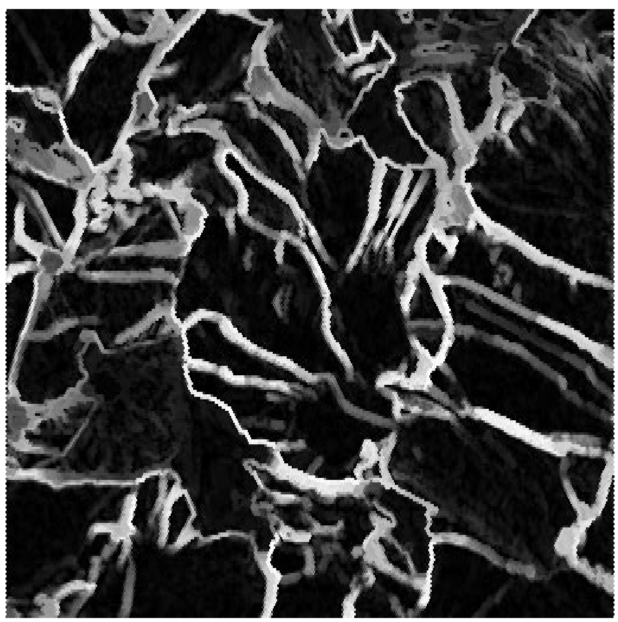
Filtrage de l'image de la fracture. (a) Image initiale, (b) ouvertures linéaires, (c) image reconstruite, (d) image finale.



(a)



(b)



(c)

Figure VII-30

(a) Gradient régularisé de l'image, (b) chapeau Haut-de-Forme, (c) Sup des deux images.

Les zones sombres sont éliminées par une technique similaire. L'image f'' est fermée (la fermeture est isotrope) :

$$f''' = (f'')^{B}$$

Enfin f'' est reconstruite à l'aide de la reconstruction duale et fournit l'image f_1 (Figure VII-29-d).

$$f_1 = R^{*}_{f''}(f''')$$

Les variations de contraste peuvent être mises en évidence par le gradient morphologique. Afin de réduire le bruit, le gradient utilisé est le gradient régularisé de taille élémentaire (Figure VII-30-a) :

$$g^{*}_{1}(f_1) = TH_1(g(f_1))$$

Quant-aux zones de flamboiement, elles peuvent être extraites très facilement par une transformation chapeau Haut-de-Forme $TH_\lambda(f_1)$ effectuée sur f_1. La taille λ de cette transformation dépend de la largeur des zones de flamboiement. Celle-ci est assez constante d'un échantillon à l'autre (Figure VII-30-b).

La fonction h_1 prenant en compte les critères photométriques de la segmentation sera alors définie par (Figure VII-30-c) :

$$h_1 = \mathrm{Sup}\ (g^{*}_{1}(f_1),\ TH_\lambda(f_1))$$

- Le deuxième critère est d'ordre géométrique. En effet, la fonction h_1 précédente n'est pas suffisante, car, d'une part, les régions délimitées suivant ce critère ne sont pas fermées, comme on peut le constater à la Figure VII-30-c, d'autre part, et c'est là le problème le plus important, les minima de h_1 sont très nombreux et ne manqueraient pas de produire une très importante sur-segmentation si la LPE de la fonction était réalisée. Afin de définir des marqueurs des régions plates de l'échantillon, le critère utilisé sera un critère de forme. Supposons que la fonction h_1 soit seuillée à un niveau μ et désignons ce seuil par $Z_\mu(h_1)$:

$$Z_\mu(h_1) = \{x : h_1(x) \leq \mu\}$$

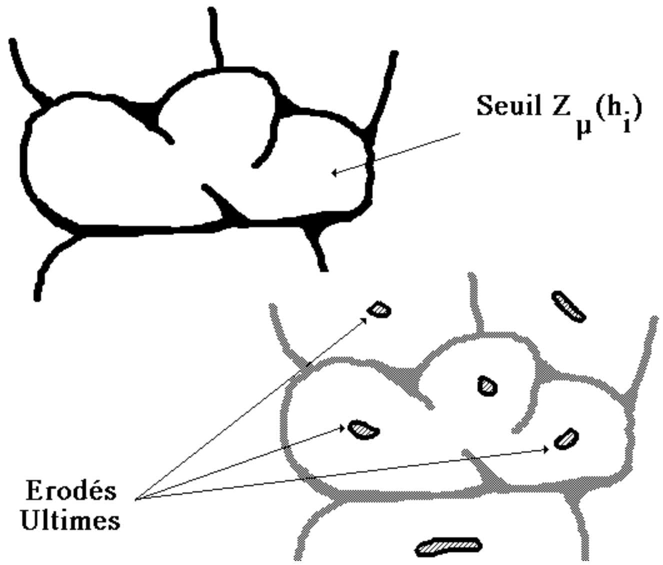


Figure VII-31

Principe du marquage par extraction des érodés ultimes de l'image h_1 seuillée.

Si le seuil est judicieusement choisi, $Z_\mu(h_1)$ correspondra aux zones homogènes de l'image f_1. Ces zones peuvent alors être segmentées selon des compartiments convexes à l'aide d'une LPE de la fonction distance de $Z_\mu(h_1)$. Les marqueurs des régions plates ne seront alors que les érodés ultimes de $Z_\mu(h_1)$ (Figure VII-31). On peut même effectuer un léger filtrage par ouverture de $Z_\mu(h_1)$ pour éliminer quelques irrégularités de l'ensemble. Ce marquage nécessite cependant la fixation d'un seuil μ approprié. En effet, trop élevé, ce seuil ne prendra pas en compte toutes les crêtes de la fonction h_1, et trop faible, celui-ci génèrera une ensemble $Z_\mu(h_1)$ trop irrégulier. On peut apporter au choix du seuil diverses solutions. Par exemple, h_1 étant une fonction qui présente deux phases distinctes, elle peut être seuillée de façon automatique. Diverses techniques de seuillage existent. Dans le cas présent, le seuil choisi correspond à la valeur de palier de l'histogramme des niveaux de gris de la fonction h_1 (Figure VII-32). En fait, et afin de ne pas être trop tributaire de cette valeur de seuil μ, on procède légèrement différemment : plutôt que de seuiller h_1, on l'écrête au niveau μ. On définit ainsi une fonction h' égale à :

$$h'_1(x) = h_1(x) \quad \text{si} \quad h_1(x) < \mu$$

$$h'_1(x) = \mu \quad \text{sinon}$$

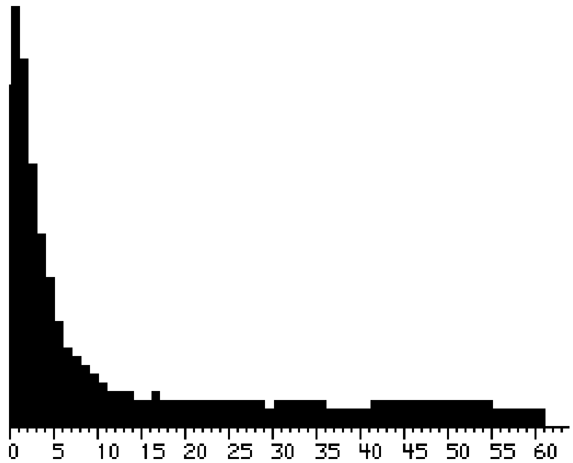


Figure VII-32

Histogramme des niveaux de gris de h_1

On peut alors dilater h' par un cône C. La Figure VII-33 illustre pourquoi cette technique est meilleure qu'un simple seuillage. En effet, si la valeur de seuil µ est un peu trop haute, certaines zones de flamboiement ou certains contours peuvent ne pas être pris en compte, alors que la dilatation par un cône le fera.

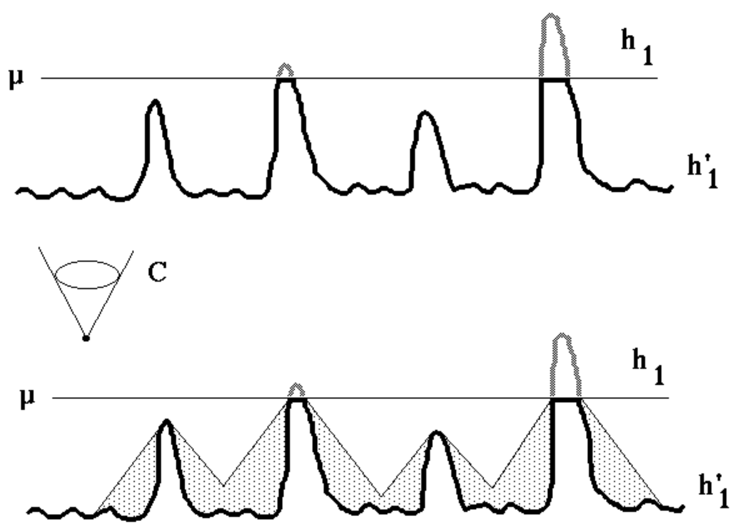
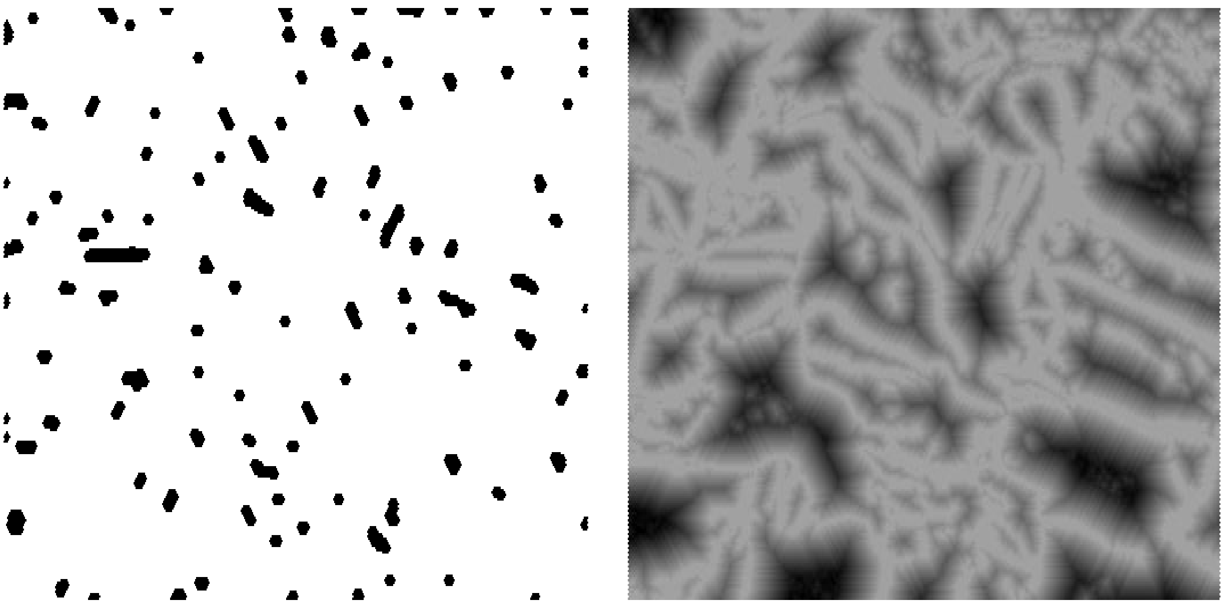


Figure VII-33

Dilatation de l'image h' par un cône

Les minima de la fonction $h'_1 \oplus \check{C}$ constituent les marqueurs des zones plates de l'image (Figure VII-34-a). Ces marqueurs correspondent aux régions de niveaux de gris relativement homogènes entourées par des zones de flamboiement ou des régions de niveaux de gris différents. De plus, ces régions doivent être de forme suffisamment régulières, faute de quoi, plusieurs marqueurs apparaîtront. Enfin, afin que le marquage ne prenne en compte que les zones suffisamment larges, la fonction $h'_1 \oplus \check{C}$ est fermée (la taille de la fermeture est égale à λ) avant extraction des minima.



(a) (b)

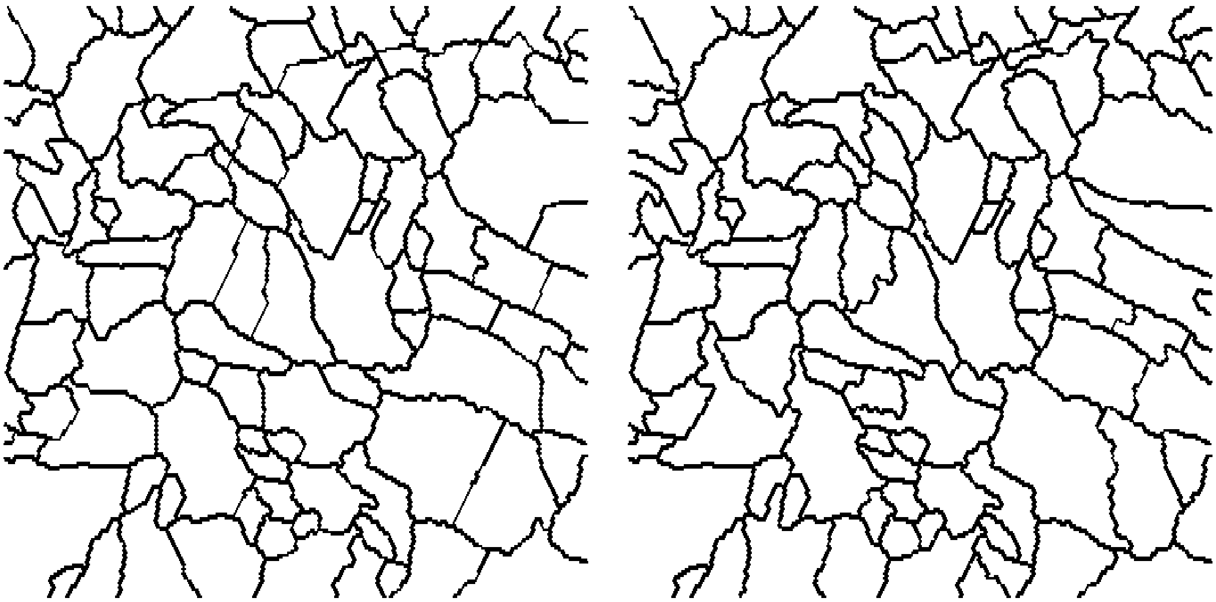
Figure VII-34

(a) Minima de la fonction h' dilatée (b) constituant les marqueurs des zones plates.

La mise en évidence des marqueurs est donc assez complexe. On peut alors générer l'image des zones plates de la fracture, en déterminant les bassins versants de $h'_1 \oplus \check{C}$ associés à l'ensemble M des marqueurs. Cependant, afin de mieux positionner les contours, la fonction $\mathrm{Sup}(h_1, h'_1 \oplus \check{C})$ sera utilisée (Figure VII-34-b). Sa LPE est calculée après qu'elle ait été modifiée.

Le résultat est illustré à la Figure VII-35-a. On aurait pu tout aussi bien calculer la LPE de h_1 après modification de la fonction telle que ses minima correspondent à l'ensemble des marqueurs M. Le résultat, donné à la

Figure VII-35-b, est intéressant, car il va nous permettre de réduire encore la sur-segmentation. En effet, si on compare les deux lignes de partage, on constate qu’elles se chevauchent en de nombreux endroits. Les parties communes des deux LPE correspondent aux lignes de crêtes à la fois de h_1 et de $\mathrm{Sup}(h_1, h'_1 \oplus \check{C})$. Inversement, certains arcs des deux lignes de partage peuvent être très différents.



(a) (b)

Figure VII-35

(a) Ligne de partage des eaux de la fonction précédente. (b) LPE de la fonction h_1.

Cette différence est l’indice que le critère de segmentation n’est pas à la fois un critère de forme et de contraste. Ainsi, étant donné que les deux LPE proviennent de fonctions ayant le même ensemble M de minima, les éléments d’arcs des deux LPE séparant deux bassins versants adjacents peuvent se présenter selon l’une des configurations de la Figure VII-36.

On peut alors éliminer les éléments d’arcs correspondants aux configurations (a) et (b), car ces configurations représentent les situations où sur les arcs des deux LPE ne sont pas générés à la fois par des critères de forme et de contraste. La Figure VII-37 illustre la procédure. On remarquera qu’il est de première importance que les deux LPE soient parfaitement superposées lorsque les crêtes des deux fonctions

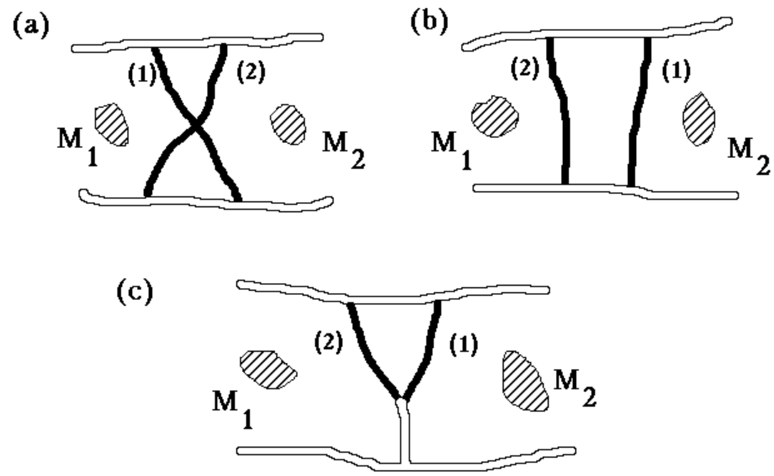


Figure VII-36

Configurations possibles des arcs des deux LPE construites à partir des mêmes marqueurs.

coïncident. C'est pourquoi il est nécessaire d'utiliser des algorithmes de LPE basés soit sur des épaississements par des unions d'éléments structurants soit sur des fléchages (cf. chapitres 4 et 5). Les configurations de type (a) sont d'abord supprimées. Elles correspondent aux éléments d'arcs marqués par une composante connexe simple (sans branches) de l'intersection des deux LPE. Puis, on élimine les arcs de type (b), c'est-à-dire ceux qui n'ont aucun marquage dans l'intersection des LPE. Le résultat final de la segmentation n'est pas parfait. Mais il suffit pour déterminer l'orientation spatiale de ces zones plates.

Le calcul de l'altitude des zones plates (bassins versants finaux) peut se faire de différentes manières. La première consiste à calculer la fonction de corrélation entre une petite région de la première image f_1 et la deuxième image f_2 de la paire stéréo ([19]). En désignant par S_x, la petite région (carrée, ou hexagonale) implantée au point x de la première image et par s_x son indicatrice, on calcule la fonction de corrélation suivante :

$$C_x(h) = \int f_1(y)\ s_x(y)\ f_2(y+h)\ dy$$

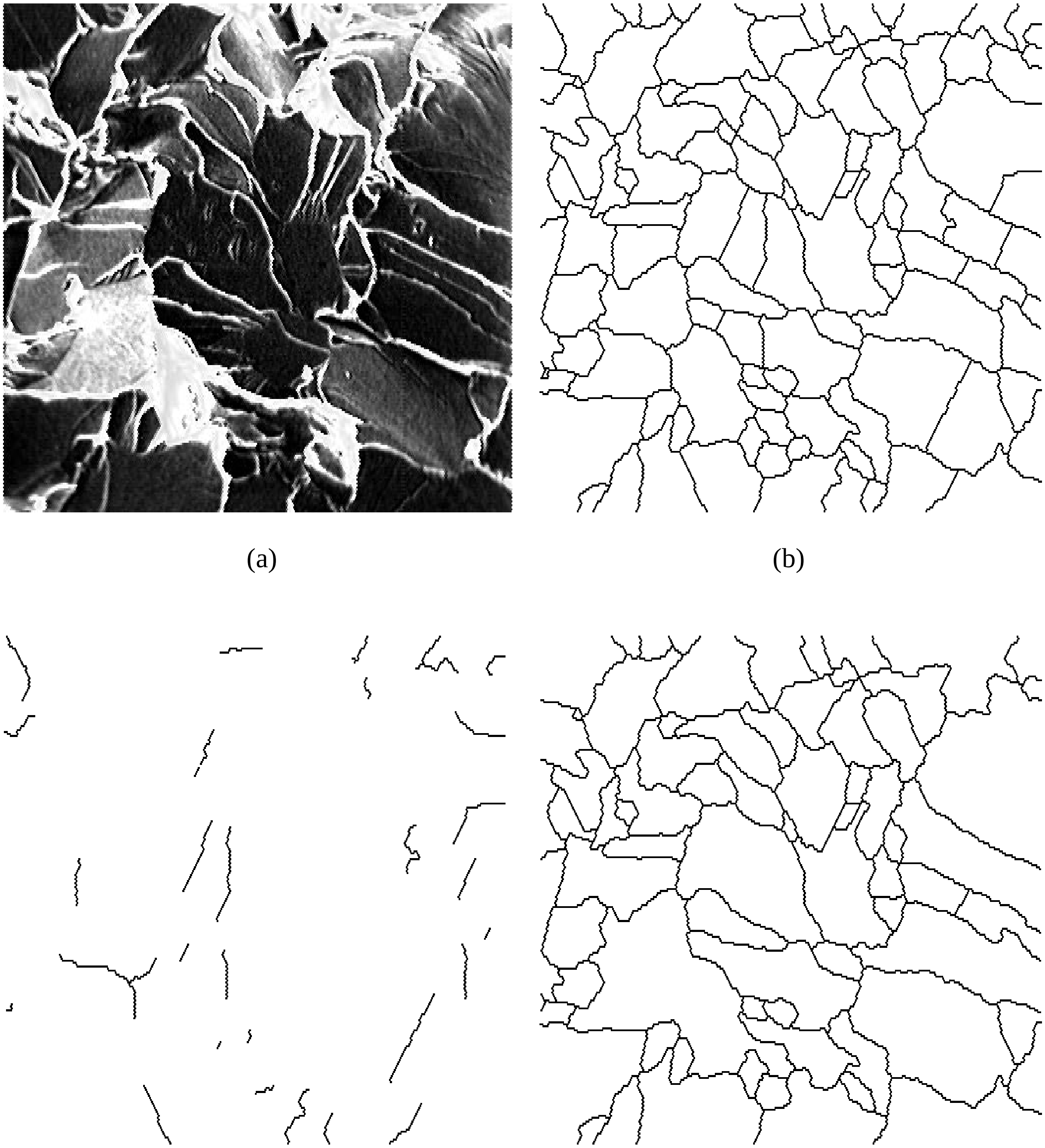

(a) (b) (c) (d)

Figure VII-37

Elimination de la sur-segmentation. (a) Image initiale, (b) arcs obtenus après segmentation, (c) arcs éliminés, (d) résultat final.

pour différentes valeur du vecteur, déplacement h centré au point x. La valeur de h pour laquelle $C_x(h)$ passe par un maximum correspond au décalage entre les zones homologues des deux images (Figure VII-38). Afin de réduire le nombre de calculs, seuls les déplacements horizontaux sont utilisés. Cette façon de faire est légitime si on se réfère à l'hypothèse d'une projection parallèle de l'échantillon. Dans ce cas, le déplacement des zones homologues se fera toujours dans le sens horizontal. Mais pour cela, il est indispensable que les deux clichés stéréo soient parfaitement calés verticalement. Ce calage vertical est effectué également par corrélation. Partant de l'image h_1 extraite de la première image, et de sa correspondante h_2, on peut simplement seuiller ces deux images au niveau de seuil μ précédemment évoqué et obtenir deux ensembles $X_\mu(h_1)$ et $X_\mu(h_2)$:

$$X_\mu(h_1) = \{x : h_1(x) \geq \mu\}$$

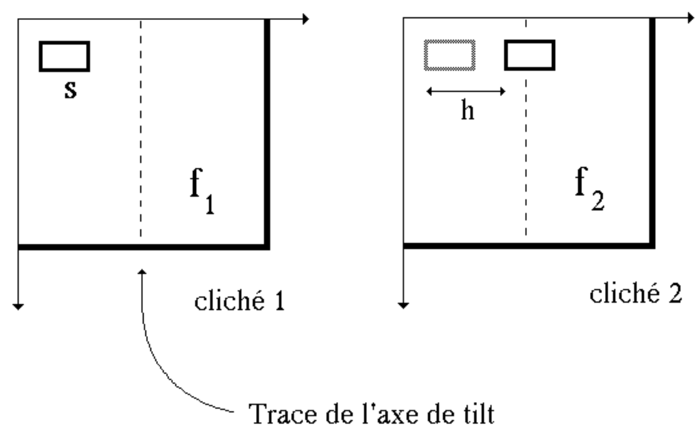


Figure VII-38

Mise en évidence des zones homologues par corrélation

On construit alors deux fonctions $q_1(y)$ et $q_2(y)$ dépendant de la cote verticale y :

$$q_1(y) = \text{Aire } (X_\mu(h_1) \cap Y_y)$$

où Y_y est une droite horizontale à la cote y (Figure VII-39).

Le calcul de la fonction de corrélation de q_1 et q_2 est alors effectué :

$$C(h) = \int [q_1(y) - m_1]\,[q_2(y+h)\ (m_2]\,dy$$

avec : $m_1 = E[q_1(y)]$, $m_2 = E[q_2(y)]$

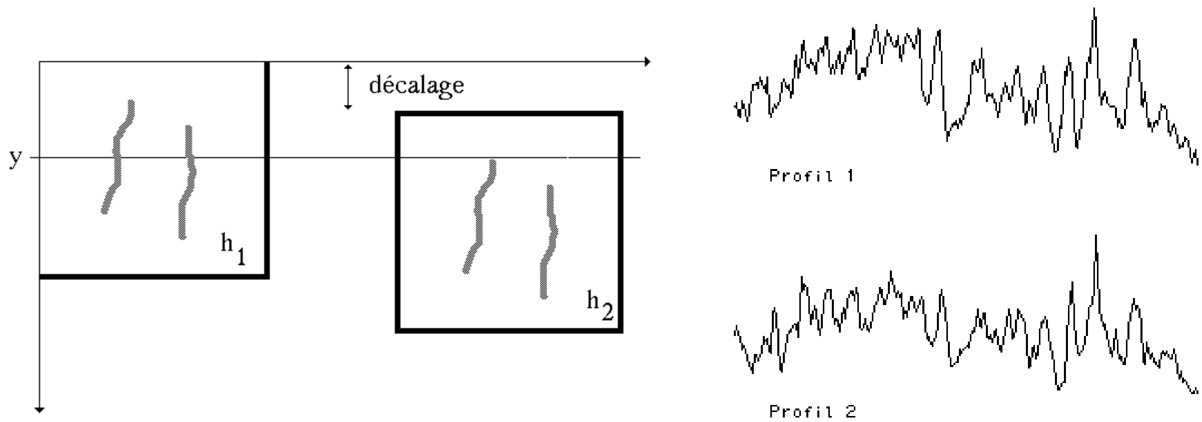
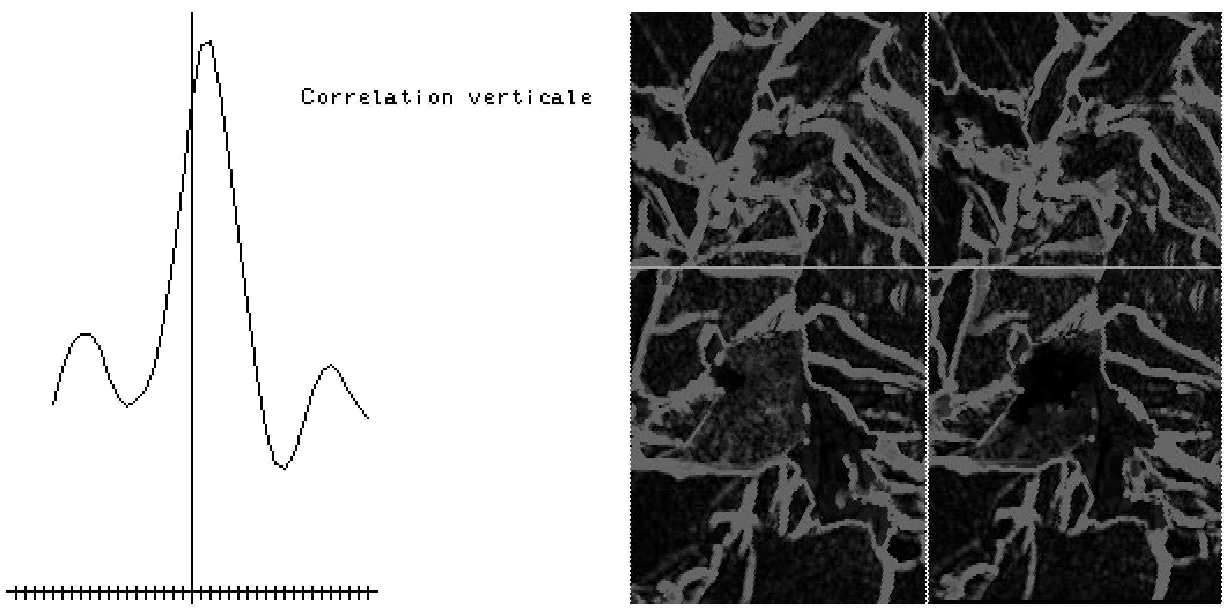


Figure VII-39

Calage des images par corrélation : (a) principe, (b) exemple de fonctions q_1 *et* q_2.



(a) (b)

Figure VII-40

Calcul de la corrélation (a) et résultat du calage (b).

La valeur h correspondant au maximum de corrélation sera alors égale au décalage vertical entre les clichés (Figure VII-40).

Si le calcul des corrélations est très efficace pour ce qui concerne le calage vertical des images, cette méthode peut parfois engendrer des erreurs radicales lors du calcul des décalages des régions homologues. En effet, le décalage entre les facettes aura par définition tendance à augmenter dès qu'on s'éloignera de l'axe de tilt et on risque de ne pas atteindre par corrélation les zones homologues parce qu'en dehors du champ balayé. De plus, le champ S ne pouvant pas être très important, on court le risque de confondre des zones de formes semblables. Il existe cependant une autre méthode, qui a l'avantage d'être dans le droit fil des méthodes de segmentation utilisées pour mettre en évidence les régions plates de la fracture. Cette méthode, dont nous ne donnerons qu'une esquisse, consiste à utiliser des marqueurs extraits dans le premier cliché pour déterminer les régions plates homologues du second cliché.

Considérons les marqueurs M utilisés pour segmenter les zones plates de la première image (cf. Figure VII-34). A chaque bassin versant BV_i de l'image finale de la Figure VII-37, il lui correspond un ensemble $\{M_i^1,...,M_i^j\}$ de marqueurs appartenant à M. Le bassin versant n'est pas toujours marqué par une seule composante connexe car la procédure de suppression de la sur-segmentation peut affecter à une même région plate plusieurs marqueurs. Le principe de la procédure consiste à utiliser le même ensemble M de marqueurs pour segmenter la deuxième image de la paire stéréo. On pourrait pour cela construire l'image $\mathrm{Sup}(h_2,h'_2 \oplus \check{C})$ et modifier cette image en lui imposant l'ensemble M des marqueurs. La ligne de partage des eaux de cette image modifiée exhibant un certain nombre de bassins versants, il serait alors possible d'associer à chaque marqueur M_i^j le bassin versant qui lui correspond dans la deuxième image. L'union de tous les bassins versants de la seconde image associés à l'ensemble $\{M_i^1,...,M_i^j\}$ des marqueurs constitue une région dans ce second cliché homologue au bassin BV_i du premier cliché. Il est alors facile de déterminer les décalages, donc les altitudes des points-frontière homologues de la facette. On notera que les deux bassins versants appariés doivent avoir même diamètre de Ferret en vertu de l'hypothèse de la projection parallèle.

Malheureusement cet appariement risque de produire les mêmes erreurs que l'usage de l'image des corrélations et ceci pour les mêmes raisons : il n'y a aucune raison pour que les marqueurs associés à une facette du premier cliché tombent exactement à l'aplomb de la même facette sur le second cliché. Pour contourner cette difficulté, il suffit d'effectuer l'association des marqueurs en veillant à corriger les décalages engendrés pour les marqueurs d'une facette donnée par le fait que cette facette est adjacente à d'autres facettes ayant elles-mêmes subi des décalages. A cette propagation des décalages des marqueurs, on ajoute une migration de ces marqueurs de façon à améliorer leur position par rapport à la deuxième image. Explicitons en détail cette procédure.

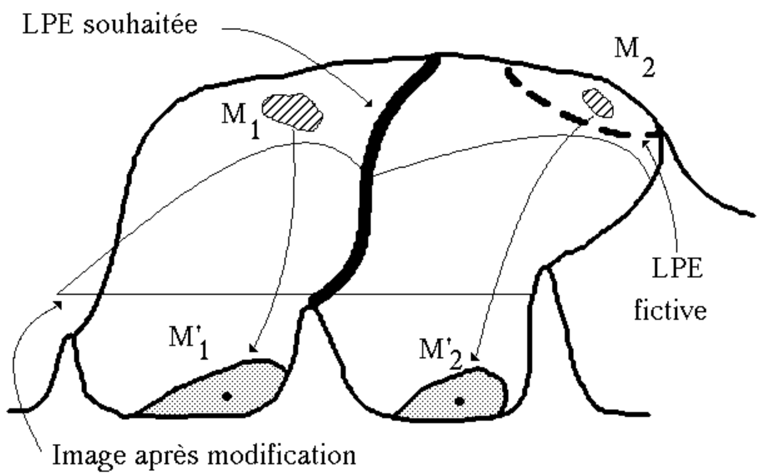


Figure VII-41

Un mauvais positionnement des marqueurs entraîne une mauvaise détection des facettes.

La première étape consistera à apparier certaines facettes du premier cliché avec leurs homologues sur la deuxième image. Pour ce faire, deux opérations sont réalisées.

- D'abord, et afin de mieux positionner sur la deuxième fonction $Sup(h_2,h'_2 \oplus \check{C})$ les marqueurs M de la première image, on ne se contente pas de les imposer brutalement avant de modifier la fonction. En effet, ces marqueurs correspondent à des minima de $Sup(h_1,h'_1 \oplus \check{C})$. On va donc associer à ces marqueurs les minima de $Sup(h_2,h'_2 \oplus \check{C})$ qui en sont les plus proches.

Considérons pour cela la surface topographique dessinée par le graphe de $\mathrm{Sup}(h_2,h'_2 \oplus \check{C})$ et laissons tomber sur cette surface les marqueurs M. Chaque marqueur va alors, à la manière d'une goutte d'eau, glisser le long de la pente du relief et atteindre ainsi un minimum de la fonction $\mathrm{Sup}(h_2,h'_2 \oplus \check{C})$. C'est en ce sens qu'on définit la proximité des marqueurs de la première fonction avec les minima de la seconde. A l'ensemble M des premiers marqueurs correspondra alors un ensemble M' de minima sur la deuxième image, ce dernier ensemble ayant même nombre de composantes connexes que M. On peut alors modifier l'homotopie de $\mathrm{Sup}(h_2,h'_2 \oplus \check{C})$ avec cet ensemble M' et ainsi, après LPE, associer à chaque facette de la première image, une facette homologue sur la deuxième. Cette procédure de migration des marqueurs est importante, car un mauvais positionnement de ces marqueurs sur la fonction $\mathrm{Sup}(h_2,h'_2 \oplus \check{C})$ pourrait entraîner, comme l'illustre la Figure VII-41, des erreurs importantes.

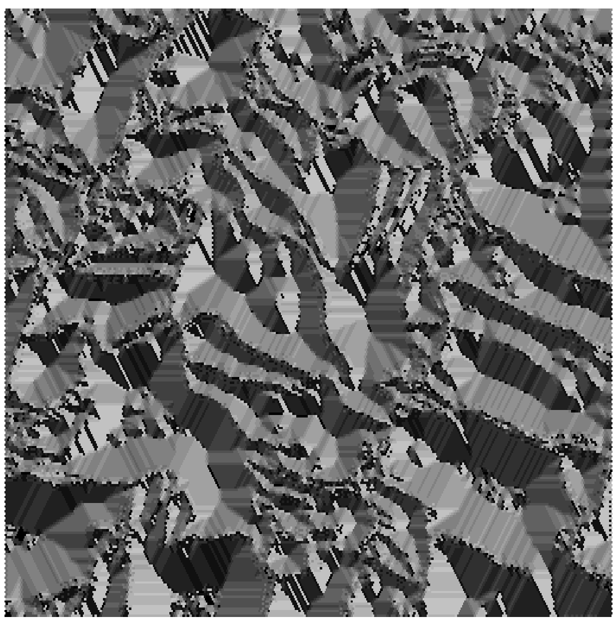
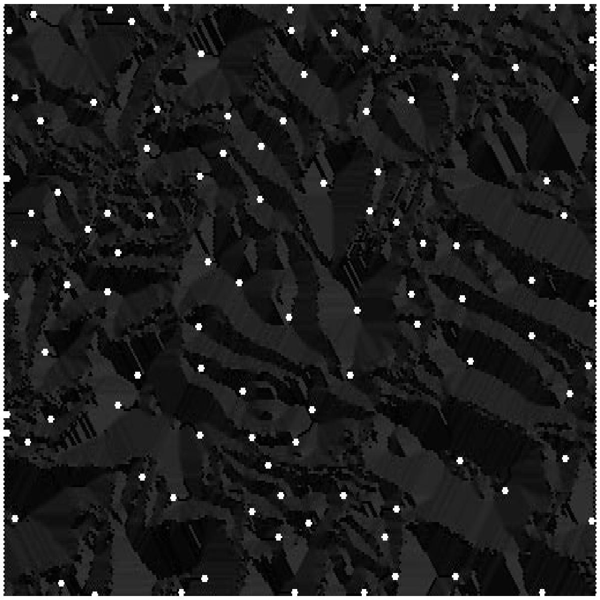


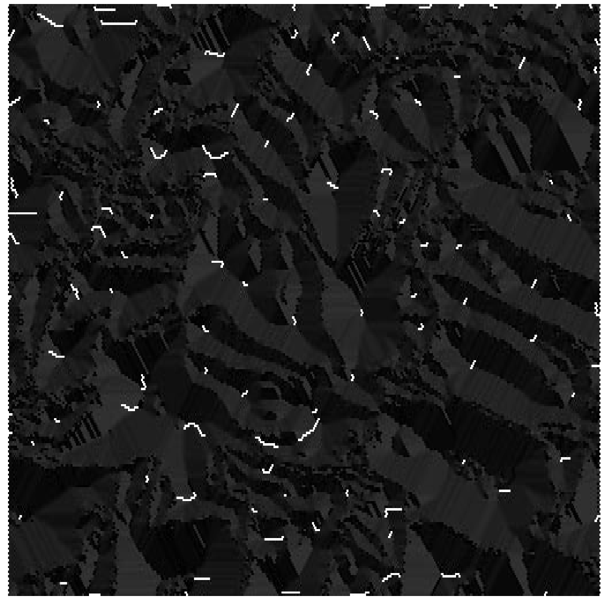
Figure VII-42

Azimut du gradient de la fonction $\mathrm{Sup}(h_2,h'_2 \oplus \check{C})$

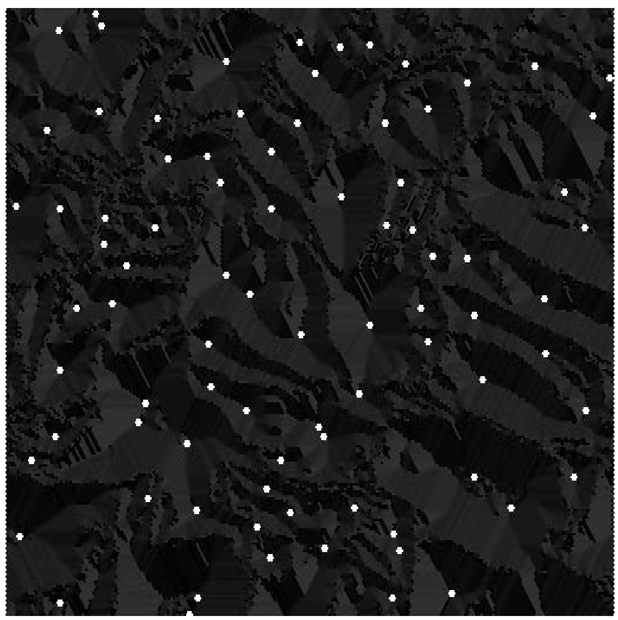
Comment en pratique réaliser cette migration ? Il suffit pour cela de calculer l'azimut du gradient de la fonction $\mathrm{Sup}(h_2,h'_2 \oplus \check{C})$. Cet azimut fournit un codage des directions de plus grande pente (Figure VII-42). Il suffit alors à partir de ce codage de construire une fonctionnelle η similaire à celle utilisée pour définir la distance géodésique généralisée



(a)



(b)



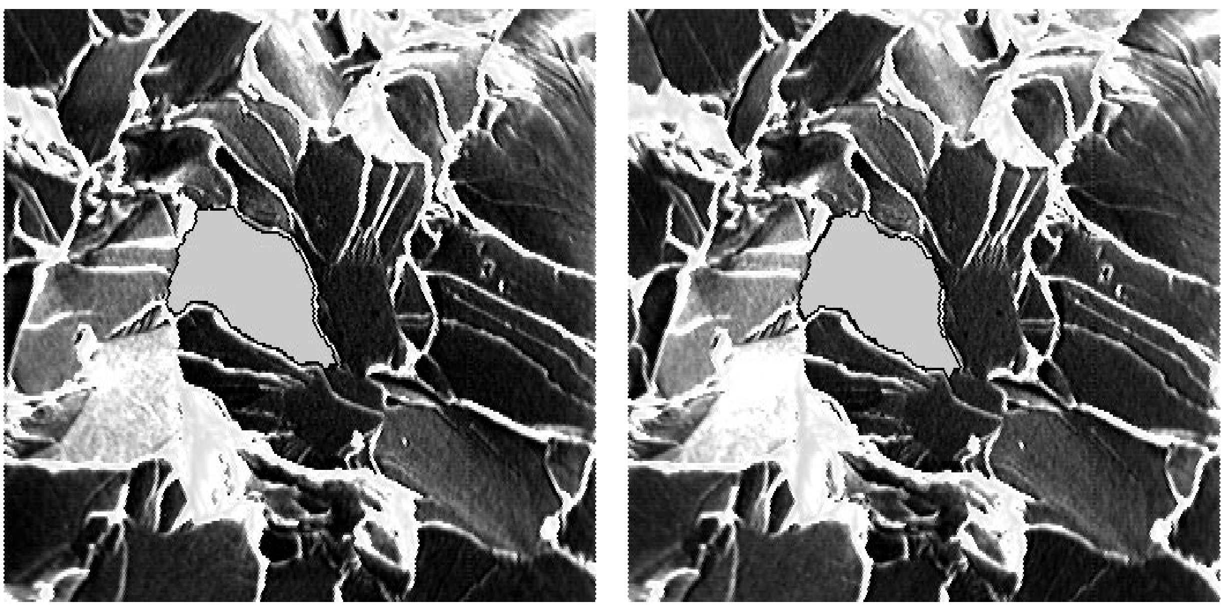
(c)

Figure VII-43

(a) Marqueurs de la première image, (b) chemins de migration des marqueurs, (c) marqueurs de la deuxième image.

(voir chapitre 3, § III). Les marqueurs M réduits à un point migrent alors le long de la pente de la fonction pilotés par la fonction η et atteignent un minimum de $\mathrm{Sup}(h_2,h'_2 \oplus \check{C})$. La Figure VII-43 illustre l'algorithme. On établit ainsi une correspondance biunivoque entre ces nouveaux marqueurs et les marqueurs M initiaux. Après modification de $\mathrm{Sup}(h_2,h'_2 \oplus \check{C})$ et LPE, il est alors facile de déterminer les facettes homologues sur les deux clichés (Figure VII-44-a).

- Cependant, comme on l'a déjà signalé, l'appariement des facettes peut être faussé, surtout dans la périphérie du cliché. On se contente alors d'apparier certaines facettes. Celles-ci sont choisies parmi celles qui se situent sur l'axe de tilt. Un test de vraisemblance peut même être effectué, basé sur le fait que des facettes réputées homologues doivent avoir des diamètres de Ferret verticaux identiques (Figure VII-44-b). Ces facettes homologues vont servir d'ancrage pour la suite de la procédure.



(a) (b)

Figure VII-44

Facette de la première image (a) et facette correspondante sur la deuxième (b).

La deuxième étape de cette procédure consistera à apparier les autres facettes, de proche en proche, en commençant par les facettes adjacentes à celles qui ont été appariées dans la première étape. Cette procédure tend à mettre en correspondance les facettes en respectant les relations de voisinage et la topologie de la fracture. Si sur le premier cliché, la facette A est adjacente à la facette B, il est hautement probable que l'homologue A' de A soit adjacente à l'homologue B' de B. Considérons sur la première image une facette BV_i^1 à l'issue de la première étape (Figure VII-45-a). Considérons alors une facette BV_j^1 adjacente à BV_i^1 sur le premier cliché. Cette facette est marquée par une ou plusieurs composantes $\{M_j\}$ de l'ensemble des marqueurs M. Soit M_j, un de ces marqueurs (réduit à un point

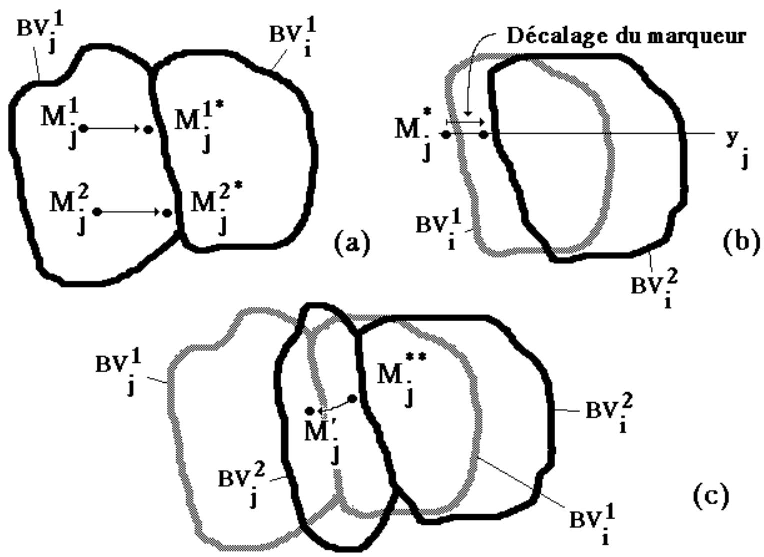
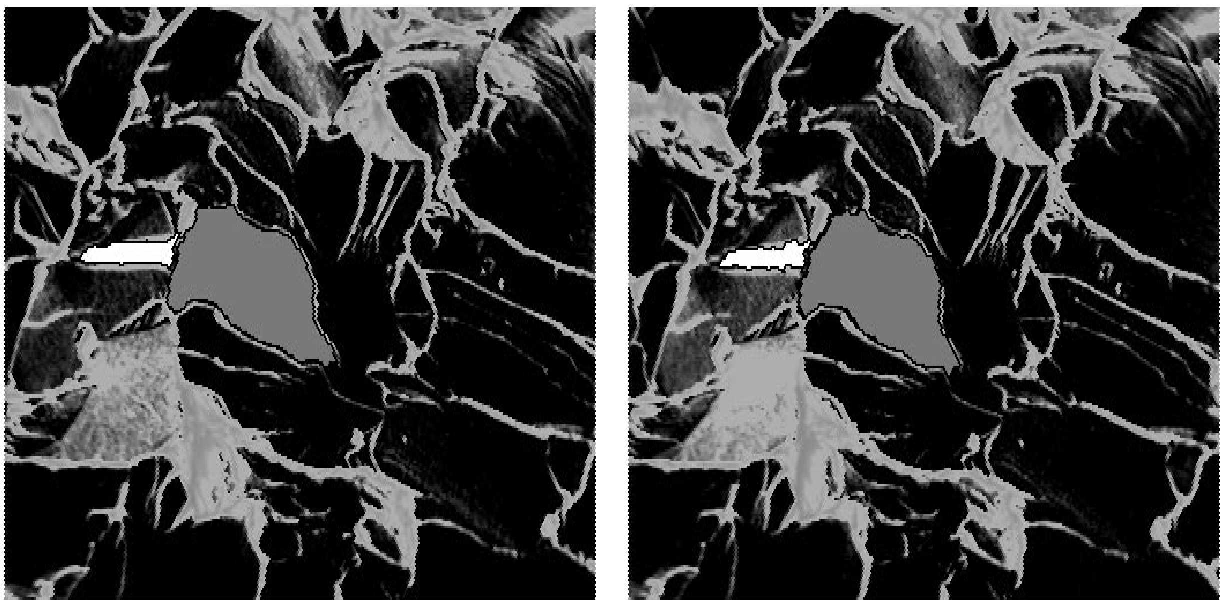


Figure VII-45

Amélioration du positionnement des marqueurs par appariement des facettes adjacentes.

pour simplifier l'algorithme), à la cote verticale y_j. A cette cote, correspond un décalage entre les facettes de première génération (celles appariées à l'étape 1). On peut donc déplacer l'ensemble des marqueurs M_j d'une distance correspondant à ce décalage. On compense ainsi le décalage dû aux premières facettes. Mais on peut faire encore mieux. On peut effectivement améliorer le marquage des facettes adjacentes dans le deuxième cliché, en partant des marqueurs M_j du premier cliché et en les remplaçant par le point inclus dans le bassin versant BV_j^1 situé sur la même horizontale et le plus proche de BV_i^1 (Figure VII-45-b). Ces nouveaux marqueurs M_j^* sont alors décalés chacun d'une valeur correspondant au décalage de la facette BV_i à la cote y_j. Puis, on peut faire migrer à nouveau ces marqueurs dans le sens de la pente et suivant l'azimut du gradient de $Sup(h_2,h'_2 \oplus \check{C})$ de façon à obtenir le marqueur M'_j de la facette BV_j^2 (Figure VII-45-c). On peut alors modifier l'homotopie de $Sup(h_2,h'_2 \oplus \check{C})$ et effectuer sa LPE pour obtenir les facettes homologues de deuxième génération. L'itération de cette procédure peut être réalisée de proche en proche.

Il est conseillé d'effectuer ce type d'opération sur la segmentation primaire des facettes (avant élimination de la sur-segmentation) puisque on peut toujours associer aux facettes finales l'ensemble de leurs marqueurs et donc l'ensemble des marqueurs correspondants à la facette homologue sur le deuxième cliché. On évite ainsi de faire migrer trop loin les marqueurs M_j, ce qui pourrait conduire à sortir des bassins versants associés à chaque marqueur initial. La Figure VII-46 illustre la procédure appliquée à deux facettes adjacentes de la paire stéréoscopique initiale.



(a) (b)

Figure VII-46

Exemple de mise en correspondance de deux facettes par adjacence. (a) Image 1, (b) image 2.

Une telle procédure d'analyse de clichés stéréoscopiques pourrait être appliquée de façon plus générale. Elle a l'avantage par rapport aux autres méthodes d'analyse de vues stéréoscopiques (cf. AYACHE, 1988, [01]) d'être très proche de la topologie et des relations de voisinage existant entre les objets dans l'image étudiée. Cela est dû en majeure partie au fait qu'on manipule un ensemble de marqueurs et que les correspondances entre objets sur les deux images passent par l'appariement des marqueurs.

Divers procédures de sauvegarde permettant, après coup, de vérifier la bonne adéquation des facettes, peuvent être envisagées (mesure des diamètres de Ferret par exemple).

Les exemples de segmentation de ce dernier chapitre illustrent de façon convaincante combien il est parfois difficile de mettre en évidence des marqueurs des objets à segmenter. Cependant, même dans ce cas, la ligne de partage des eaux fournit des outils puissants de segmentation, par le biais de la hiérarchisation d'images. Il n'en demeure pas moins que le marquage nécessite souvent l'utilisation de l'ensemble des outils de la morphologie mathématique, que ce soit pour le filtrage, la mise en évidence de formes caractéristiques, ou l'élaboration de techniques de segmentation plus sophistiquées. Le dernier exemple, relatif aux clichés stéréoscopiques, est à cet égard significatif. Il n'est pas rare dans ce genre d'applications complexes de devoir utiliser un grand nombre de ligne de partage des eaux, ce qui entraîne de réelles difficultés de mise en oeuvre ne serait-ce que par les temps de traitement souvent importants que cela implique. C'est une des raisons qui expliquent pourquoi il y a encore assez peu d'exemples d'applications dans ce domaine.

Au terme de cette présentation des outils de segmentation et de leur usage, il est important d'en faire une analyse critique en mettant en exergue ce qui les distingue fondamentalement des méthodes classiques. C'est ce que nous ferons brièvement en guise de conclusion.

CONCLUSION

Quelles sont les principales caractéristiques de ces méthodes de segmentation morphologiques ? Elles sont liées essentiellement à la nature des outils utilisés : la ligne de partage des eaux d'une part, et l'utilisation de marqueurs d'autre part.

La ligne de partage des eaux fournit d'abord par définition des contours fermés. En fait, cette technique n'est pas une méthode de détection de contours, mais une méthode permettant la mise en évidence de régions homogènes dans l'image où le marquage de ces zones se propage (ce sont les bassins versants) et définit a contrario les contours (c'est-à-dire les lignes de partage). De par sa définition, cette méthode est également très générale et s'applique tout aussi bien aux images bidimensionnelles, tridimensionnelles, aux structures mathématiques de type graphes, aux images couleurs, etc..., comme les exemples des deux précédents chapitres l'ont amplement montré. De plus, même lorsque la ligne de partage produit une très forte sur-segmentation, tous les contours objectivement présents dans l'image font partie de cette ligne de partage des eaux. Toute l'information nécessaire est donc rassemblée dans cette transformation, et c'est pourquoi, à condition que les critères de segmentation aient été bien choisis (forme, contraste, etc...), l'amélioration de la segmentation consiste toujours à supprimer certains contours non pertinents. En fait, puisque la segmentation est réalisée à partir de minima, l'élimination de la sur-segmentation passe logiquement par la sélection de certains minima puis, dans un deuxième temps, par l'imposition de certains marqueurs qui n'ont plus besoin d'être des minima. L'utilisation de ces marqueurs se fait par le biais de la modification d'homotopie.

Cette méthodologie de la segmentation a l'avantage de séparer le problème en deux étapes bien distinctes : la première est la recherche des marqueurs, et la seconde la mise en évidence de la fonction à modifier, fonction synthétisant les critères utilisés pour extraire les objets. Ces critères peuvent être photométriques, ou bien encore basés sur la forme, comme l'ont montré les exemples de segmentation des voies de trafic routier, ou encore le découpage des facettes de fractures métalliques. La formalisation de la combinaison de ces critères peut d'ailleurs être faite en utilisant la représentation sous forme de fléchage et la notion de complétude (MEYER, BEUCHER, 1990, [69]).

Cependant, avec cette séparation des tâches, on semble avoir simplement déplacé les difficultés. En effet, si la segmentation est en elle-même purement mécanique (modification d'homotopie + LPE), sa préparation (détermination des marqueurs et de la fonction utilisée par la LPE) nécessite une longue élaboration avec souvent des outils ad hoc. Cette critique est parfaitement justifiée. Mais après tout, en quoi ce fait limiterait-il la généralité de la méthode ? Au contraire, pour extraire les objets de l'image, il est nécessaire, dans cette approche, de définir ce que l'on cherche en un mot de construire les objets à extraire. Cette construction conduit à des marqueurs, désignant les objets d'intérêt dans l'image, un peu comme on le ferait naturellement en montrant du doigt sur ladite image ces objets. Mais cette désignation implique un certain niveau de compréhension de l'image. Cette technique mime en quelque sorte la perception globale d'une image ou une forme (une "gestalt" comme l'appellent les psychologues prônant cette Théorie de la Forme) émerge globalement d'un fond. La forme est ici le marqueur, et son émergence est le résultat du processus de construction dudit marqueur, processus de construction qui est taillé en fonction de chaque problème, et non globalement, pour la simple raison qu'il n'existe pas à l'heure actuelle en analyse d'image, un tel processus (et on ignore s'il existera un jour). L'étape "intelligente" de la segmentation consistant à rechercher ces marqueurs, on comprend pourquoi plusieurs approches sont possibles selon le degré de difficulté du problème.

Cela peut aller du simple marquage interactif jusqu'à des procédés complexes basés sur la hiérarchisation. On peut d'ailleurs noter que cette méthodologie de la segmentation se prête fort bien à l'approche interactive. En effet, le marquage est une tâche relativement facile à réaliser par un opérateur (même si, comme on l'a vu, ce marquage doit être assez précis) tandis que le tracé des contours, effectué alors de façon purement automatique, serait beaucoup plus fastidieux s'il était entrepris par le même opérateur.

Venons-en à la comparaison de cette méthodologie avec les méthodes classiques de segmentation d'images. Ces méthodes classiques se divisent en deux groupes : celles basées sur la détection de contours et celles basées sur la segmentation-fusion des régions. On a déjà vu pourquoi la LPE se démarquait radicalement des techniques de segmentation de contours. Puisqu'on met en évidence les objets à extraire et que leurs contours n'apparaissent qu'indirectement, il n'y a nul besoin des techniques de régularisation destinées comme dans les méthodes classiques, à réduire l'influence du bruit dans la détection des contours. Si régularisation il y a, elle est avant tout destinée à améliorer la détection des minima. De plus, elle est non linéaire et possède ainsi certaines propriétés d'auto-régulation (idempotence). L'autre différence essentielle avec les méthodes de détection de contours est dans la place de la segmentation dans l'ensemble du processus de traitement de l'image. Très souvent, dans l'approche classique, la détection de contours apparaît comme la première étape du processus. Le résultat en est une image simplifiée, schématique : c'est le schéma primaire ("primal sketch" de MARR, 1982, [59]). Le schéma primaire est alors utilisé pour comprendre l'image utilisée, en cherchant à extraire des traits caractéristiques, à les assembler, et à les comparer avec les formes recherchées. La segmentation précède alors la compréhension. Il est alors indispensable dans cette approche que les détecteurs de contours soient performants, peu sensibles au bruit et universels d'où l'effort important porté sur les techniques de régularisation et sur la mise au point de détecteurs ne nécessitant pas de connaissance a priori des objets à mettre en évidence (CANNY, 1983, [30]). A l'inverse, la méthodologie utilisée ici place, on l'a vu, la compréhension de l'image, qui se concrétise par la mise au point d'algorithmes de marquage, avant la segmentation. Cette dernière n'a alors qu'une seule finalité : quantifier les objets ainsi segmentés. On ne segmente d'ailleurs que dans ce but, que ce soit pour mesurer la densité de taches d'électrophorèse, la largeur d'une chaussée, ou encore l'inclinaison d'une facette de fracture.

Par rapport aux méthodes de séparation-fusion, cette technique basée sur LPE semble présenter plus d'analogies. Mais ces analogies sont superficielles. Même en laissant de côté l'aspect non paramétrique de la segmentation par LPE ou l'indépendance du résultat par rapport à l'ordre de traitement des bassins versants, la différence la plus marquante dans l'approche morphologique est qu'il s'agit d'une méthode connexionniste et topologique. Les relations d'adjacence entre les bassins versants sont largement prises en compte. Cela permet d'envisager des solutions différentes de certains problèmes de segmentation comme celui des images stéréoscopiques, ou encore dans l'analyse d'objets en mouvement. La hiérarchisation d'images par LPE, qui présente également des analogies avec les représentations pyramidales (cf. ROSENFELD *et Al*, 1984, [76]) en diffère également pour les mêmes raisons. Ainsi, chaque niveau de la hiérarchie est relié aux niveaux qui le précèdent ou le suivent par des relations de voisinage et d'imbrication des bassins versants parfaitement définies. Cela permet de nombreux aller-retours entre les différents niveaux de la hiérarchie en fonction des objets à détecter. Par exemple, dans le problème de l'analyse d'une scène routière à partir d'un véhicule, un certain niveau de hiérarchie permet d'accéder au marquage de la chaussée. On peut alors envisager très simplement de repasser à des niveaux de hiérarchisation plus faibles pour, à l'intérieur du marqueur de la chaussée, mettre en évidence certains détails comme les obstacles, ou le marquage au sol. On retrouve ainsi une approche qui mime les mécanismes de la perception, où une certaine échelle de perception (un certain niveau de hiérarchie) permet de centrer l'observation sur une zone particulière de l'image afin d'en extraire, en changeant l'échelle de la perception (en changeant de niveau de hiérarchie) des détails, des objets à quantifier. Certains algorithmes comme les cascades permettent notamment de simplifier ce processus puisqu'ils déterminent immédiatement la zone d'intérêt, sans avoir besoin d'un marquage extérieur.

Reste le problème de la complexité des algorithmes et de leur vitesse d'exécution. On a vu dans le chapitre 7 que certaines situations complexes nécessitent pour obtenir un résultat satisfaisant l'utilisation de plusieurs lignes de partage, souvent associées à des transformations comme la modification d’homotopie. On comprend alors tout l’intérêt de mettre au point de nouvelles algorithmiques destinées à réduire les temps de traitement. La LPE par fléchage en est une, mais ce n’est pas la seule. Il existe même dans ce domaine de nombreuses approches. Il est fort probable que les solutions retenues dépendront largement de la nature et de la dimension des images traitées.

Quelles sont les potentialités de cette méthodologie ? Assez prometteuses dès lors que des algorithmes élémentaires comme la LPE pourront être effectués rapidement. Cette approche présente également un autre intérêt : elle indique la direction vers laquelle doivent être portés les efforts pour obtenir des algorithmes de segmentation encore plus performants. C’est bien évidemment sur les techniques de marquage ou de désignation des objets. Le fait qu’elles soient adaptées à chaque type de problème traité n’est pas en soi un lourd handicap à partir du moment où les problèmes posés relèvent plus de l’ingénierie que de l’intelligence artificielle. Cependant même dans ce cas, la variabilité dans la forme et la taille des objets à extraire peut être importante. Divers éléments de solution sont envisageables à partir de techniques d’apprentissage des formes à mettre en évidence. L’utilisation de grammaires formelles peut aussi être testée, notamment sur les représentations simplifiées constituées par l’image-mosaïque et les différents niveaux de hiérarchie. On pourrait définir les formes à rechercher à l’aide de critères d’adjacence de régions possédant certaines caractéristiques de forme, de niveaux de gris à l’intérieur d’un même niveau de hiérarchie, et même à l’aide de critères d’imbrication de ces régions d’un niveau à un autre de la hiérarchie. On définirait ainsi des "éléments structurants" dans l’espace hiérarchique, et le marquage des objets à détecter pourrait alors se résumer à des opérations morphologiques simples (transformées en tout ou rien, ouvertures) dans cet espace.

BIBLIOGRAPHIE

[01] **AYACHE N.** (1988) : Construction et fusion de représentations visuelles 3D. Applications à la robotique mobile, Thèse de Doctorat ès Sciences, Université Paris-Sud, Centre d'Orsay, Mai 1988.

[02] **M. BENALI M., BENHAMOU M.** (1986) : Vision par ordinateur et morphologie mathématique : un exemple de contrôle en agro-alimentaire, note interne CMM n° N-1/86/MM, Fontainebleau, Janv. 86.

[03] **BEUCHER S.** (1980) : *in* Mathematical Morphology, Part II, Spring School, Fontainebleau 1980, C-81-2, Ecole des Mines, Fontainebleau.

[04] **BEUCHER S.** (1981) : Ligne de partage des eaux. Comment l'expliciter en termes de transformation fonctionnelle ? Note interne C.M.M. n° N-699, Fontainebleau, Mai 1981.

[05] **BEUCHER S.** (1981) : Weld radiographs analysis, note interne CGMM n° N-715, Fontainebleau, Oct. 81.

[06] **BEUCHER S.** (1982) : Lecture automatique des gels d'électrophorèse, note interne C.G.M.M. n° N-746, Fontainebleau, Fév. 82.

[07] **BEUCHER S.** (1982) : Lignes de partage des eaux par fléchage, Programmes-sources, note interne CMM n° 10/90/MM, Fontainebleau, Sept. 82.

[08] **BEUCHER S.** (1985) : MICROMORPH, Manuel de Référence, Ecole d'été de Morphologie Mathématique, Sept. 85, Ecole des Mines de Paris.

[09] **BEUCHER S.** (1989) : Analyse de diagraphies électriques par morphologie mathématique. Rapport d'étude CMM/EP-SCHLUMBERGER, N-3/89/MM, Centre de Morphologie Mathématique, Fontainebleau.

[10] **BEUCHER S.** (1989) : Squelettes connexes et non connexes. Note interne C.M.M. n° N-7/89/MM, Fontainebleau.

[11] **BEUCHER S.** (1989) : Segmentation et Morphologie Mathématique, Cours Ecole d'Eté 1989 de Morphologie Mathématique, CT-1/90/MM, Fontainebleau, Sept. 89.

[12] **BEUCHER S.** (1989) : Segmentation de la chaussée et détection d'obstacles par Morphologie Mathématique, Rapport d'activité 89, Projet PROMETHEUS, N-1/90/MM, Fontainebleau, Janvier 1990.

[13] **BEUCHER S., BILODEAU M., YU X.** (1990) : Road segmentation by watershed algorithms, PROMETHEUS workshop, Sophia-Antipolis, France, Avril 1990.

[14] **BEUCHER S., BLANC M.** (1981) : Stéréométrie de faciès de rupture fragile. Application de la morphologie mathématique à l'analyse quantitative de surface non plane, compte-rendu de fin d'étude DGRST, n° 78.7.24443 et 2445, Mars 81.

[15] **BEUCHER S., BLOSSEVILLE J.M., BILODEAU M., LENOIR F., ESPIE S.** (1987) : TITAN, Système de mesure du trafic par analyse d'images, Rapport commun INRETS/CMM, Note interne CMM n° N-46/87/MM, Fontainebleau, Oct. 87.

[16] **BEUCHER S., BLOSSEVILLE J.M., LENOIR F.** (1987) : Traffic spatial measurements using video image processing. Proc. of SPIE, Advances in intelligent Robotics Systems, Cambridge Symposium on Optical and Optoelectronic Engineering, 1-6 Nov. 87, Cambridge, Mass., USA.

[17] **BEUCHER S., CALVEL J.P.** (1988) : Dépouillement automatique de jets libres de charges creuses. Journées Détonique 88, ETCA/Centre d'études de Gramat, Oct. 88.

[18] **BEUCHER S., GRATIN C.** (1989) : MICROMORPH - Version PC, Solution des

exercices, Ecole des Mines, Paris.

[19] **BEUCHER S., HERSANT T.** (1979) : Analyse quantitative de surfaces non planes. Application à la description de faciès de rupture fragile par clivage. Compte-rendu de fin d'étude financée par la D.G.R.S.T., CMM/IRSID, PA 3 2153-TH/CC - Cte n° 95 57 0056, Août 1979.

[20] **BEUCHER S., KLEIN J.C.** (1983) : Projet Armines/Sopelem, note technique n° 2 : Structure générale du processeur d'opérations morphologiques, Note interne CMM n° N-834, Fontainebleau, Juillet 83.

[21] **BEUCHER S., LANTUEJOUL C.** (1979) : Use of watersheds in contour detection, Int. Workshop on Image Processing, CCETT/IRISA, Rennes, France, Sept. 79.

[22] **BEUCHER S., LANTUEJOUL C.** (1979) : On the change of space in image analysis, note interne C.G.M.M. N-625, Fontainebleau, Nov. 79.

[23] **BEUCHER S., MEYER F.** (1977) : Méthodes d'analyse des contrastes à l'analyseur de textures. Note interne C.M.M. N-536, Fontainebleau, Sept. 77.

[24] **BEUCHER S., SERRA J.** (1981) : Shapes and patterns of microstructures considered as grey-tone functions, Rapport interne C.M.M. n° N-708, Fontainebleau.

[25] **BEUCHER S., VINCENT L.** (1988) : Introduction aux outils morphologiques de segmentation, Proc. Journée ANRT, Paris, Déc. 88.

[26] **BIRKHOFF G.** (1983) : Lattice theory, 3rd edition, an. Math. Soc. Colloq. Publication, Vol. 25.

[27] **BLUM H.** (1967) : A transformation for extracting new descriptors of shape, Symposium on Models for the Perception of Speech and Visual Form, MIT Press.

[28] **BURGER F., GANDILLOT X., TREILLARD P.** (1982) : Transformations morphologiques sur un graphe, application à l'étude des lymphocytes, Rapport

de stage EMP/Ecole Polytechnique.

[29] **CALABI L., HARTNETT W.E.** (1968) : Shape recognition prairie fires, convex deficiencies and skeletons, American Mathematical Monthly, Vol. 75, N° 4, April 1968.

[30] **CANNY J.F.** (1983) : Finding edges and lines in images, Art. Intell. Lab., M.I.T., Cambridge, MA, TR-720, 1983.

[31] **CHOQUET G.** (1973) : Cours d'analyse, Topologie, Tome 2, MASSON, Paris.

[32] **COLLINS S.H.** (1975) : Terrain parameters directly from a digital terrain model. The Canadian Surveyor, 29, n° 5, 1975, 507-518.

[33] **COSTER M., CHERMANT J.L.** (1985) : Précis d'analyse d'images, Editions C.N.R.S.

[34] **DIGABEL H., LANTUEJOUL C.** (1978) : Iterative algorithms, Proc. of 2nd European Symposium or Quant. analysis of microstructures in material sciences, biology and medicine, Caen, France, 4-7 Oct. 77.

[35] **DUPAIN J.L., JERNOT J.P., COSTER M.** (1979) : Morphological sequential analysis and sintering process, Proc. of the 5th International Congress for Stereology, Salzburg, Austria, 3-5 Sept. 1979.

[36] **FRIEDLANDER F.** (1989) : Le traitement morphologique d'images de cardiologie nucléaire, Thèse de Doctorat en Morphologie Mathématique, Ecole des Mines de Paris, Déc. 89.

[37] **FRIEDLANDER F., MEYER F.** (1987) : A sequential algorithm for detecting watersheds on a gray level image, Proceeding of the 7th International Congress for Stereology, Caen, France, 1987.

[38] **GRATIN C.** (1989) : MICROMORPH - Version PC, manuel de référence, Ecole des Mines, Paris.

[39] **GRIMAUD M., MEYER F.** (1988) : Recursive transformations for segmentation, note interne CMM n° N-29/88/MM, Fontainebleau, Nov. 88.

[40] **GOETCHARIAN V.** (1980) : Parallel image processes and real-time texture analysis. Thesis Doctor of Philosophy, University College, London.

[41] **GUEDJ M.** (1984) : Segmentation d'images de milieux poreux en microscopie optique à réflexion, Note interne CMM n° N-932, Fontainebleau, Nov. 84.

[42] **HILDRETH E.C.** (1983) : The measurement of visual motion, MIT Press, Cambridge (MA).

[43] **KLEIN J.C.** (1976) : Conception et réalisation d'une unité logique pour l'analyse quantitative d'images. Thèse de docteur-ingénieur, Université de Nancy, France.

[44] **KLEIN J.C., COLLANGE F., BILODEAU M.** (1989) : A bit plane architecture for an image analysis processor implemented with PLCA gate array. First European Congress on Computer Vision, Antibes, 23-27 Avril 1990.

[45] **KLEIN J.C., PEYRARD R.** (1989) : PIMM1, An image processing ASIC based on Mathematical Morphology, IEEE's ASIC seminar and exhibit, Sept. 25-28, 1989, Rochester, NY.

[46] **KURDY B.M.** (1987) : Algorithme de détection des anneaux dans un composite, Note interne CMM n° N-45/87/MM, Fontainebleau, Juin 87.

[47] **LANTUEJOUL C.** (1978) : La squelettisation et son application aux mesures topologiques de mosaïques polycristallines. Thèse de docteur-ingénieur, Ecole des Mines de Paris.

[48] **LANTUEJOUL C.** (1979) : Détection de bulles sur un cliché micrographique par élimination des halos de diffraction qui les grossissent, Note interne N-588, CMM, Fontainebleau, France.

[49] **LANTUEJOUL C., BEUCHER S.** (1979) : Geodesic distance and image analysis, 5th Internat. Congress for Stereology. Salzburg, Autriche, 3-8 Sept. 79. Mikroskopie 37 (1980), pp. 138-142.

[50] **LANTUEJOUL C., BEUCHER S.** (1979) : On the importance of the field in

image analysis, Note interne C.M.M. N-608, Fontainebleau, Juillet 79.

[51] **LANTUEJOUL C., BEUCHER S.** (1979) : On the use of the geodesic metric in image analysis, note interne CGMM n° N-638, Fontainebleau, Déc. 79, J. of Microscopy, Vol. 121, Pt 1, Janv. 81.

[52] **LANTUEJOUL C., MAISONNEUVE F.** (1984) : Geodesic methods in image analysis, Pattern Recognition, 17, 117-187.

[53] **LAROCHE S.** (1988) : Classification des populations bactériennes dans le yaourt pendant la fermentation, note interne CMM n° N-10/88/MM. Fontainebleau, Mai 1988.

[54] **LAY B.** (1984) : Descriptors of the programs of the software package MORPHOLOG, Ecole des Mines, Paris.

[55] **LEE J.S.J., HARALICK R.M., SHAPIRO L.G.** (1986) : Morphologic Edge detection. Proc. 8th Internat. Conf. Pattern Recognition, pp. 369-373.

[56] **LOUVION J.M.** (1980) : Détection du contour de lèvres et extraction de paramètres constitutifs. Application à l'analyse automatique de labio-films, Thèse de Doctorat de 3ème cycle, Université de Renne I, Déc. 1980.

[57] **MAISONNEUVE F.** (1982) : Sur le partage des eaux, Note interne C.M.M., Fontainebleau, Déc. 82.

[58] **MARAGOS P.A., SCHAFFER R.W.** (1986) : Morphological skeleton representation on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. ASSP-34, n° 5, Oct. 86.

[59] **MARR D.** (1982) : Vision, N.H. Freeman & Co, San Francisco, 1982.

[60] **MATHERON G.** (1967) : Eléments pour une théorie des milieux poreux, Masson, Paris.

[61] **MATHERON G.** (1978) : Quelques propriétés topologiques du squelette. Rapport interne, Centre de Morphologie Mathématique, Fontainebleau.

[62] **MATHERON G.** (1983) : Filters and lattices, note interne CGMM n° N-851, Fontainebleau, Sept. 83.

[63] **MEYER F.** (1978) : Mathematical morphology used for quantitative cytology, note interne CGMM n° N-574, Fontainebleau, Sept. 78.

[64] **MEYER F.** (1979) : Cytologie quantitative et Morphologie Mathématique. Thèse Docteur-Ingénieur, Ecole des Mines de Paris, Mai 1979.

[65] **MEYER F.** (1979) : Quantitative analysis of the chromatin of lymphocytes. An essay on comparative structuralism, Leitz Symposium on Quantitative Morphometry and Image Analysis, Wetzlar, RFA, 24-28 Sept. 79.

[66] **MEYER F.** (1987) : Algorithmes séquentiels. Onzième colloque GRETSI, Nice, France, 1-5 Juin 87.

[67] **MEYER F.** (1988) : Skeletons and perceptual graphs, Note interne C.M.M. n° N-13/88/MM, Fontainebleau, Juil. 88.

[68] **MEYER F.** (1989) : Algorithmes ordonnés de ligne de partage des eaux, Note interne C.M.M. n° N-26/89/MM, Fontainebleau, Déc. 89.

[69] **MEYER F., BEUCHER S.** (1990) : Morphological segmentation, note CMM n° N-11/90/MM, à paraître dans Journal of Visual Communication and Image Representation.

[70] **MONGA O.** (1988) : Segmentation d'images par croissance hiérarchique de régions, Thèse de Doctorat, Université de Paris-Sud, 1988.

[71] **O'FARREL P.H.** (1975) : High resolution two-dimensional electrophoresis of proteins, J. Biol. Chem., 250, 4007-4021, 1975.

[72] **PUECKER T.H., DOUGLAS D.H.** (1975) : Detection of surface - specific points by local parallel processing of discrete terrain elevation data. Computer Graphics and Image Processing, 4, 1975, 375-387.

[73] **PRETEUX F.** (1984) : Segmentation automatique du corps vertébral à

partir d'images scannographiques, note interne CMM n° N-931, Fontainebleau, Oct. 84.

[74] **RIVEST J.F., BEUCHER S., DELHOMME J.P.** (1989) : Marker controlled picture segmentation applied to electrical logging images, note interne CMM n° N-22/89/MM, Fontainebleau.

[75] **RONSE C.** (1989) : Fourier analysis, mathematical morphology and vision, WD 54, Philips Research Laboratory, Brussels, Belgium, June 1989.

[76] **ROSENFELD A.** (editor) (1984) : Multiresolution Image processing and Analysis, New-York : Springer Verlag, 1984.

[77] **ROSENFELD A., PFALTZ J.L.** (1966) : Sequential operations in digital picture processing, J. of the Assoc. for Computer Machinery (ACM), 13-14, 471.

[78] **SCHWARTZ L.** (1965) : Méthodes mathématiques pour les sciences physiques, HERMANN, Paris.

[79] **SERRA J.** (1975) : Morphologie pour les fonctions "à peu près en tout ou rien", note interne C.M.M., Fontainebleau, France.

[80] **SERRA J.** (1982) : Image Analysis and Mathematical Morphology, Academic Press, London.

[81] **SERRA J.** (1982) : Les filtres morphologiques, note interne CGMM N° N-744, Fontainebleau, Sept. 82.

[82] **SERRA J.** (1986) : Eléments de théorie pour l'optique morphologique. Thèse de Doctorat ès Sciences, Université Paris VI.

[83] **SERRA J.** (1987) : Morphologie Mathématique, Tome II, Cours de l'Ecole des Mines de Paris, Déc. 87.

[84] **SERRA J.** (editor) (1988) : Image Analysis and Mathematical Morphology - Theoretical advances, Academic Press, London.

[85] **SOILLE P., ANSOULT M.** (1989) : Automated basin delineation from dems using mathematical morphology, Signal Processing (à paraître).

[86] **SOILLE P., VINCENT L.** (1990) : Watersheds in digital spaces : an efficient algorithm based on immersion simulations, Note interne C.M.M. n° N-5/90/MM, Fontainebleau.

[87] **STERNBERG S.R.** (1986) : Morphology for grey-tone functions, Comput. Vision Graphics Image Process., 35.

[88] **VAN VLIET L.J., YOUNG I.T., BECKERS G.L.** (1989) : A non linear Laplace operator as edge detector in noisy images. Computer Vision, Graphics, & Image Processing, Vol. 45, n° 2, pp. 167-195, Feb. 1989.

[89] **VINCENT L.** (1989) : Graphs and Mathematical Morphology, Signal Processing, Vol. 16, N° 4, April 89, pp. 365-388.

INDEX

LISTE DES ILLUSTRATIONS

Avertissement

La liste ci-dessous indique la provenance des diverses illustrations utilisées.

Figure I-14 : S. BEUCHER
Figure II-1 : S. BEUCHER
Figure II-6 : SCHLUMBERGER/CMM
Figure II-7 : CAMBRIDGE INST. Ltd
Figure II-10 : CMM
Figure II-11 : CMM
Figure III-18 : IRSID
Figure III-21 : SCHLUMBERGER/CMM
Figure III-22 : INRETS/CMM
Figure III-25 : INRETS/CMM
Figure IV-13 : S. BEUCHER
Figure IV-17 : INRA/CMM
Figure IV-19 : CMM
Figure V-9 : MUSEE DU LOUVRE/CMM
Figure VI-1 : CMM
Figure VI-3 : CMM
Figure VI-4 : CMM
Figure VI-5 : INRA/CMM
Figure VI-6 : CMM
Figure VI-7 : CMM
Figure VI-12 : CMM
Figure VI-14 : CMM
Figure VI-16 : MSII/CMM
Figure VI-17 : IMFL
Figure VI-18 : CMM
Figure VI-19 : CMM

Figure VI-21 : CMM
Figure VI-25 : CMM
Figure VI-28 : INRETS/CMM
Figure VI-31 : CMM
Figure VII-2 : S. BEUCHER
Figure VII-7 : S. BEUCHER
Figure VII-11 : ETBS/CMM
Figure VII-13 : PSA
Figure VII-17 : RENAULT
Figure VII-19 : PSA/CMM
Figure VII-21 : PSA/CMM
Figure VII-27 : IRSID
Figure VII-30 : CMM
Figure VII-37 : CMM
Figure VII-42 : CMM
Figure VII-44 : CMM

Figure VI-24 : CMM
Figure VI-27 : INRETS
Figure VI-30 : CMM
Figure VI-32 : CMM
Figure VII-4 : S. BEUCHER
Figure VII-9 : ETBS
Figure VII-12 : ETBS/CMM
Figure VII-16 : CMM
Figure VII-18 : CMM
Figure VII-20 : PSA/CMM
Figure VII-26 : CAMBRIDGE INSTR. Ltd
Figure VII-29 : CMM
Figure VII-34 : CMM
Figure VII-40 : CMM
Figure VII-43 : CMM
Figure VII-46 : CMM