

**SEGMENTATION D'IMAGE
&
MORPHOLOGIE
MATHÉMATIQUE**

Cours du Master OIV, St Etienne

Serge BEUCHER

CMM
Mines ParisTech
Février 2014

REMARQUES PRELIMINAIRES



- Il n'y a pas de définition générale de la segmentation d'image
- L'approche morphologique de la segmentation est pragmatique
- Néanmoins, cette approche propose une méthodologie de la segmentation, un « guide d'utilisation » des outils de la segmentation
- Il est important de garder à l'esprit les diverses propriétés de ces outils pour éviter quelques pièges. Leur implantation doit être aussi précise que possible pour garantir des résultats de qualité

SOMMAIRE

- **Introduction rapide de ce cours...**

[Présentation de la Ligne de Partage des Eaux](#)

- **Rappels de morphologie mathématique**
- **Géodésie, opérateurs géodésiques, reconstruction**
- **Introduction à la segmentation d'image (LPE)**
- **Opérateurs résiduels, opérateurs résiduels homotopiques**
- **Usage en segmentation, segmentation avancée, exemples d'applications**
- **Segmentation hiérarchique, nouveaux outils**

RAPPELS DE MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

RAPPELS DE MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

La morphologie mathématique, c'est :

- **Une méthodologie de traitement d'images basée sur des concepts ensemblistes**
- **Des briques de base (opérateurs élémentaires)**
- **Un assemblage des opérateurs produisant des opérateurs de plus en plus complexes**
- **Un contexte mathématique varié**
- **Un ensemble d'outils d'analyse d'images applicables dans de nombreux domaines**
- **Des bibliothèques de traitement d'images réunissant ces deux fonctionnalités (boîte à outils et mode d'emploi) de la MM**

OUTILS LOGICIELS

Différentes bibliothèques logicielles existent pour pratiquer les outils morphologiques.

Bibliothèque recommandée: MAMBA 
<http://www.mamba-image.org>

MAMBA est une bibliothèque multi-plateformes (Linux, Windows) distribuée sous licence libre X11 (MIT)

Elle a été développée par Nicolas BEUCHER en collaboration avec le CMM.

MAMBA est la suite (libre) du logiciel Micromorph.

Elle est écrite en C et tourne sous Python.

LES BRIQUES ELEMENTAIRES

Les objets d'étude sont les ensembles $X \subseteq E$. La morphologie mathématique les décrit en associant à tout $x \in E$ un ensemble test B muni d'une origine et appelé élément structurant.

Deux types d'événements peuvent être testés lorsque l'élément structurant B balaie l'espace E :

- L'élément structurant B coupe-t-il l'ensemble X ?

 DILATATION

- L'élément structurant B est-il inclus dans l'ensemble X ?

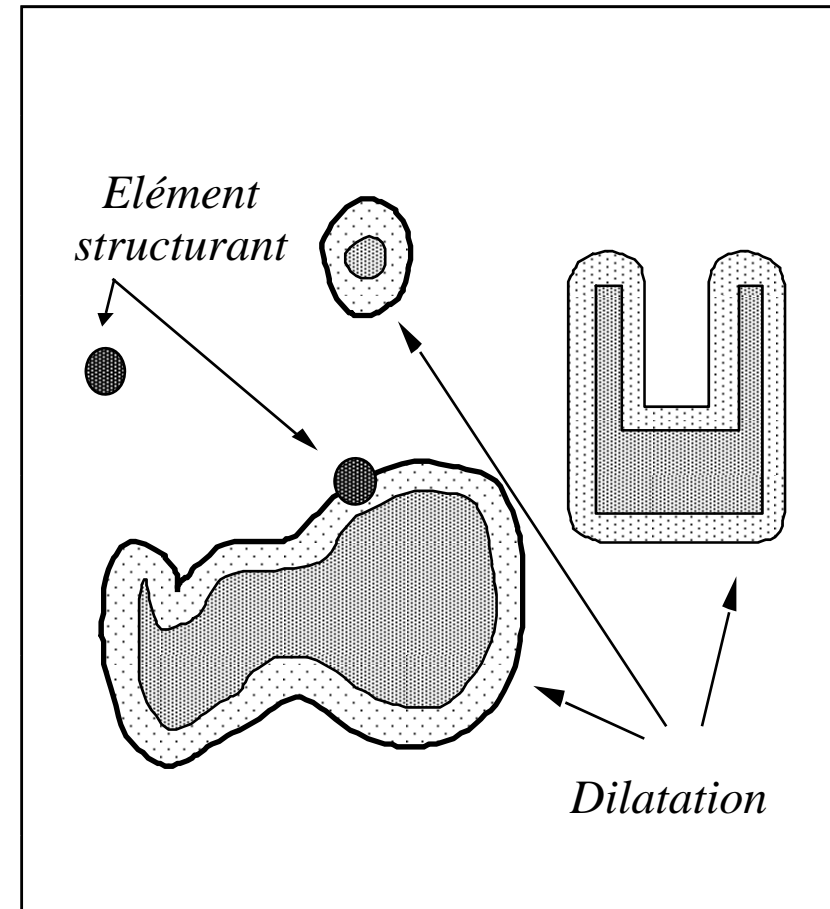
 EROSION

LA DILATATION

Le dilaté de X par B est le lieu des implantations de l'origine z de l'élément structurant B_z quand celui-ci rencontre X :

$$\delta_B(X) = \{ z: B_z \cap X \neq \emptyset \}$$

Le dilaté de X par B est également noté $X \oplus B$ (addition de Minkowski de X par le transposé de B)



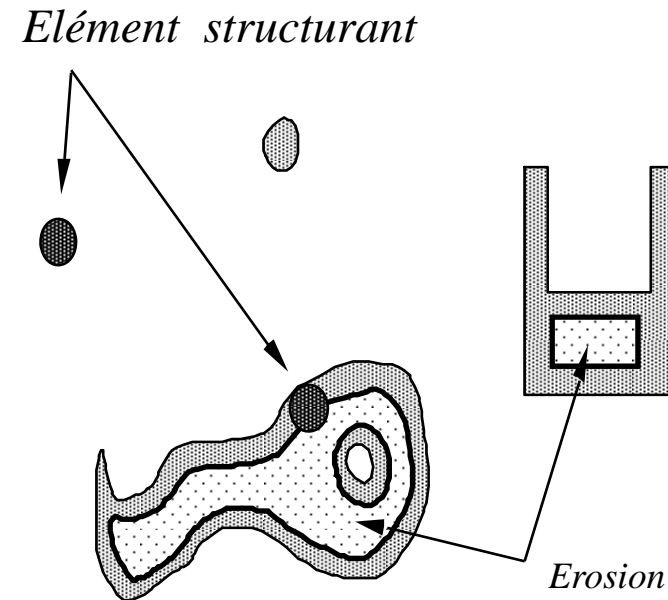
L'ÉROSION

L'érosion de X par B est le lieu des positions de l'origine z de l'élément structurant B_z quand celui-ci est inclus dans X :

$$\varepsilon_B(X) = \{ z : B_z \subset X \}$$

On écrit parfois l'érosion sous la forme $X \ominus B$, soustraction de Minkowski de X par le transposé de B

Erosion et dilatation sont deux transformations duales.

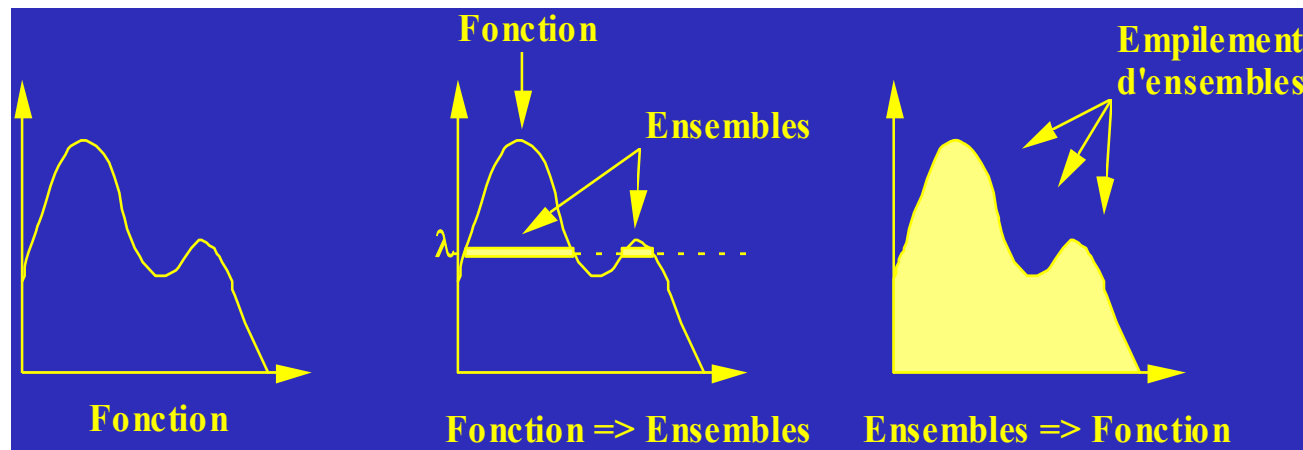


EXTENSION AUX FONCTIONS

Toute fonction numérique f sur un ensemble E peut être considérée de manière équivalente comme une pile d'ensembles décroissants. Chaque ensemble est la section du sous-graphe de f par le plan de cote λ :

$$X_f(\lambda) = \{ x \in E, f(x) \geq \lambda \} \Leftrightarrow f(x) = \sup \{ \lambda : x \in X_f(\lambda) \}$$

Pour toute fonction f , on a : $\lambda \geq \mu \Rightarrow X_f(\lambda) \subset X_f(\mu)$



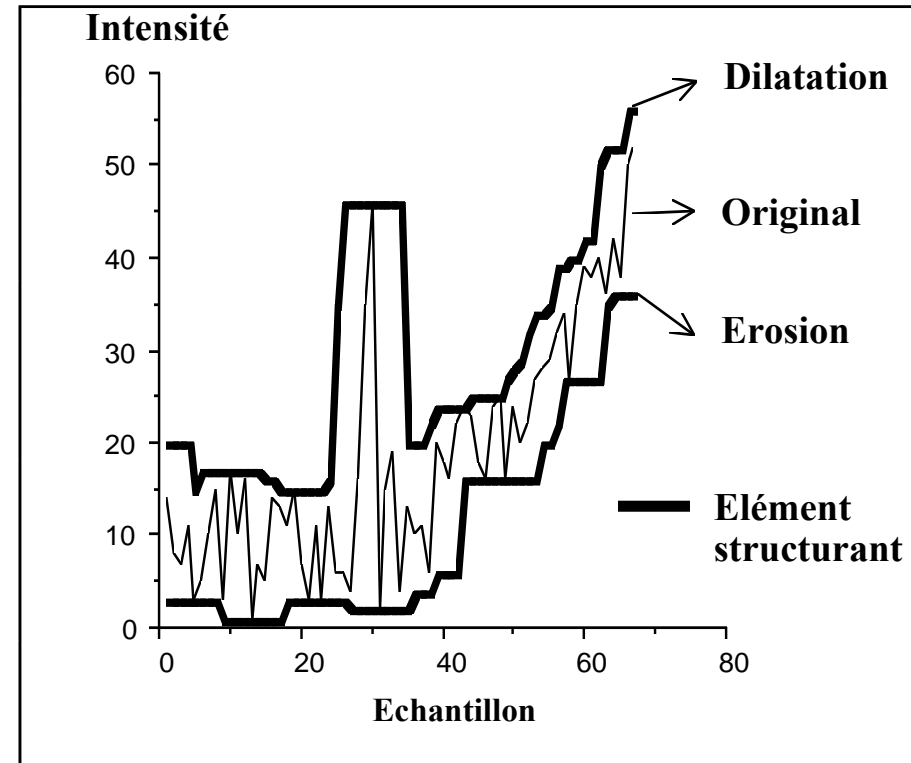
EROSION & DILATATION NUMERIQUES

En dilatant ou en érodant chaque section $X_f(\lambda)$ d'une fonction f par un même élément structurant B , on engendre sur f une dilatation ou une érosion, dite planaire.

Leurs expressions sont données par les formules suivantes:

$$\delta_B(f) = (f \oplus \overset{\vee}{B})(x) = \sup \{ f(y), y \in B_x \}$$

$$\varepsilon_B(f) = (f \ominus \overset{\vee}{B})(x) = \inf \{ f(y), y \in B_x \}$$



ELABORATION D'OPERATEURS COMPLEXES

De nombreux opérateurs complexes peuvent être construits par assemblage d'opérateurs de base et appliqués sur des images binaires, à niveaux de gris, couleur, en 2D, 3D, 4D, sur des images en mouvement:

- **Ouvertures, fermetures, filtres**
- **Transformations en « Tout-ou-Rien » (HMT), épaissements, amincissements, squelettes**
- **Opérateurs de contraste**
- **Opérateurs résiduels**
- **Opérateurs de segmentation**
- **Etc.**

OUVERTURE, FERMETURE MORPHOLOGIQUE

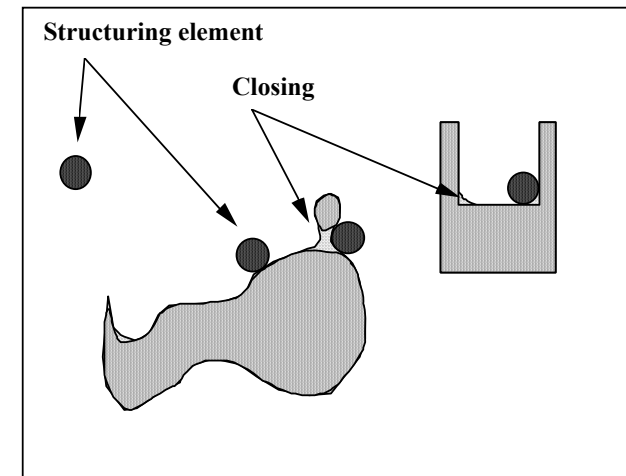
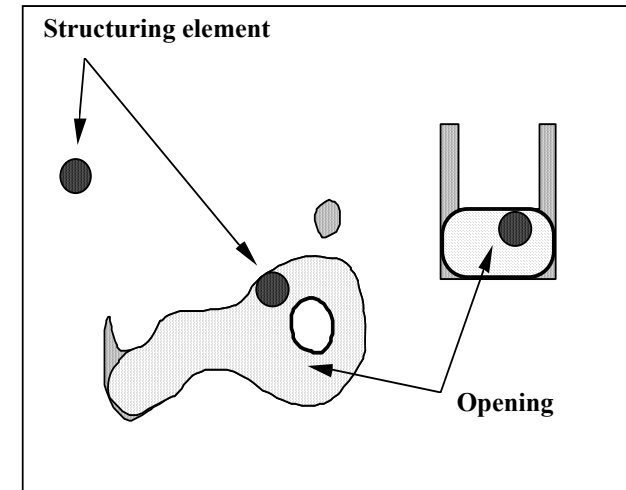
L'ouverture d'un ensemble X est le produit d'une érosion par une dilatation:

$$\gamma(X) = (X \ominus B) \oplus \overset{v}{B}$$

L'élément structurant transposé doit être utilisé pour la dilatation!

La fermeture est la concaténation d'une dilatation suivie d'une érosion:

$$\varphi(X) = (X \oplus B) \ominus \overset{v}{B}$$

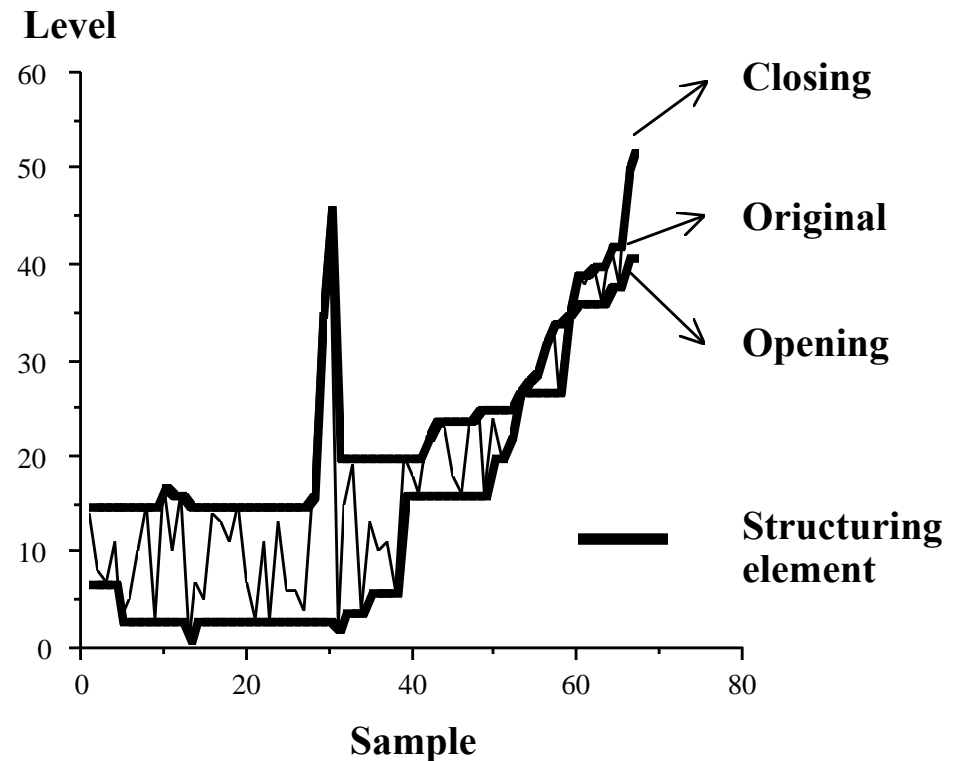


OUVERTURE, FERMETURE POUR LES FONCTIONS

Ces transformations s'étendent à des fonctions (images de gris) sans aucune difficulté :

$$\gamma(f) = (f \ominus B) \oplus \overset{\vee}{B}$$

$$\varphi(f) = (f \oplus B) \ominus \overset{\vee}{B}$$



PROPRIETES DES TRANSFORMATIONS

- **Croissance**

$$X \subset Y \Rightarrow \psi(X) \subset \psi(Y)$$

- **Extensivité/anti-extensivité**

$$X \subset \psi(X)$$

$$\psi(X) \subset X$$

- **Idempotence**

$$\psi(\psi(X)) = \psi \circ \psi(X) = \psi(X)$$

OUVERTURE, FERMETURE ALGEBRIQUES

Définition :

En algèbre, toute transformation qui est :

- **croissante, anti-extensive et idempotente est une ouverture (algébrique).**
- **croissante, extensive et idempotente est une fermeture (algébrique).**

Les ouvertures/fermetures morphologiques sont aussi des ouvertures/fermetures algébriques.

Il existe diverses façons de créer des ouvertures/fermetures algébriques (sup d'ouvertures, inf de fermetures et surtout reconstructions géodésiques).

FILTRES MORPHOLOGIQUES

Définition générale

Toute transformation croissante et idempotente définit un filtre morphologique

- **Croissance**

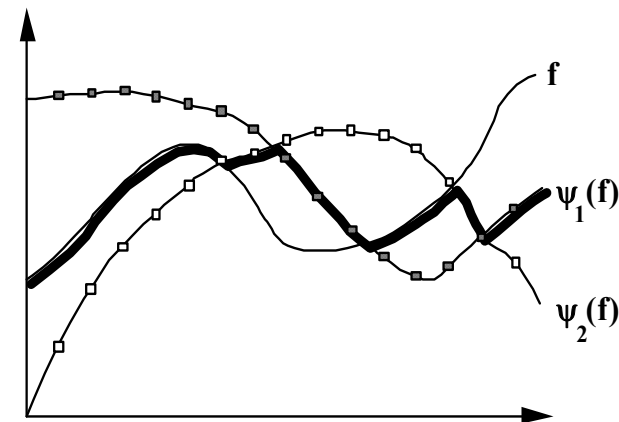
$$X \subset Y \Rightarrow \psi(X) \subset \psi(Y)$$

- **Idempotence**

$$\psi(\psi(X)) = \psi \circ \psi(X) = \psi(X)$$

EXEMPLES DE FILTRES

- Les ouvertures et les fermetures morphologiques sont des filtres.
- Un filtre peut être défini par composition de filtres:
 - ✓ Composition en série:
 - Produits $\zeta\psi$, $\zeta\psi\zeta$
 - Filtres alternés séquentiels (alternance d'ouvertures et de fermetures de taille croissante)
 - ✓ Composition en parallèle:
 - Centre
 - Contraste



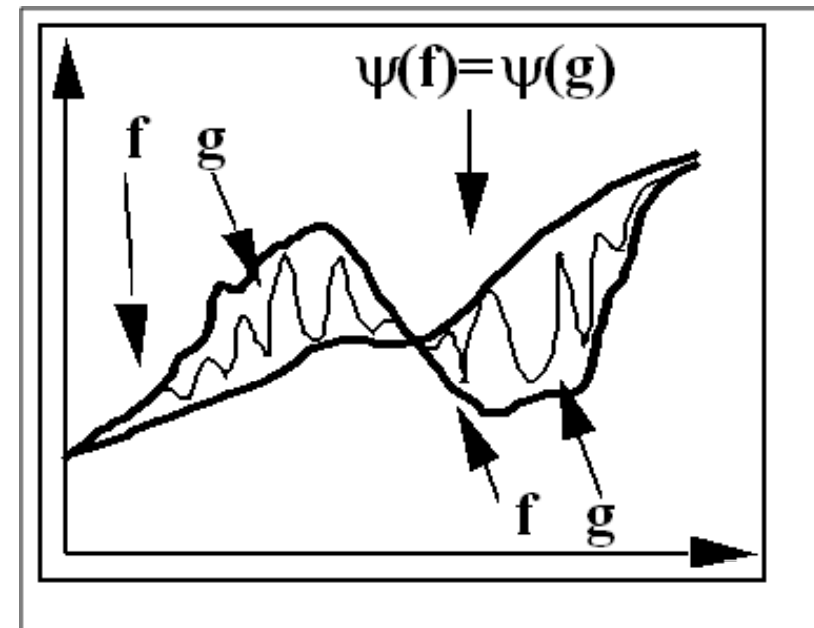
PROPRIETES DES FILTRES

Certains filtres ont de bonnes propriétés : ce sont des sup-filtres ou des inf-filtres.

Le filtre ψ est un \vee - filtre si $\psi = \psi(I \vee \psi)$
un \wedge - filter if $\psi = \psi(I \wedge \psi)$

Un filtre qui est à la fois un sup-filtre et un inf-filtre est un filtre fort : $\psi = \psi(I \wedge \psi) = \psi(I \vee \psi)$

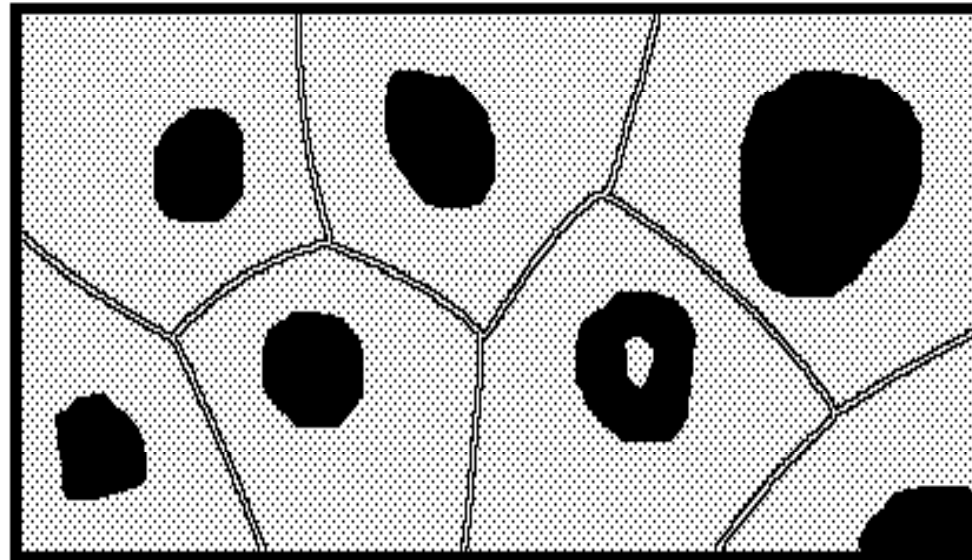
Les ouvertures et fermetures morphologiques sont des filtres forts.



ZONES D'INFLUENCE (SKIZ)

- X , ensemble formé de n composantes connexes $\{X_i\}$
- Zone d'influence $Z(X_i)$ de X_i : ensemble des points plus proches de X_i que de toute autre composante connexe de X :

$$z(X_i) = \left\{ x : \forall j \neq i, d(x, X_i) < d(x, X_j) \right\}$$



Le SKIZ peut être construit à l'aide d'épaississements

CONNEXITE, COMPOSANTES CONNEXES

Ensemble connexe

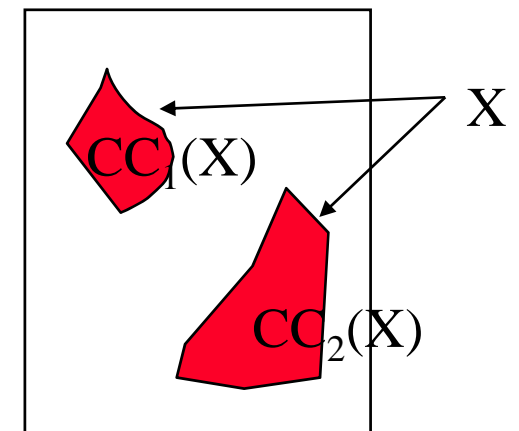
Un espace topologique X est connexe s'il n'est pas la réunion de deux ouverts non vides disjoints (ou de deux fermés non vides disjoints).

Ensemble connexe par arcs

Un ensemble X est connexe par arcs si et seulement si tout couple de points de X est relié par un chemin. Une partie Y de E est connexe par arcs si et seulement si tout couple de points de Y est relié par un chemin restant dans Y .

Composante connexe

La plus grande partie connexe d'un ensemble X contenant un point x s'appelle composante connexe C_x de x dans X . « être connecté » définit une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence sont appelées composantes connexes de X .



LES TRANSFORMATIONS GEODESIQUES

LES OPERATEURS GEODESIQUES

En MM, les éléments structurants peuvent être définis de différentes manières:

- **Par leur géométrie**
- **De façon explicite (liste de points)**
- **A l'aide d'une distance :**

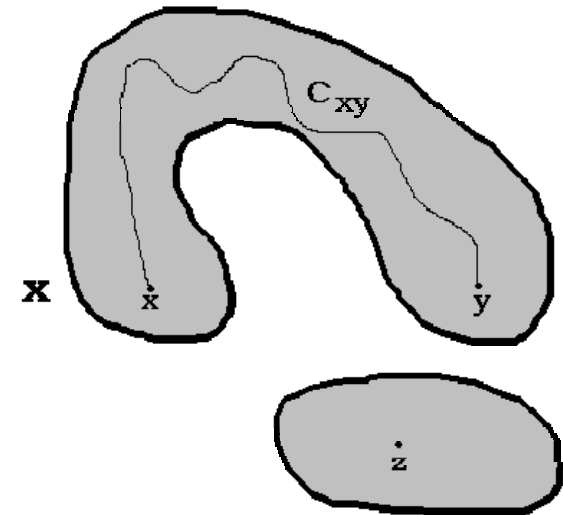
$$B_{\lambda}(z) = \{y, d(z,y) \leq \lambda\}$$

- Trivial lorsqu'on utilise la distance euclidienne**
- Beaucoup plus intéressant lorsqu'on utilise une distance non euclidienne (géodésique)**

NOTION DE CHEMIN

Définition

Si X est un espace topologique et si x et y sont deux points de X , on appelle chemin d'origine x et d'extrémité y toute application continue $\gamma [0,1] \rightarrow E$ telle que $\gamma(0)=x$ et $\gamma(1)=y$. On dit que x et y sont reliés si et seulement s'il existe un chemin d'origine x et d'extrémité y .



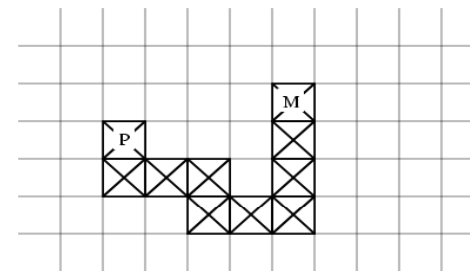
Chemin digital

X , image binaire, sous-ensemble de Z^2 , munie d'une relation de voisinage v (relation reflexive et symétrique).

Un chemin de longueur $k - 1$ est une séquence de k points tels que:

$$\forall i, \quad 1 \leq i \leq k - 1 \quad p_{i+1} v p_i$$

Exemple : chemin entre P et M en 4-connexité.



CHEMIN & DISTANCE GEODESIQUES

Si X est un espace topologique et si x et y sont deux points de X , on appelle chemin d'origine x et d'extrémité y toute application continue γ $[0,1] \rightarrow E$ telle que $\gamma(0)=x$ et $\gamma(1)=y$.

La distance géodésique $d_X: E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$, est définie dans l'espace géodésique X par:

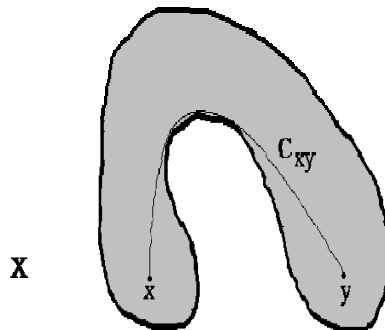
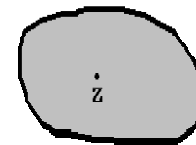
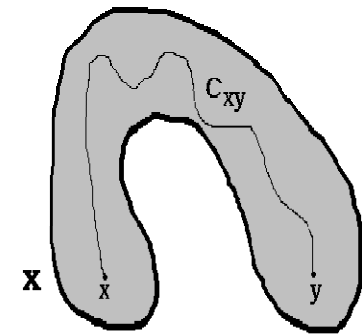
- $d_X(x,y) = \text{Inf. des longueurs des chemins d'extrémités } x \text{ et } y \text{ inclus dans } X$
- $d_X(x,y) = +\infty$, si aucun chemin n'existe

d_X est une distance:

$$d_X(x,y) = d_X(y,x)$$

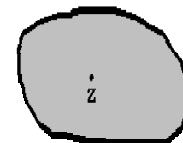
$$d_X(x,y) = 0 \iff x = y$$

$$d_X(x,z) \leq d_X(x,y) + d_X(y,z)$$



$$d(x,y) = l(C_{xy})$$

$$d(x,z) = +\infty$$

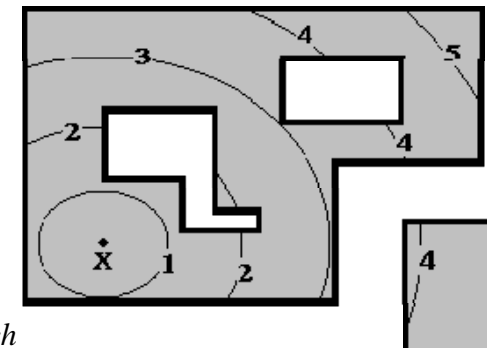
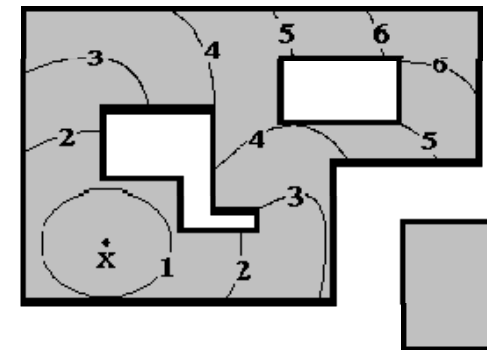
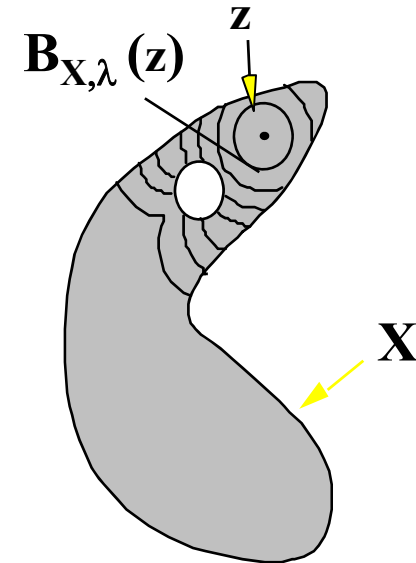


BOULES GEODESIQUES

- L'introduction d'une distance géodésique permet de définir la notion de boule géodésique:

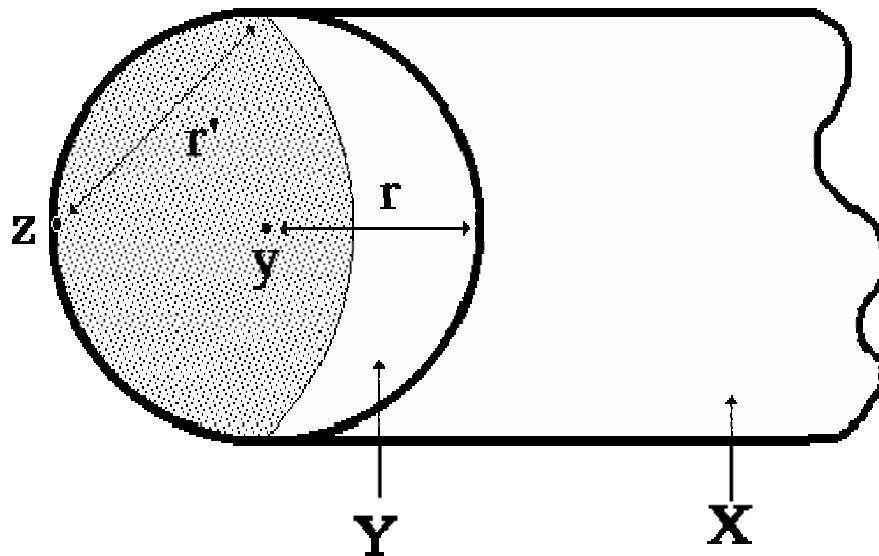
$$B_{X,\lambda}(z) = \{y, d_X(z,y) \leq \lambda\}$$

- Quand le rayon r augmente, la frontière des boules dessine un front de propagation dans le médium X .
- Pour un rayon λ donné, les boules $B_{X,\lambda}$ peuvent s'interpréter comme des éléments structurants dont la forme varie de place en place.



PARTICULARITÉS DES BOULES GÉODÉSIQUES

X, espace
géodésique



Attention!

Une boule géodésique $B_X(y, r)$ de rayon r et implantée au point y peut contenir une autre boule $B_X(z, r')$ de rayon r' et implantée en z même si $r' > r$.

DILATATION GEODESIQUE ENSEMBLISTE

La dilatation géodésique de taille λ de Y dans l'espace géodésique X est définie par:

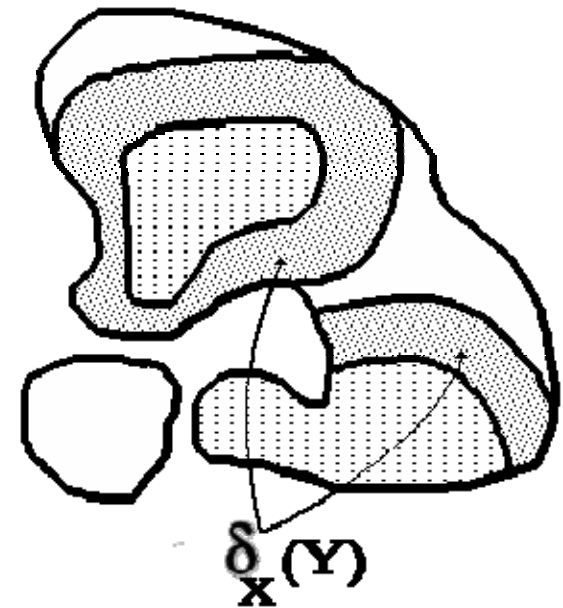
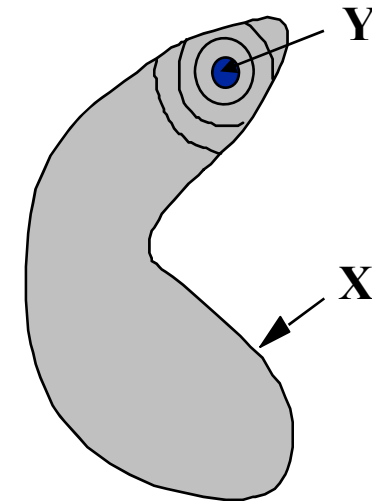
$$\delta_{X,\lambda}(Y) = \cup \{B_{X,\lambda}(y), y \in Y\}$$

$$\delta_{X,\lambda}(Y) = \{x \in X : B_{X,\lambda}(x) \cap Y \neq \emptyset\}$$

δ est croissante et extensive

δ est également croissante lorsqu'on la considère comme une transformation appliquée à l'espace géodésique X (Y fixé)

$$X \subset X' : \delta_X(Y) \subset \delta_{X'}(Y)$$



DILATATION GÉODÉSIQUE DIGITALE

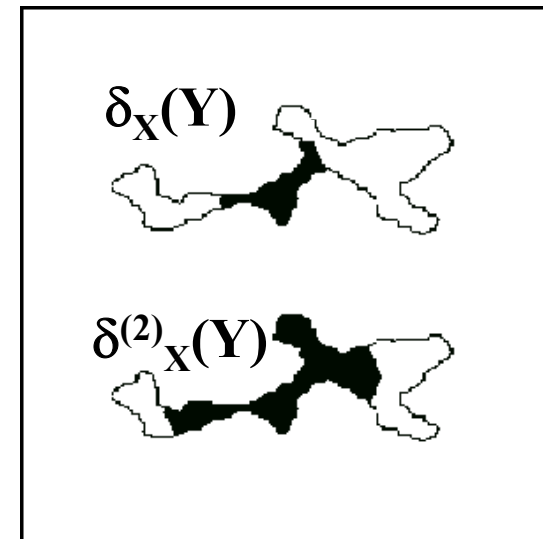
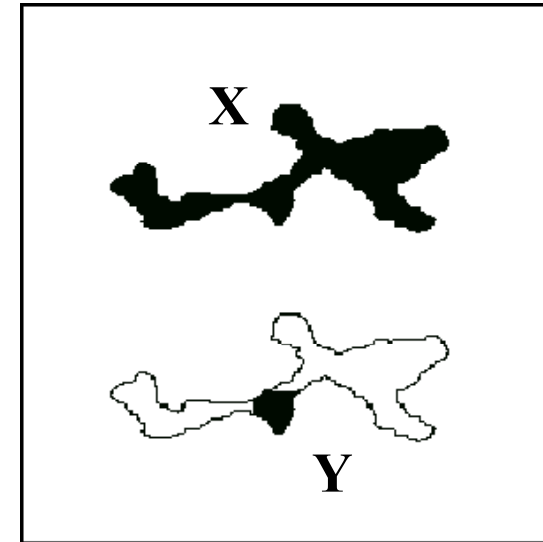
- Quand E est un espace métrique digital et quand $\delta(x)$ désigne la dilatation par une boule unitaire centrée au point x , alors la dilatation géodésique unitaire est définie par la relation:

$$\delta_X(Y) = \delta(Y) \cap X$$

- La dilatation de taille n s'obtient par itération:

$$\delta_{X,n}(Y) = \delta(\dots\delta(\delta(Y) \cap X) \cap X)\dots \cap X$$

- Notons que les dilatations géodésiques ne sont pas invariantes par translation.



EROSION GEODESIQUE

L'érosion géodésique est définie par:

$$\varepsilon_{X,\lambda}(Y) = \{y \in Y : B_{X,\lambda}(y) \subset Y\}$$

Elle peut se définir par dualité (par adjonction ou par complémentation).

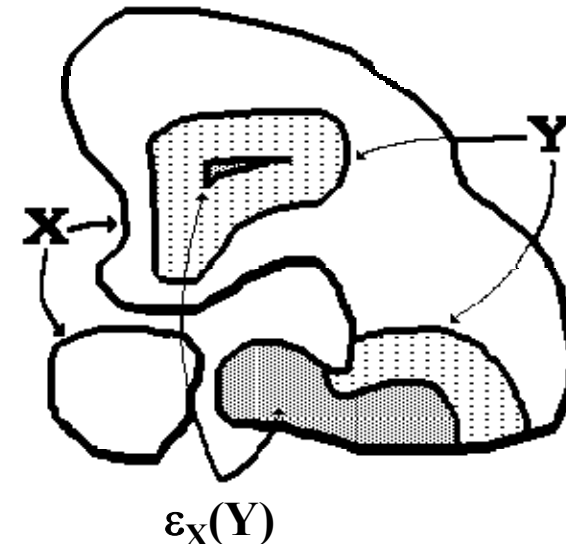
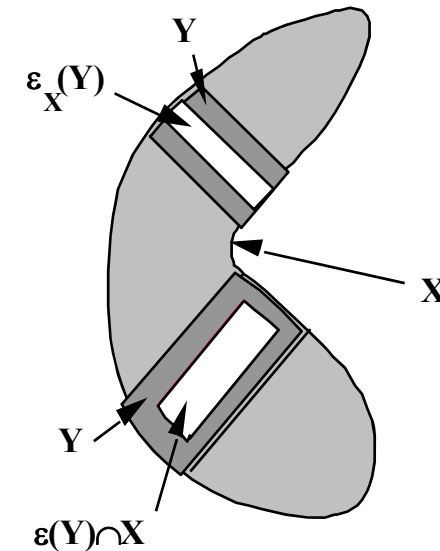
Le complément est défini par rapport à l'espace géodésique X ($Y \rightarrow X \setminus Y = X \cap Y^C$):

$$\varepsilon_X(Y) = X \setminus \delta_X(X \setminus Y)$$

L'érosion géodésique digitale élémentaire s'écrit alors:

$$\varepsilon_X(Y) = \varepsilon(X^c \cup Y) \cap X$$

ε est l'érosion euclidienne élémentaire.

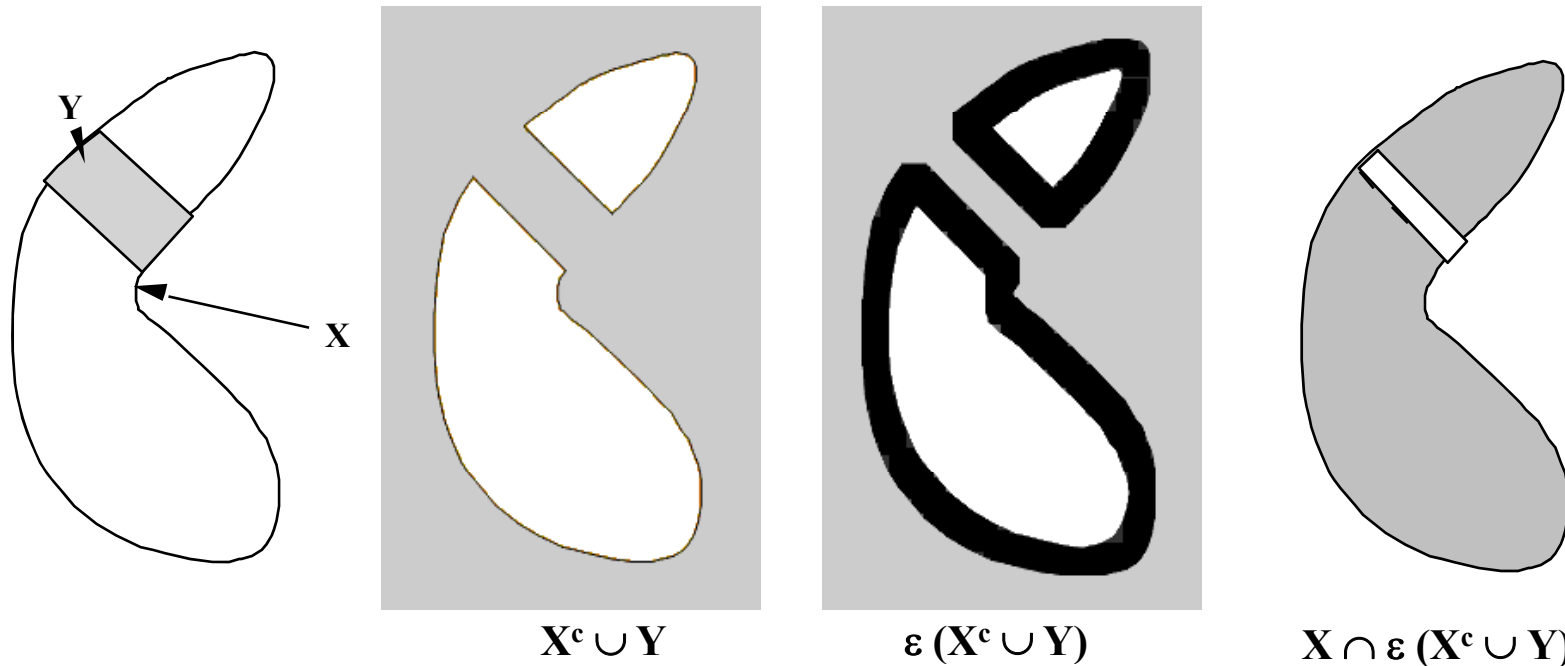


EROSION GÉODÉSIQUE, CONSTRUCTION

$$\varepsilon_X(Y) = X \setminus \delta_X (X \setminus Y) = X \cap \{\delta (X \cap Y^c) \cap X\}^c$$

$$\varepsilon_X(Y) = X \cap \{[\delta(X \cap Y^c)]^c \cup X^c\} = \{X \cap X^c\} \cup \{X \cap [\delta (X \cap Y^c)]^c\}$$

$$\varepsilon_X(Y) = X \cap \varepsilon (X^c \cup Y)$$

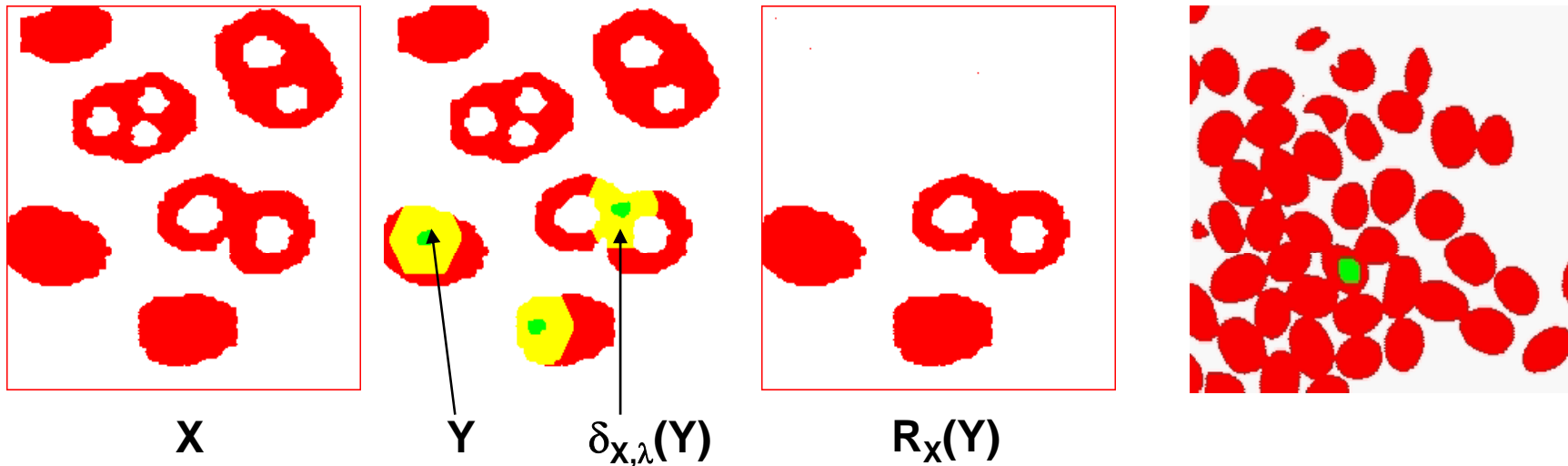


Cette formule n'est pas utilisée en pratique car elle nécessite le complémentaire X^c de l'espace géodésique, qui n'est pas toujours accessible (en particulier quand X est identique au champ d'analyse).

RECONSTRUCTION GEODESIQUE

Itération de dilatations géodésiques jusqu'à idempotence

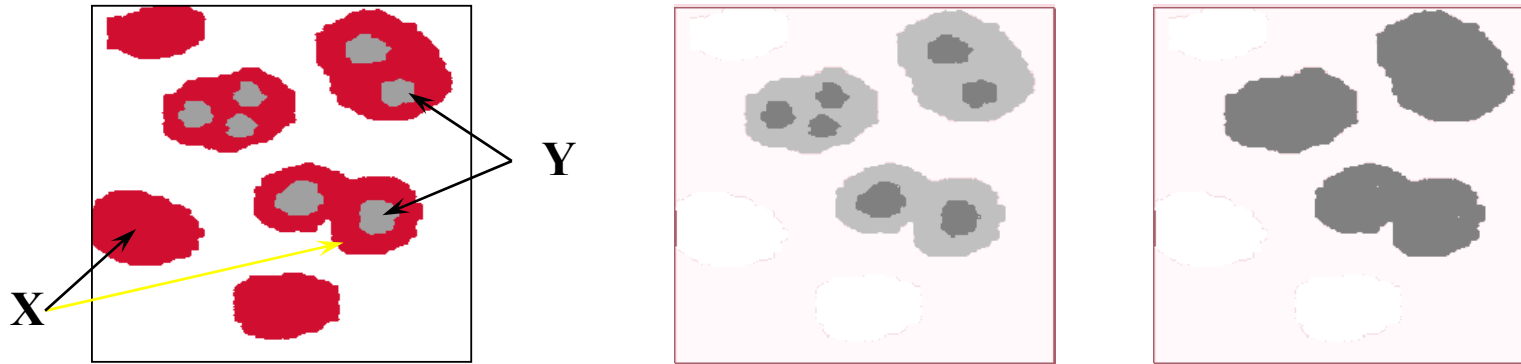
$$R_X(Y) = \delta_X^{+\infty}(Y) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \delta_{X,\lambda}(Y)$$



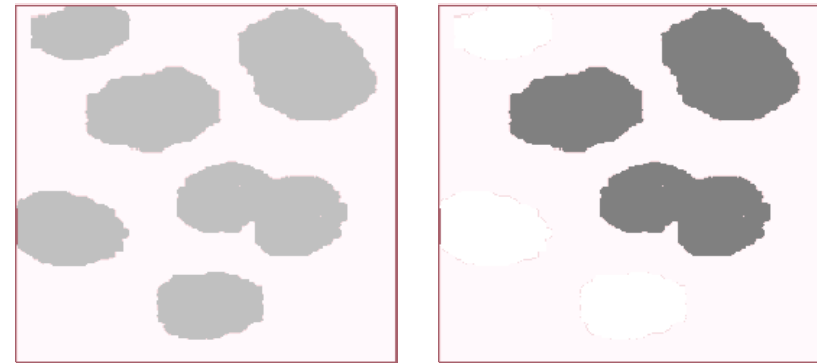
Cet opérateur permet la reconstruction de toutes les composantes connexes de X marquées par Y (reconstruction de X par Y).

RECONSTRUCTION ET OUVERTURE

- A X donné, la reconstruction géodésique de X par Y est une fermeture par rapport à Y .



- Mais si on considère cette reconstruction comme une opération sur l'ensemble X (variable), pour un Y fixé, alors cette transformation est une ouverture



USAGES DE LA RECONSTRUCTION

- **Si Y est un point isolé → ouverture ponctuelle, analyse individuelle de particules**
- **Si Y est une érosion (ou une ouverture) → Ouverture par reconstruction**
- **Si Y est l'intersection du bord de l'image avec X → Sélection des composantes connexes de X touchant le bord de l'image**
- **Si Y est l'intersection du bord de l'image avec le complémentaire de X → Reconstruction du fond**

ANALYSE INDIVIDUELLE DE PARTICULES

Algorithme

Tant que l'ensemble n'est pas vide

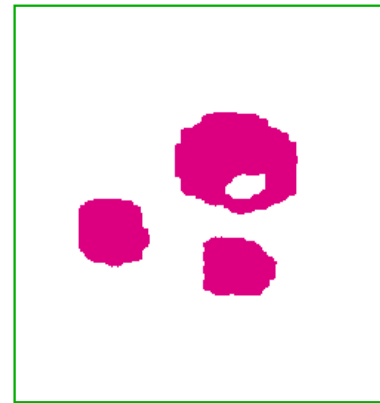
{ - extraire y , premier point de X (ordre de balayage vidéo ou autre);

- $Z = R_X(y)$ reconstruction de X par y ;

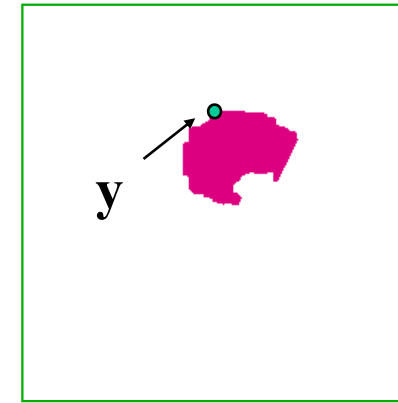
- Analyse de Z ;

- $X := X \setminus Y$ (différence)

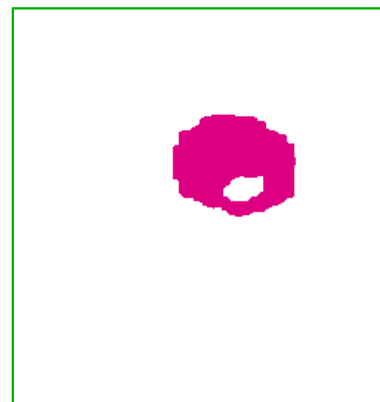
}



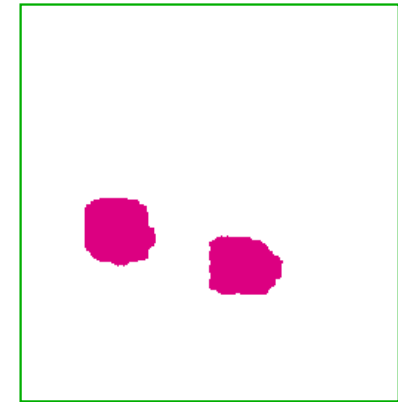
X



$\delta_{X,\lambda}(y)$



$R_X(y)$



$X := X \setminus Y$

FILTRE PAR ÉROSION-RECONSTRUCTION

- L'érosion $X \ominus B_\lambda$ supprime d'abord les composantes connexes de X de taille inférieure à λ (elles ne peuvent contenir un disque de taille λ)
- Puis l'ouverture $\gamma^{\text{Rec}}_X(Y) = R_X(Y)$ par l'ensemble marqueur $Y = X \ominus B_\lambda$ reconstruit les autres composantes connexes..

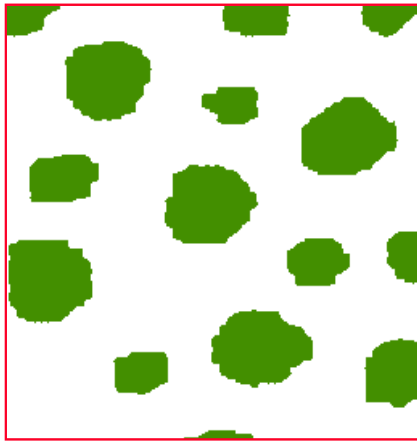
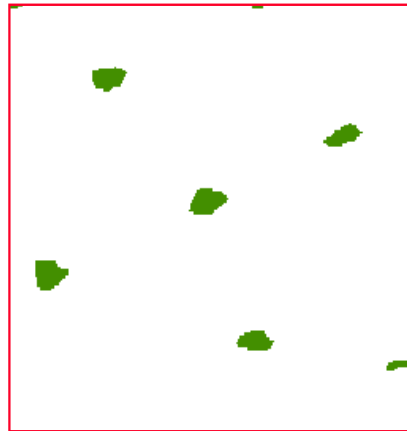
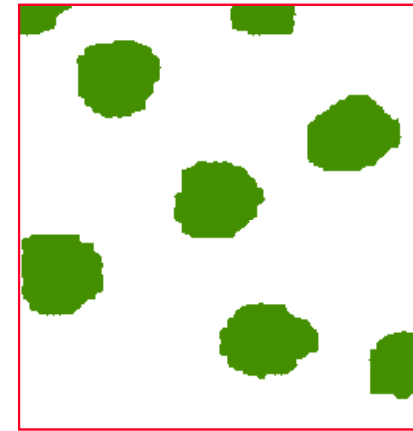


Image initiale



Erosion de X par un
disque de taille λ

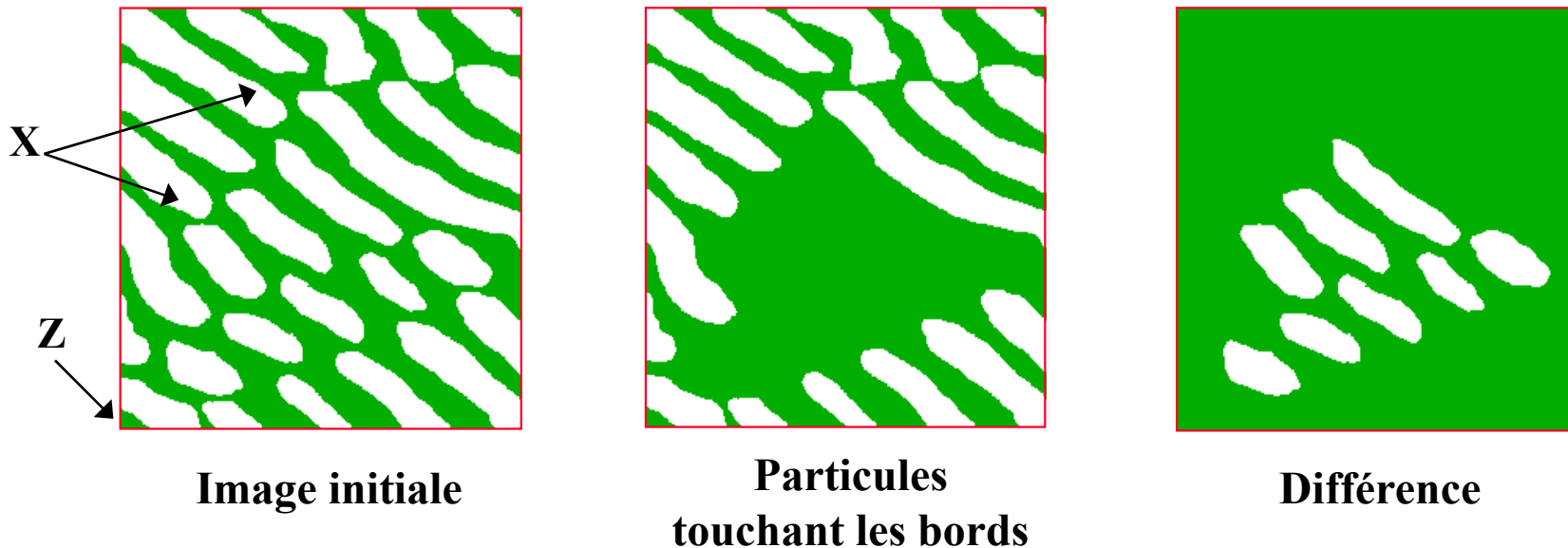


Reconstruction

L'opération est identique si $Y = \gamma_\lambda(X) = (X \ominus B_\lambda) \oplus B_\lambda$

PARTICULES AU BORD DU CHAMP

- Soit Z l'ensemble des bords de l'image et X les grains analysés
- L'ensemble Y est la reconstruction de X par $Z \cap X$
- La différence entre X et Y extrait les particules intérieures.



BOUCHAGE DE TROUS

- Soit Z l'ensemble des bords de l'image et X les grains analysés
- L'ensemble Y est la reconstruction de X par $Z \cap X^c$
- La complémentation de Y bouche les trous.

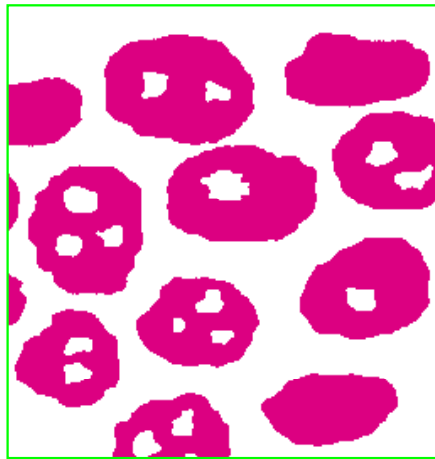


Image initiale X



Partie des bords
touchant X

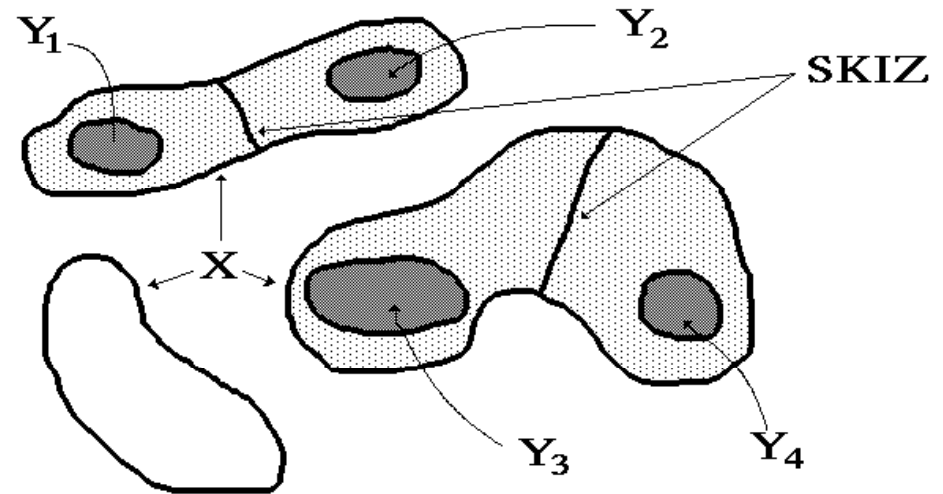


Y complémenté

Certaines particules coupant le bord du champ ne sont pas correctement bouchées... Suggestions d'amélioration?

SKIZ GEODESIQUE

Ensemble Y formé de composantes connexes et inclus dans un espace géodésique X



Zone d'influence d'une composante connexe: ensemble des points de X à une distance géodésique finie de la composante connexe et plus proche de celle-ci que de tout autre composante connexe:

$$Z_X(Y_i) = \left\{ \begin{array}{l} x \in X : d_X(x, Y_i) < +\infty \\ \text{et} \\ \forall j \neq i, d_X(x, Y_i) < d_X(x, Y_j) \end{array} \right\}$$

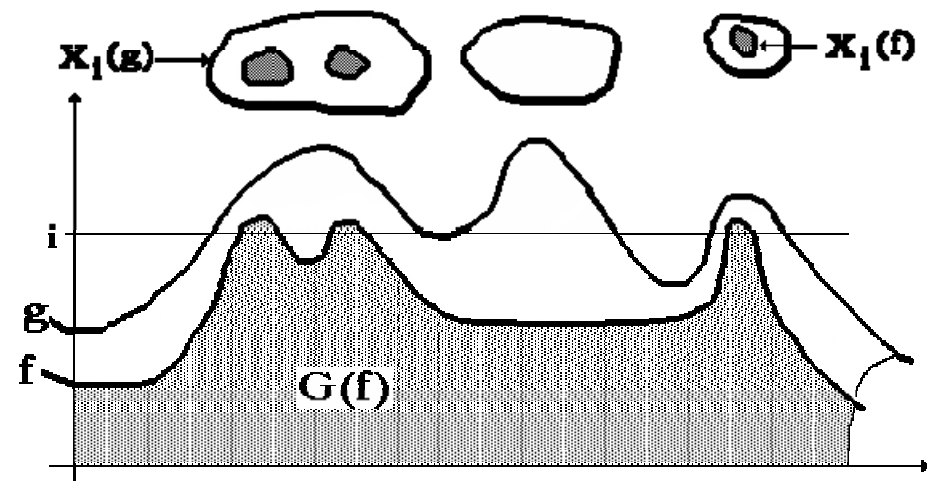
GEODESIE NUMERIQUE

Les transformations géodésiques ensemblistes peuvent être étendues aux fonctions numériques par le biais des sections des fonctions en appliquant à ces sections des opérateurs géodésiques ensemblistes et en construisant de nouvelles fonctions à partir des nouveaux ensembles obtenus

$$X_i(f) = \{x : f(x) \geq i\}$$

$$X_i(g) = \{x : g(x) \geq i\}$$

On peut aussi utiliser les fonctions numériques pour définir des distances géodésiques générales sur lesquelles on définit des opérateurs géodésiques généralisés



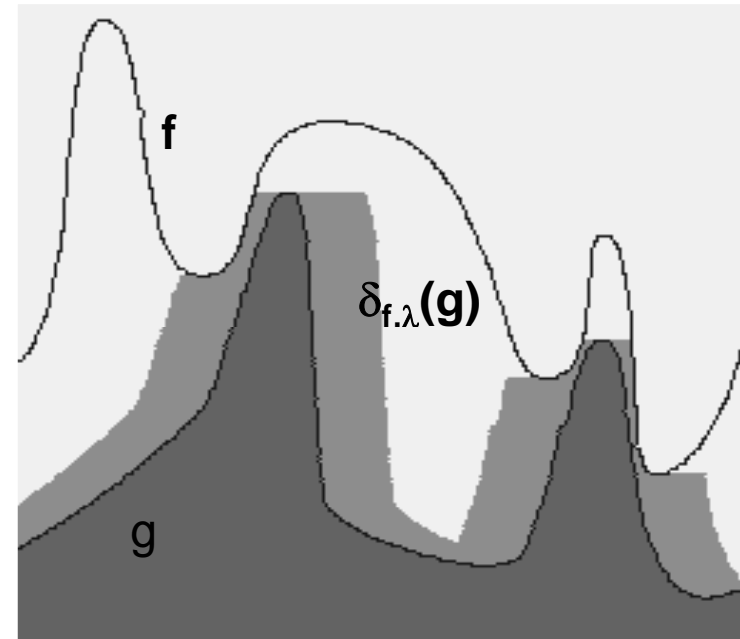
DILATATIONS GEODESIQUES NUMERIQUES

Soit f et g deux fonctions (images à teintes de gris), avec $g \leq f$.

Considérons les sections au niveau h de f et de g

La dilatation géodésique ensembliste de taille λ de chaque section au niveau h de g à l'intérieur de la section correspondante de f génère sur g une dilatation $\delta_{f,\lambda}(g)$.

Le sous-graphe de $\delta_{f,\lambda}(g)$ est l'ensemble des points du sous-graphe de f qui sont reliés à g par un chemin horizontal de longueur $\leq \lambda$.



La version digitale de cet opérateur utilise la dilatation géodésique élémentaire:

$$\delta_f(g) = \delta(g) \wedge f$$

itérée n fois:

$$\delta_{f,n}(g) = \delta_f(\delta_f \dots (\delta_f(g))).$$

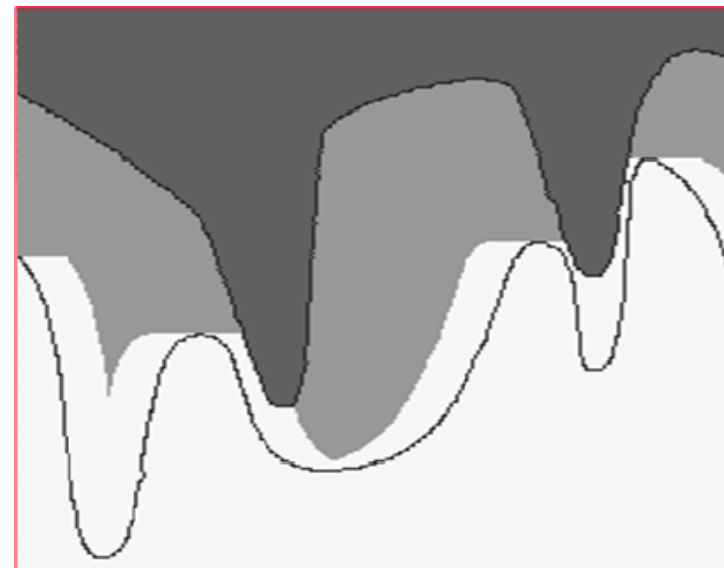
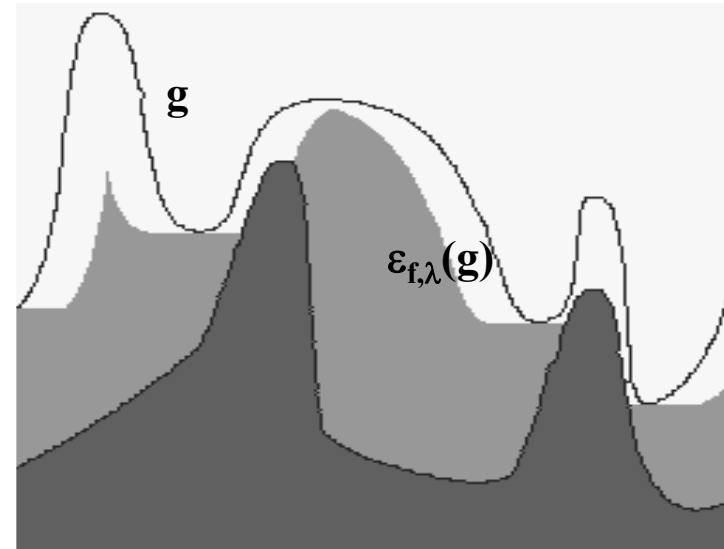
EROSIONS GEODESIQUES NUMERIQUES

L'érosion géodésique numérique de f par g , avec $g \geq f$ se déduit de la dilatation géodésique par la dualité engendrée par l'inversion autour d'une valeur pivot m :

$$\varepsilon_{f,\lambda}(g) = m - \delta_{m-f,\lambda}(m - g)$$

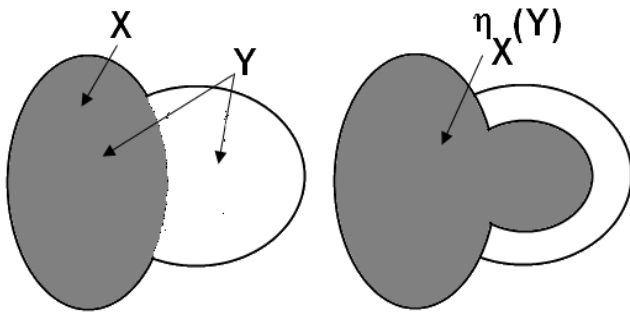
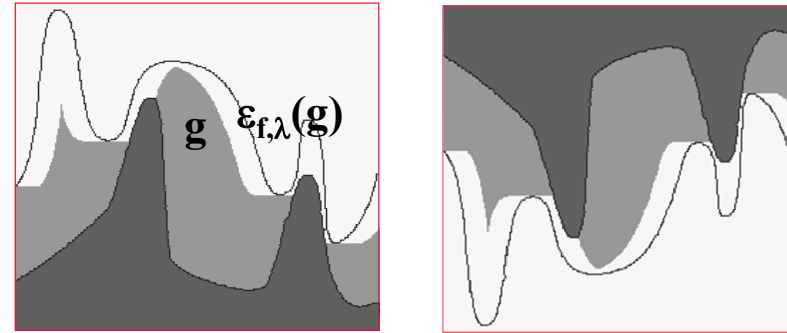
Le résultat est indépendant de la valeur pivot m

Cette dualité est différente de la dualité par complémentation (transformées ensemblistes)



DUALITÉS ET ÉROSIONS GÉODÉSQUES

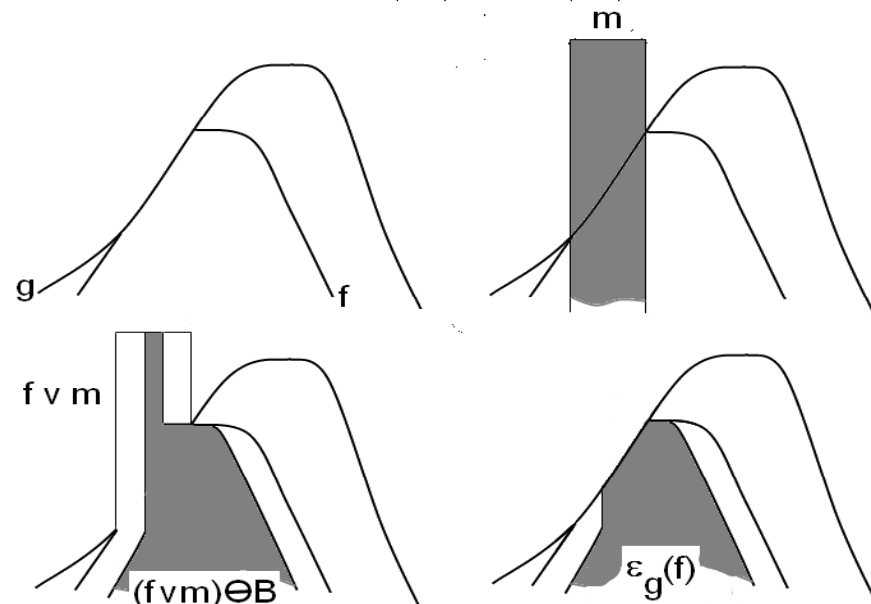
L'érosion géodésique numérique de f par g n'est pas équivalente à l'érosion ensembliste car on ne travaille pas sur le même espace géodésique dans le cas de l'érosion et de la dilatation (l'espace géodésique est également pivoté).



L'opérateur ensembliste élémentaire équivalent à l'érosion géodésique numérique s'obtient en effectuant une érosion de l'ensemble Y (avec $X \subset Y$) à l'extérieur de X :

$$\eta_X(Y) = \varepsilon(Y) \cup X$$

On peut définir une érosion géodésique numérique équivalente à l'érosion ensembliste. Il faut, pour cela introduire un masque m correspondant aux points x pour lesquels $f(x) = g(x)$.

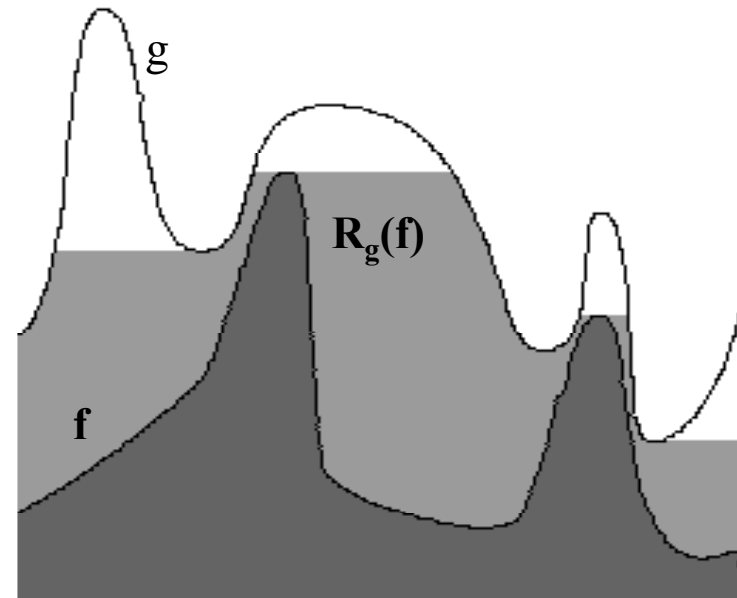


RECONSTRUCTION GEODESIQUE NUMERIQUE

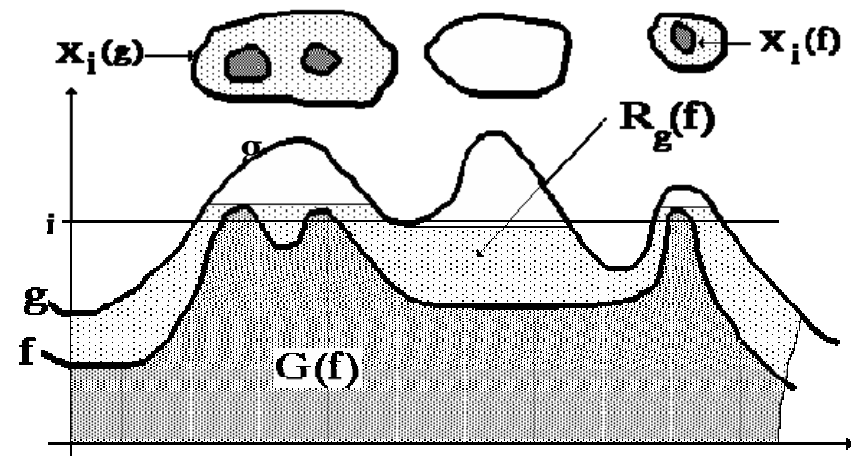
- La reconstruction géodésique de g à partir de f est le supremum des dilatations géodésiques de f à l'intérieur de g . On la note $R_g(f)$:

$$R_g(f) = \bigvee \{ \delta_{g,\lambda}(f), \lambda > 0 \}$$

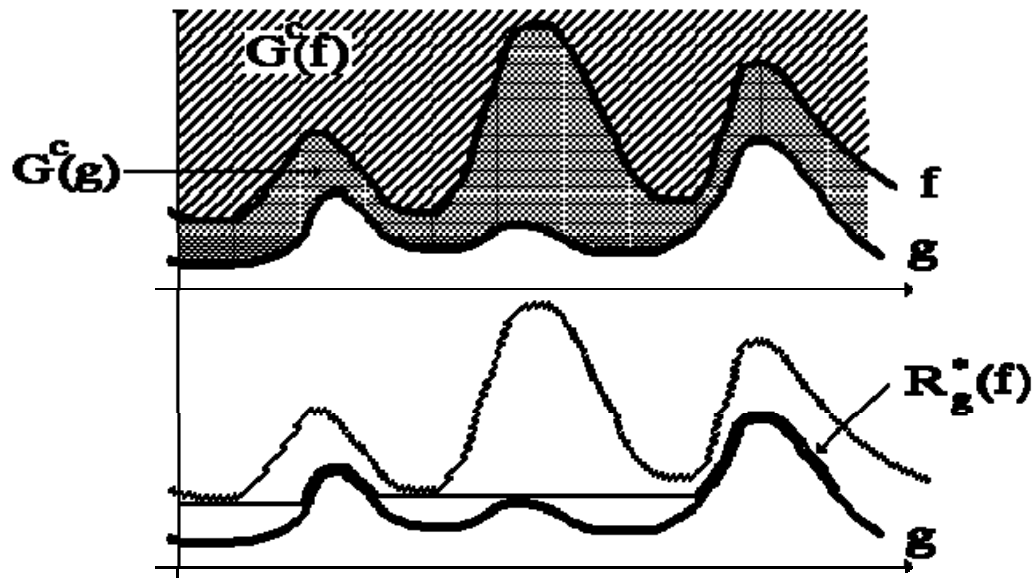
- Cette transformation et sa duale sont de très importantes machines-outils en morphologie mathématique.



Chaque section au niveau i de la reconstruction est égale à la reconstruction binaire des sections au même niveau de g par les sections correspondantes de f .



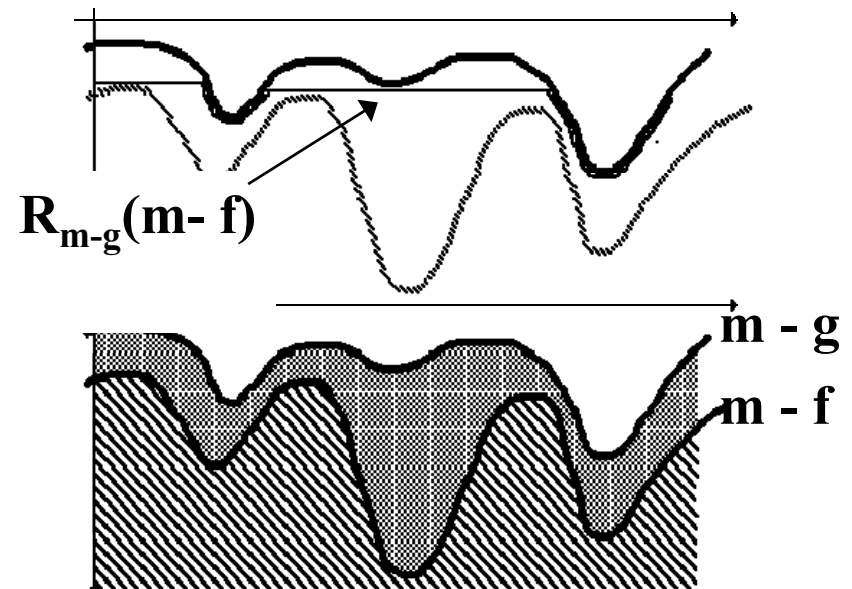
RECONSTRUCTION DUALE



La reconstruction duale $R_g^*(f)$ de g par f est l'inf des érosions géodésiques de f au-dessus de g

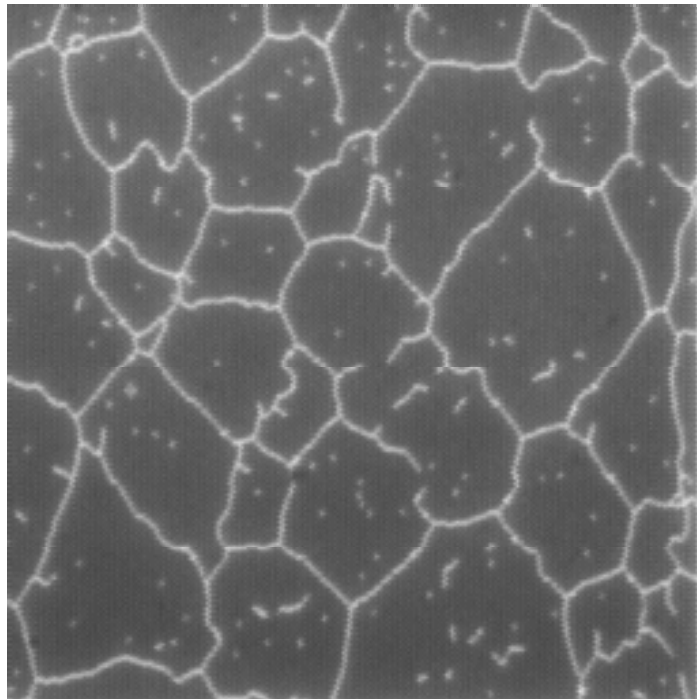
La dualité est identique à celle utilisée dans l'érosion géodésique (inversion autour d'une valeur pivot m):

$$R_g^*(f) = m - R_{m-g}(m-f)$$



EXEMPLE D'UTILISATION

Bouchage de trous numériques



Grains d'alumine avec inclusions



Reconstruction de l'image à partir du bord du champ

OUVERTURE PAR ÉROSION-RECONSTRUCTION

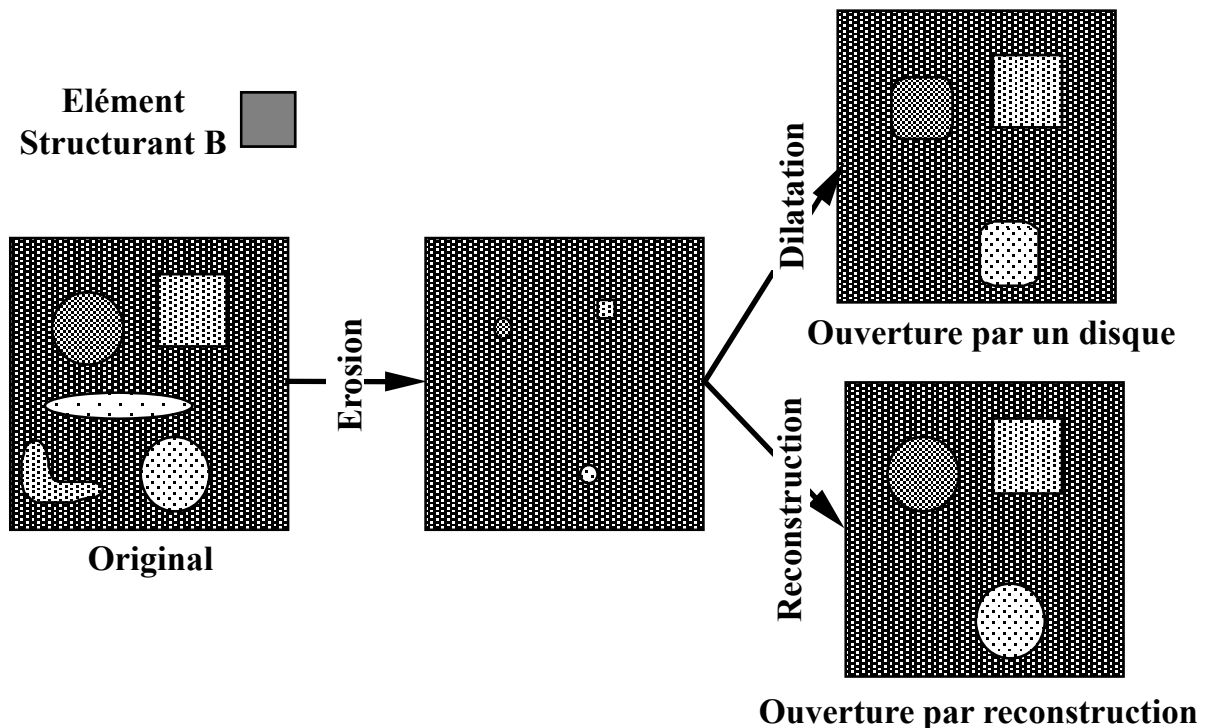
Préservation des contours

Tandis que l'ouverture classique modifie les contours, cette transformation permet de reconstruire efficacement et avec précision les contours des objets qui n'ont pas été totalement éliminés par l'érosion.

Algorithme

- L'espace géodésique est l'image originale.
- Le marqueur est l'érodé euclidien de l'image originale.

$$R_f \left[\varepsilon_B (f) \right]$$



APPLICATION À LA RÉTINOPATHIE

Le but de l'opération est de localiser et d'extraire les anévrismes rétiniens. Les opérateurs de reconstruction nous assurent que l'on peut supprimer exclusivement les petits pics isolés.

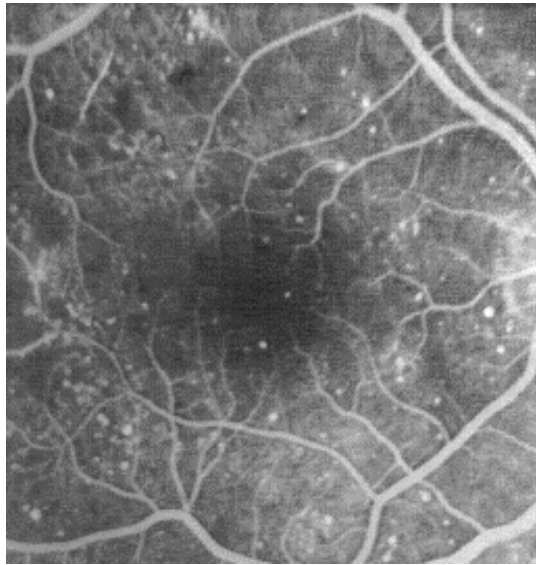
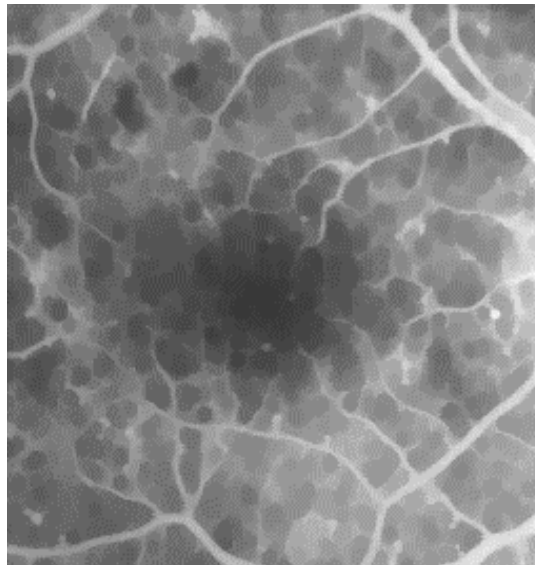


Image initiale



**ouverture par
érosion- reconstruction**



**différence des deux images
suivie par un seuil**

FILTRES GEODESIQUES

L'utilisation de la reconstruction géodésique (directe ou duale) avec des érosions permet de définir des filtres morphologiques basés sur des critères de taille uniquement.

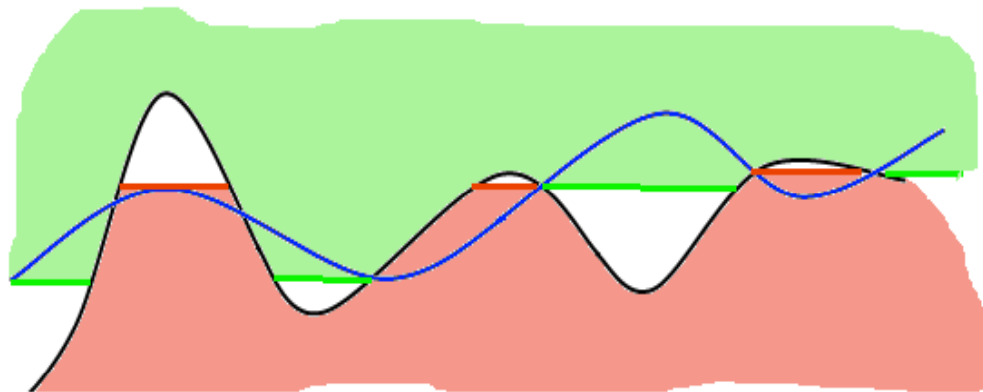
Ces filtres sont plus esthétiques que les filtres construits avec de simples ouvertures et fermetures



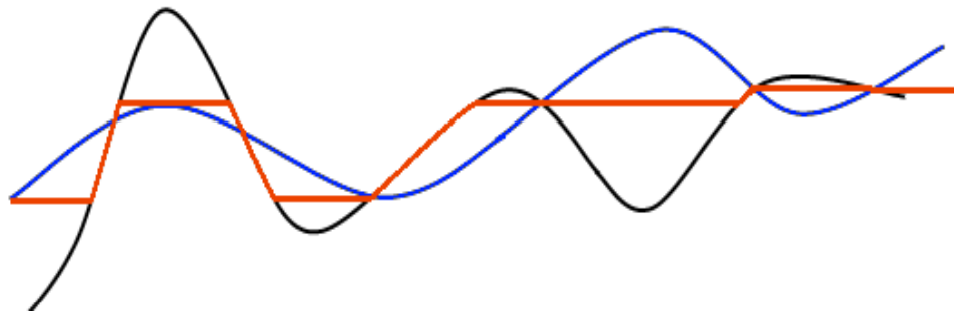
Comparaison entre une ouverture classique (au centre) et une ouverture par reconstruction (à droite), les deux ayant une taille identique.

NIVELLEMENTS SIMPLES

Les nivellements (dans leur définition simplifiée) permettent une généralisation de la reconstruction géodésique (directe ou duale) lorsque la fonction marqueur est quelconque.



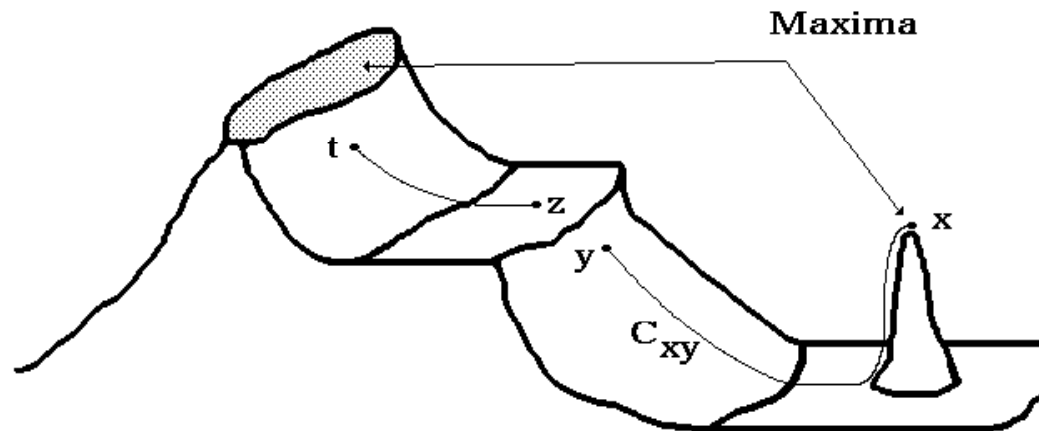
Reconstruction directe et reconstruction duale de la fonction f (en noir) par la fonction g (en bleu). Seules les parties de g au dessous ou au dessus de f sont utilisées dans les reconstructions respectives.



En rouge, résultat du nivellement.

MAXIMA D'UNE FONCTION

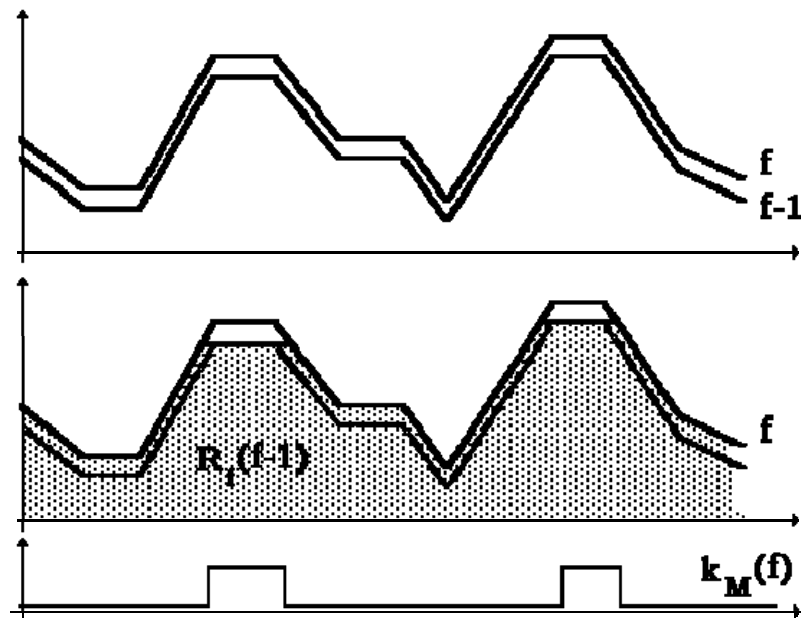
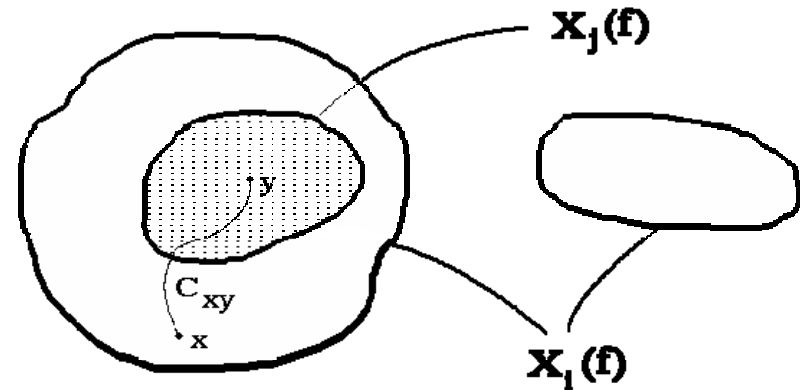
Un maximum d'une fonction f (ou maximum régional) est un sommet de la surface topographique, c'est-à-dire une région connexe (mais pas forcément réduite à un point) d'où il n'est pas possible, partant d'un point quelconque de cette région, de rejoindre un point de la surface d'altitude supérieure par un chemin jamais descendant.



- Le point x est un maximum (pour rejoindre y , le chemin C_{xy} comprend des portions descendantes)
- Les points z , y , t n'appartiennent pas à des maxima

DÉTECTION DES MAXIMA

Un maximum de la fonction f à l'altitude i est une composante connexe de la section $X_i(f)$ de f ne contenant aucune composante connexe de toute section $X_j(f)$ où $j > i$.



En posant $j=i+1$, on montre que l'indicatrice $k_M(f)$ des maxima M de f est égale à :

$$k_M(f) = f - R_f(f-1)$$

Les maxima sont les résidus de la reconstruction géodésique de f par $f-1$

Une définition et une mise en évidence similaires (elles utilisent la reconstruction duale) existent pour les minima m de f :

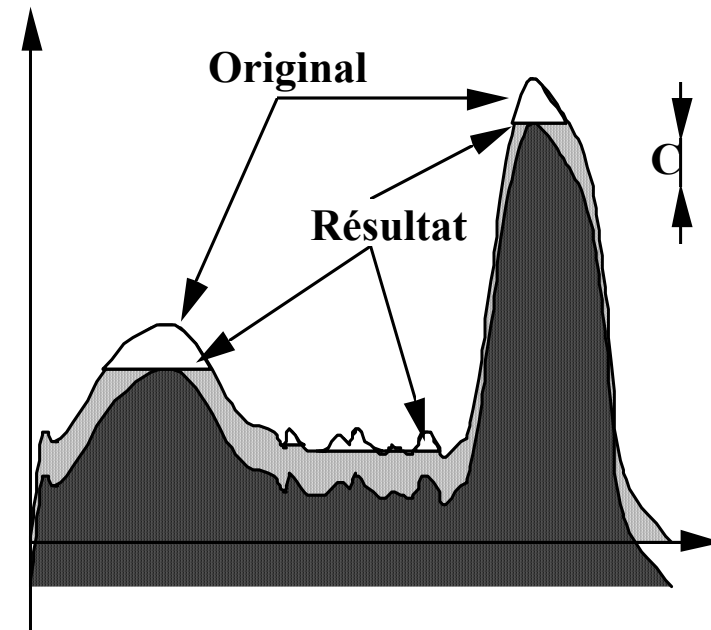
$$k_m(f) = R_f^*(f+1) - f$$

MAXIMA ÉTENDUS

On peut restreindre l'extraction des maxima à ceux qui marquent des pics (ou dômes) de hauteur au moins égale à c . Les chemins descendants issus de ces maxima ont une hauteur au moins égale à c . On peut donc mettre ces maxima en évidence en reconstruisant la fonction f initiale avec la fonction $f-c$.

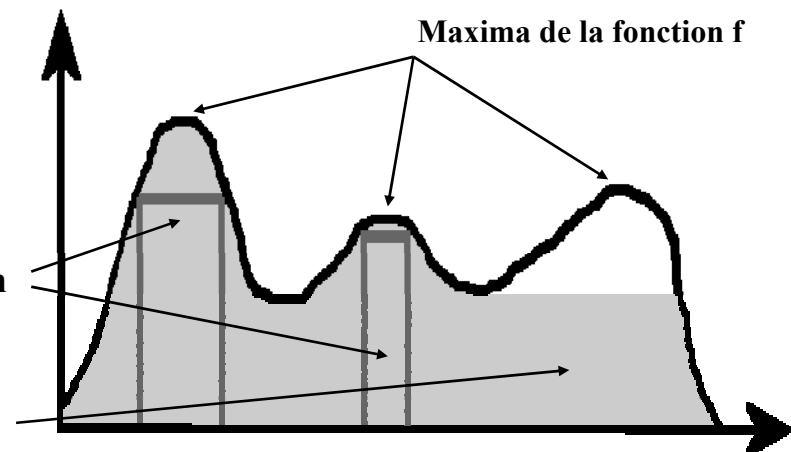
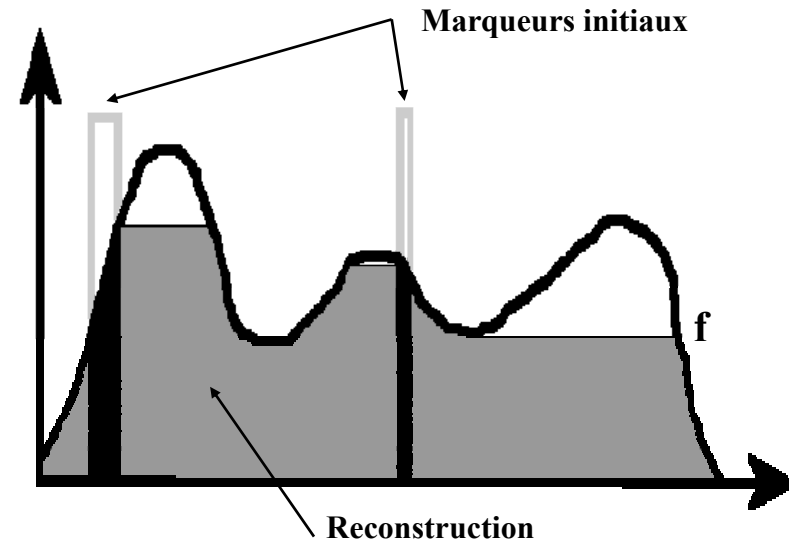
- On effectue la reconstruction $R_f(f-c)$
- La différence $f - R_f(f-c)$ fournit les maxima étendus de hauteur au moins égale à c de f
- Les maxima $M[R_f(f-c)]$ peuvent être déterminés
- Les maxima initiaux $M_c(f)$ de hauteur c de f sont alors égaux à:

$$M_c(f) = M(f) \cap M[R_f(f-c)]$$



RECONSTRUCTION D'UNE FONCTION À PARTIR DE MARQUEURS

- On peut reconstruire une fonction à partir de n'importe quel ensemble de marqueurs (pas uniquement les maxima).
- Cette opération est une modification d'homotopie: ne sont conservés (partiellement) que les dômes marqués.
- La reconstruction est partielle. Reconstruire complètement les dômes qui n'ont pas été complètement arasés peut se faire par l'algorithme décrit précédemment .



Reconstruction de f à partir de ses maxima inclus dans les maxima de la reconstruction précédente

DISTANCE GÉODÉSIQUE GÉNÉRALISÉE

La distance géodésique entre x et y est égale à la longueur du chemin minimal C_{xy} entre deux points. Cette longueur peut également être exprimée en temps de parcours.

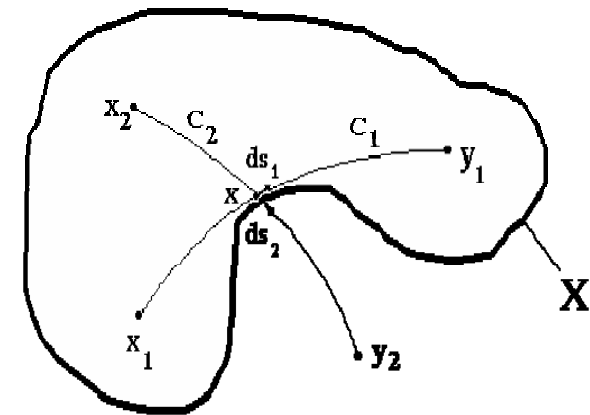
$$L(C_{xy}) = \int_{C_{xy}} ds = v \int_{C_{xy}} dt = vT(C_{xy})$$

Lorsque la vitesse v est constante, le temps de parcours total $T(C_{xy})$ du chemin peut être pris en compte pour mesurer sa longueur.

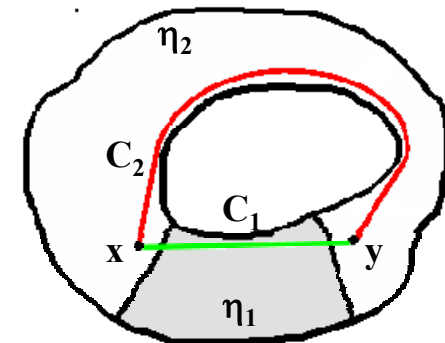
Si la vitesse n'est pas constante mais est remplacée par un champ de vitesses ω , la longueur d'un chemin C_{xy} sera alors définie par le temps de parcours de ce chemin.

$$T(C_{xy}) = \int_{C_{xy}} \frac{ds}{\omega} = \int_{C_{xy}} \eta ds$$

L'inverse $\eta = 1/\omega$ de la vitesse est appelée réfringence. La donnée de ce champ de réfringence permet de calculer le temps de parcours de tout chemin et donc de définir la distance géodésique généralisée entre deux points x et y comme le temps de parcours minimal entre ces deux points.



Tenseur des vitesses



C_2 est le plus court chemin

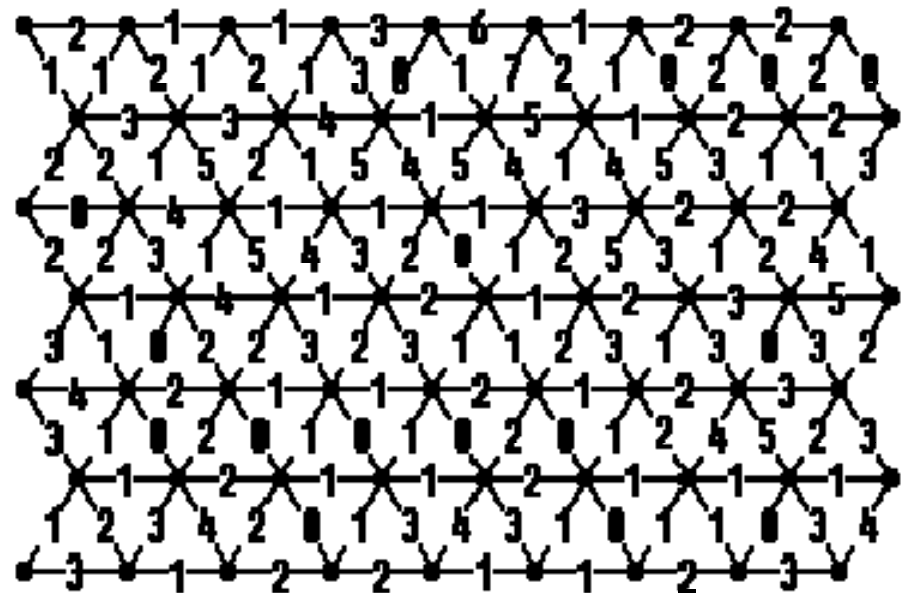
DISTANCE GÉODÉSIQUE GÉNÉRALISÉE DIGITALE

- Dans un espace digital, le champ de réfringence est un graphe valué
- Ce champ peut être « dérivé » d'une quelconque fonction (image) f:

$$\eta(x, y) = |f(x) - f(y)|$$

- La distance peut éventuellement être remplacée par un écart (réfringence nulle)
- Cette distance peut être algébrique (non symétrique)

Exemple de graphe de réfringence en maille hexagonale



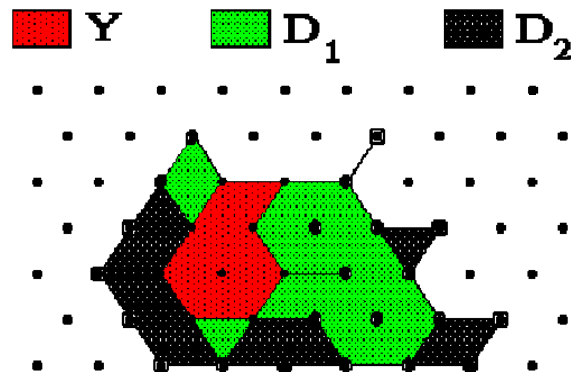
DILATATION GÉODÉSIQUE GÉNÉRALISÉE

- La dilatation de temps n d'un ensemble Y dans un champ de réfringence η est un processus itératif
- Cette dilatation s'obtient par n dilatations de taille 1

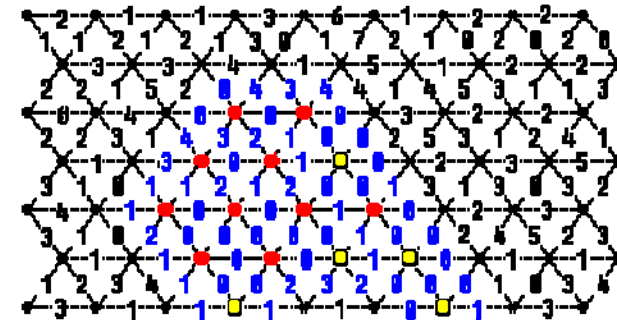
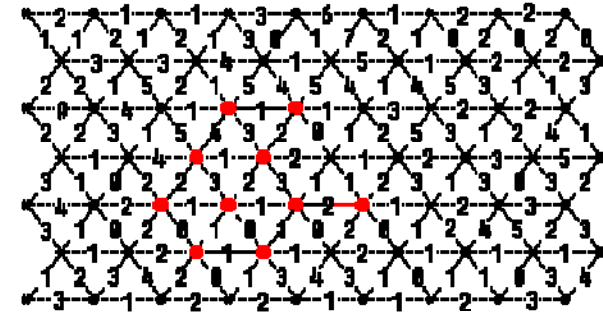
Algorithme de dilatation élémentaire

- Les points d'écart nul avec Y sont ajoutés à Y
- La réfringence des arêtes du graphe connectés à Y est diminuée de 1
- Les points d'écart nul connectés à Y sont ajoutés à l'ensemble \rightarrow Dilaté de taille 1

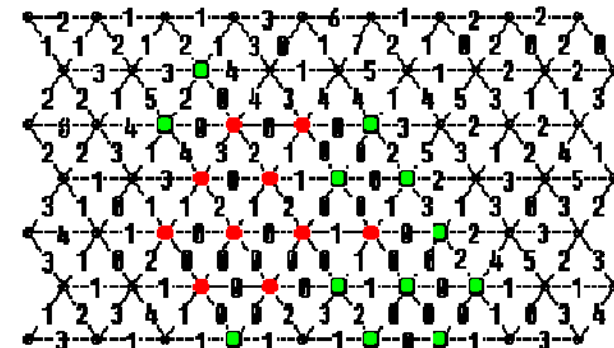
La procédure est réitérée avec les nouvelles valeurs du champ de réfringence



• Points de Y



■ points ajoutés par dilatation de taille 1

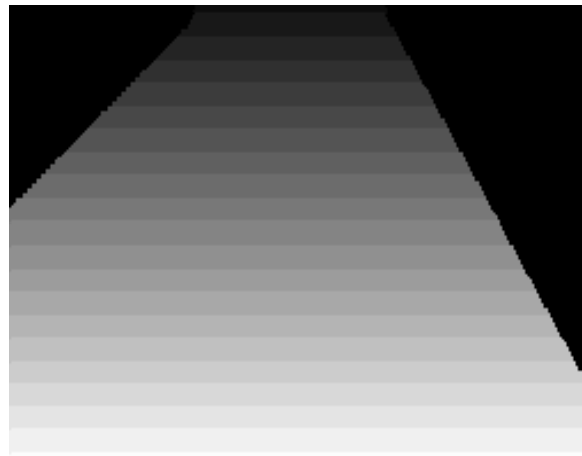


APPLICATION À L'ANALYSE DU TRAFIC

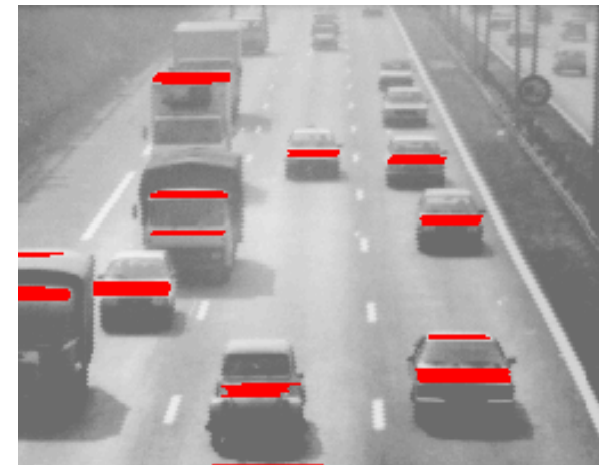
Les transformations géodésiques généralisées permettent de réaliser des opérations tenant compte de la perspective, selon la taille réelle des objets dans la scène



Image de trafic



**Facteur d'échelle utilisé
pour définir la
réfringence**



**Ouverture de taille égale
à 1m (distance au sol)**

LA LIGNE DE PARTAGE DES EAUX

UNE MACHINE-OUTIL, LA LIGNE DE PARTAGE DES EAUX (LPE)

- **En MM, la segmentation d'image s'articule autour d'une transformation, la ligne de partage des eaux (1979)**
- **L'introduction de marqueurs a augmenté spectaculairement l'efficacité de la LPE (1982)**
- **Cette transformation fait partie de la « famille » des opérateurs morphologiques et en particulier de la classe des transformations géodésiques**
- **La LPE peut être réalisée sur diverses structures ou représentations d'images: images 3D, vidéos, graphes, etc. Cette capacité a généré des solutions de segmentation hiérarchique (1990)**
- **Développements récents: nouveaux outils hiérarchiques, nouveaux critères de segmentation (2005-2007)**

DE QUOI SERA-T-IL QUESTION?

- **La ligne de partage des eaux, l'outil de segmentation en MM**
 - **Definition, description**
 - **Comment la construire**
 - **Biais, problèmes, inexactitudes**
- **Comment segmenter avec la LPE**
 - **L'idée initiale**
 - **Pourquoi cela ne marche pas bien**
 - **La LPE contrôlée par marqueurs**
 - **La boîte à outils de segmentation et son manuel d'utilisation**
 - **Outils anciens et récents (résidus)**
- **Segmentation hiérarchique**
 - **L'algorithme des cascades**
 - **L'algorithme P**

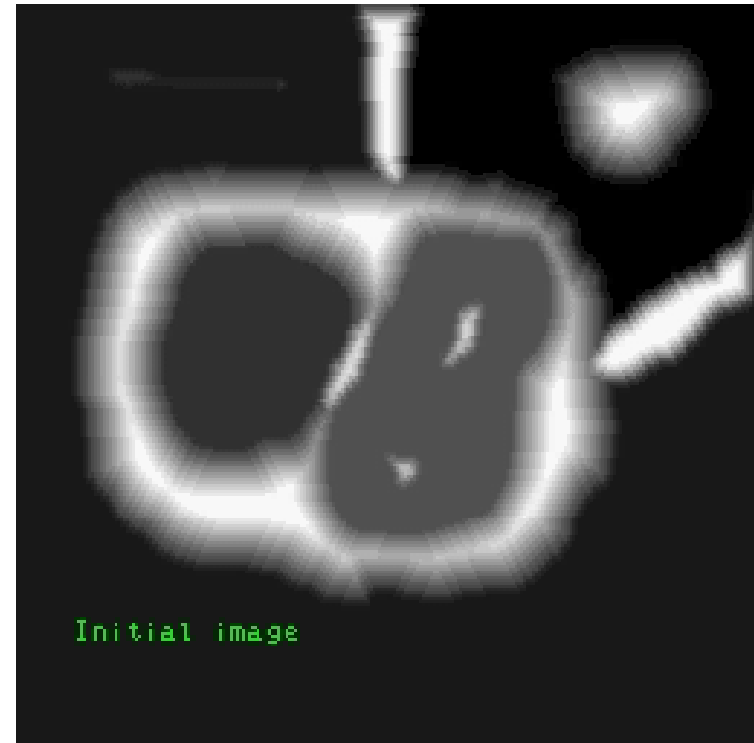
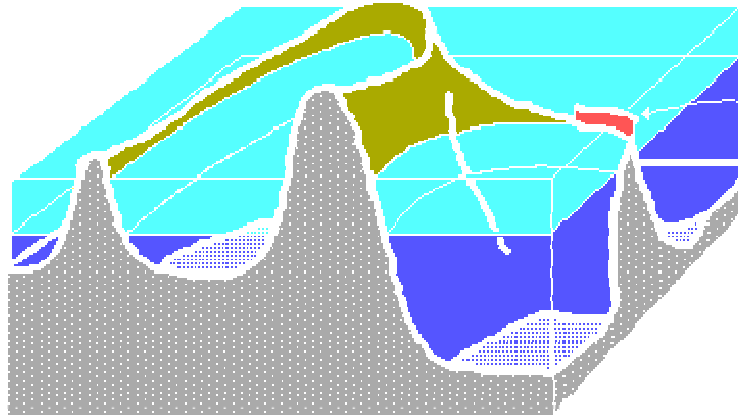
**EXEMPLES
D'APPLICATIONS**

L'ALGORITHME CLASSIQUE DE L.P.E.

- C'est un processus d'inondation
- Les sources d'inondation sont les minima de la fonction

Deux hiérarchies apparaissent:

- progression de l'inondation avec l'altitude (processus séquentiel)
- inondation des plateaux ou zones plates (processus parallèle)



Le résultat est une partition de l'image en bassins versants et en lignes de partage des eaux (barrages)

L'ALGORITHME CLASSIQUE DE L.P.E. (2)

La transformation peut être construite à l'aide des niveaux successifs Z_i de la fonction f :

$$W_0 = m_0(f)$$

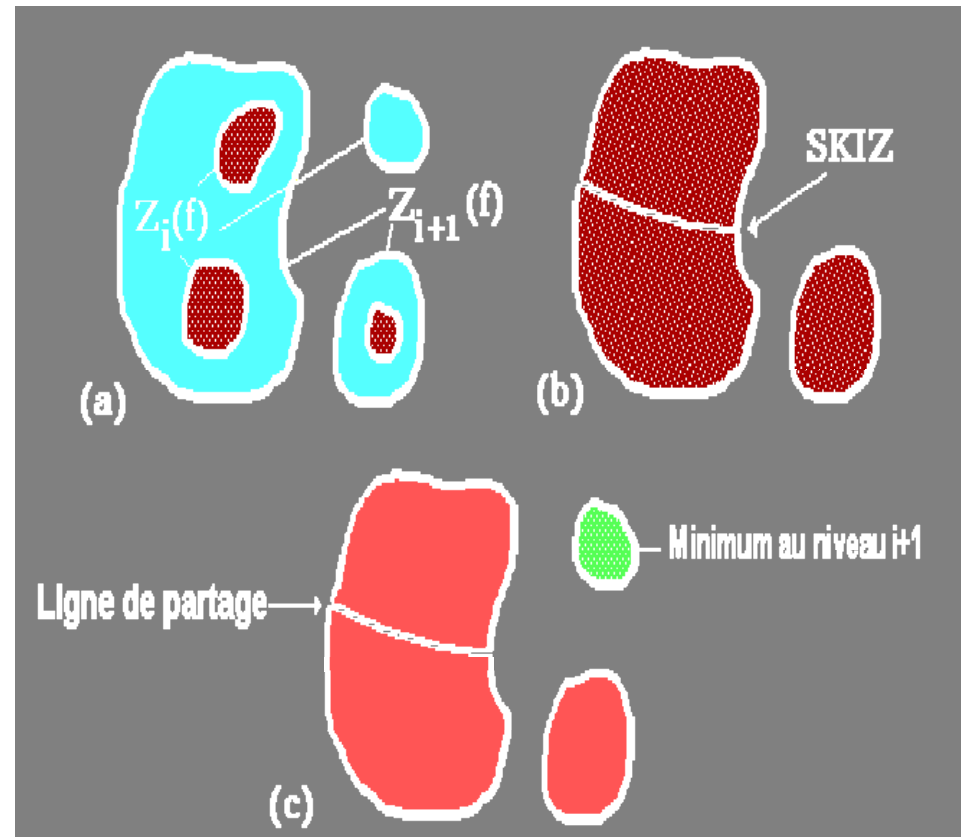
Les bassins versants au niveau 0 sont les minima à ce niveau

$$W_{i+1} = [\text{SKIZ}_{Z_{i+1}(f)}(W_i)] \cup m_{i+1}(f)$$

avec:

$$m_{i+1}(f) = Z_{i+1}(f) / R_{Z_{i+1}(f)}(Z_i(f))$$

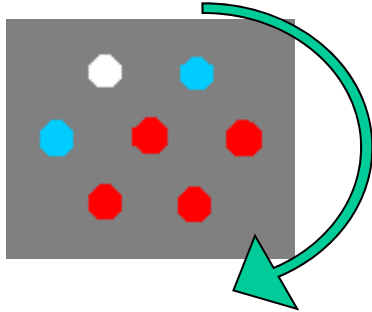
R est la reconstruction géodésique



Le SKIZ géodésique simule la propagation de l'inondation sans mélange des eaux

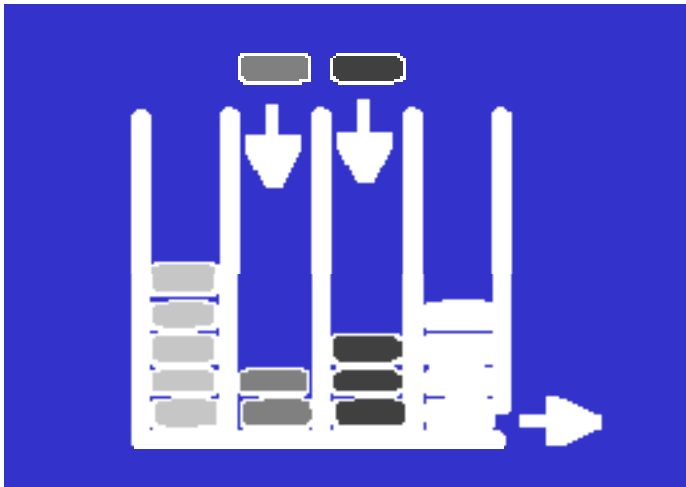
ALGORITHMES DE L.P.E

- l'algorithme classique (SKIZ avec des épaissements en rotation)



L'usage d'éléments structurants en rotation dans le SKIZ génère une inondation des plateaux non isotrope

- files d'attente hiérarchiques (ordre a priori défini dans la file)



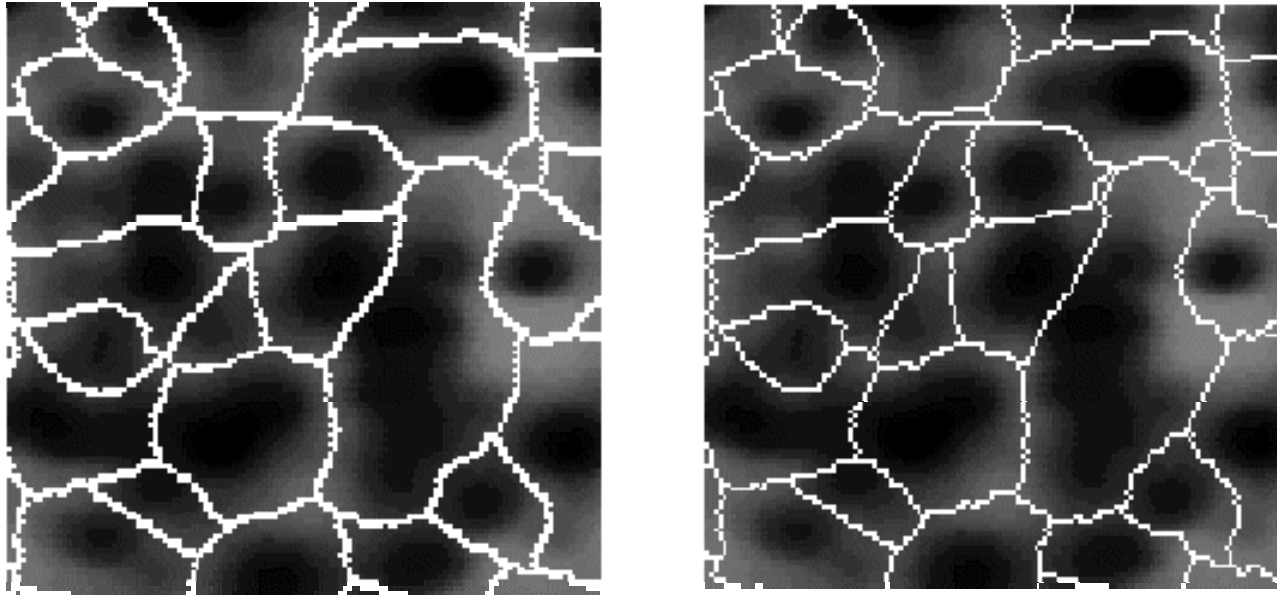
Les jetons appartenant à la même pile devraient être traités en même temps

- LPE basée sur des graphes

La plupart des algorithmes de LPE sont biaisés

BIAIS ET INEXACTITUDES AU SUJET DE LA LPE

Pour diverses raisons (complexité, vitesse de traitement, paresse...), les algorithmes de LPE sans biais sont rarement utilisés.



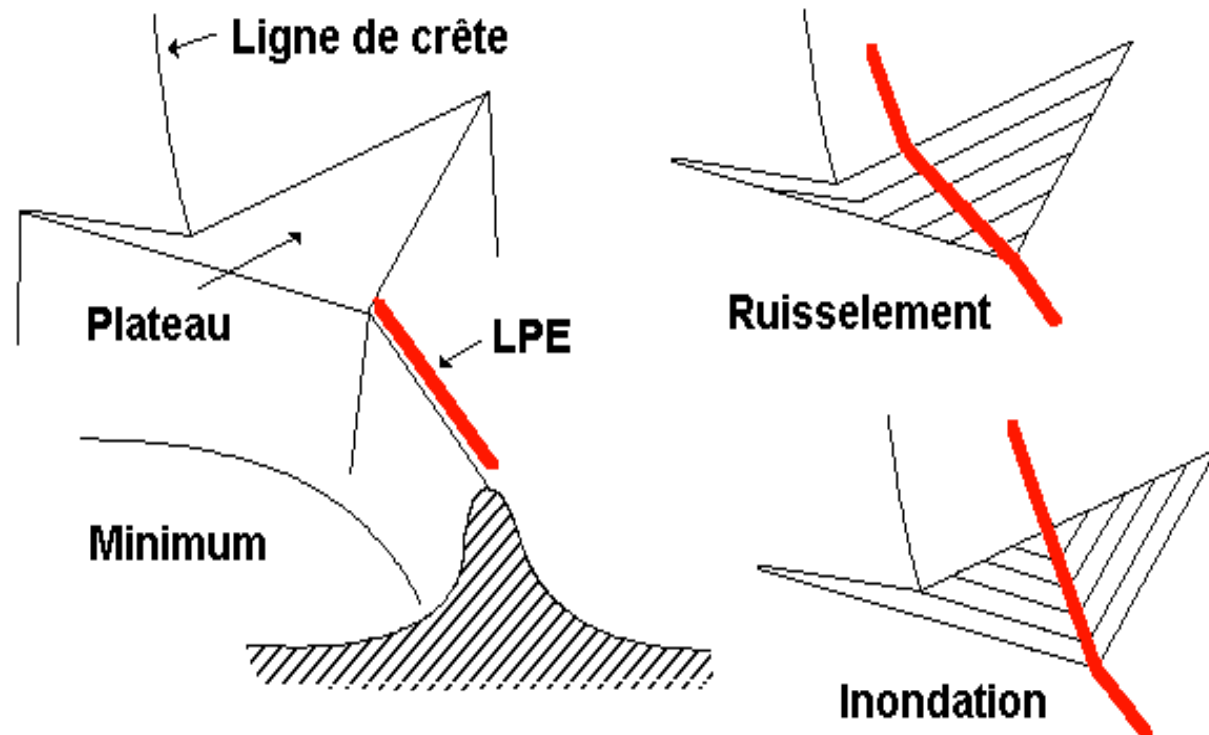
Comparaison entre une LPE exacte (à gauche) et le résultat d'un algorithme classique.

A cause de ces biais, la LPE n'est pas UNIQUE (elle devrait l'être). Ces biais peuvent avoir de spectaculaires conséquences pour les approches hiérarchiques basées sur la comparaison de bassins versants adjacents.

BIAIS ET INEXACTITUDES AU SUJET DE LA LPE (1)

La ligne de partage des eaux ne peut pas être construite en simulant l'écoulement de gouttes de pluie ruisselant sur la surface topographique (ruisselement). A OUBLIER!

L'inondation sur les plateaux est basée sur un MODELE (vitesse constante). Il a principalement deux avantages: il est simple et il a un sens physique.



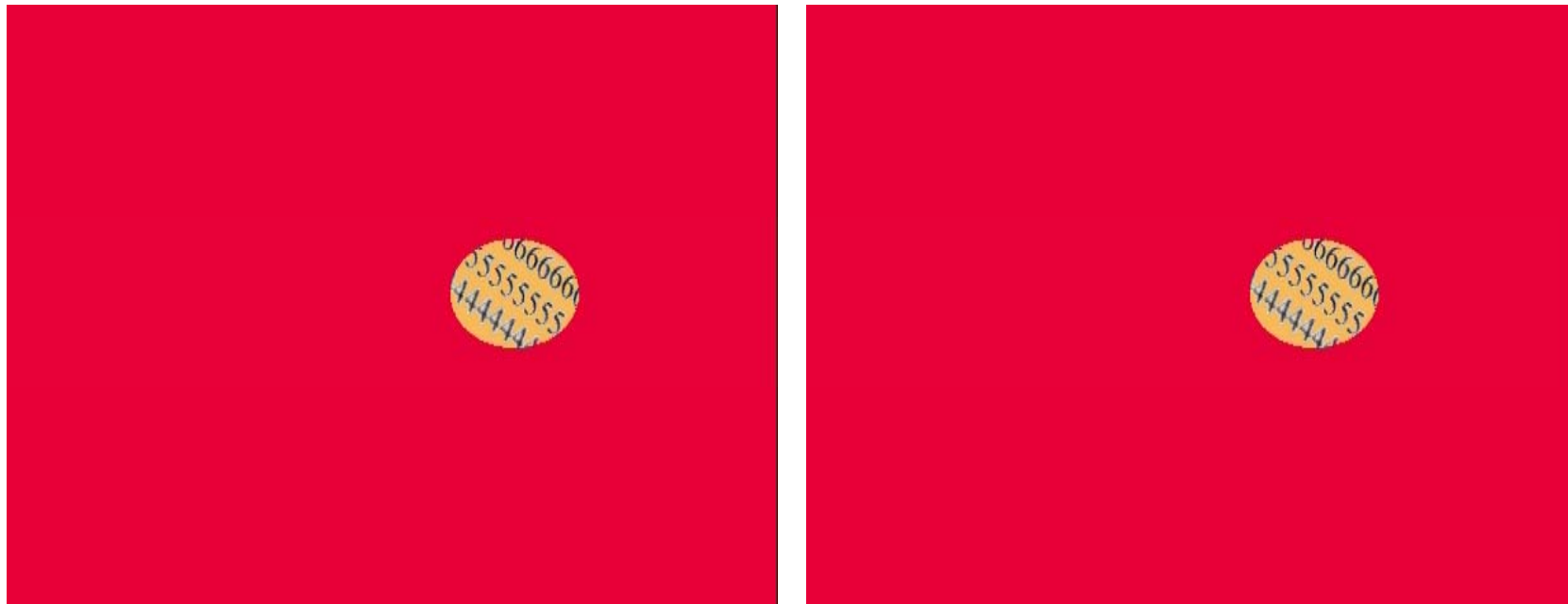
En aucun cas, les résultats ne pourraient être identiques (à cause de la propagation sur les plateaux).

BIAIS ET INEXACTITUDES AU SUJET DE LA LPE (2)

La ligne de partage des eaux n'est pas locale. En particulier, elle n'est pas liée à des structures locales (lignes de crête, escarpement,...). La LPE n'est pas un concept LOCAL.

Vous ne pouvez pas, avec la seule connaissance locale du voisinage d'un point, répondre à la question:

Ce point appartient-il à une ligne de partage des eaux?



BIAIS ET INEXACTITUDES AU SUJET DE LA LPE (3)

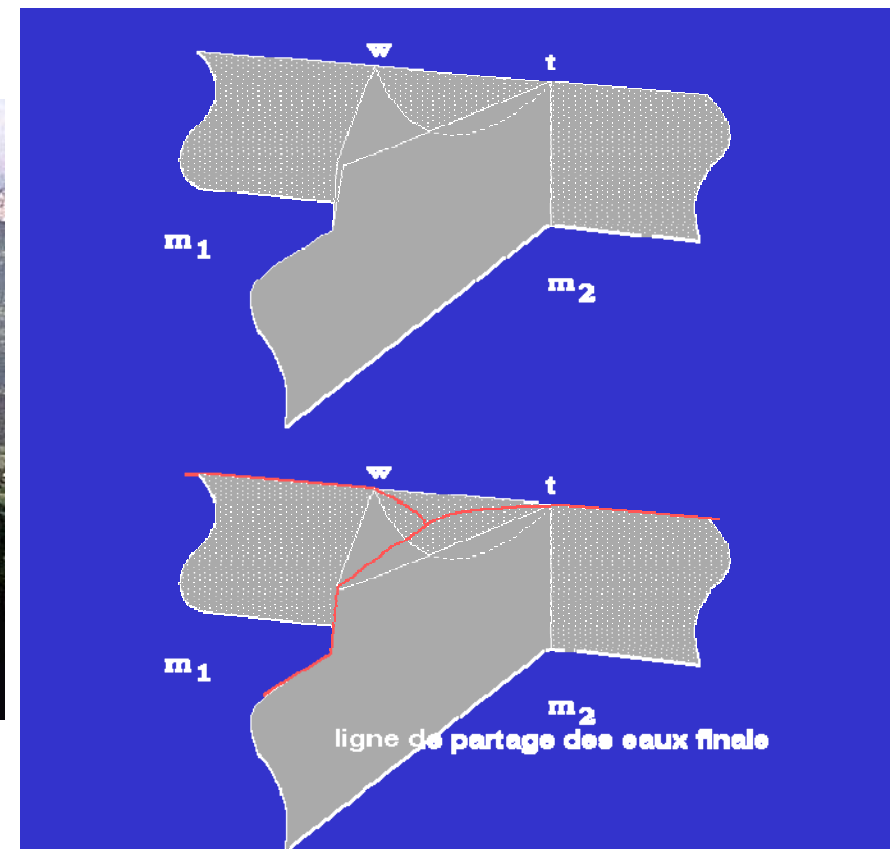
L'inondation est-elle toujours un phénomène ascendant?

En d'autres termes, quand l'inondation est à la hauteur h , est-il vrai que TOUS les points à une altitude inférieure ont été inondés?

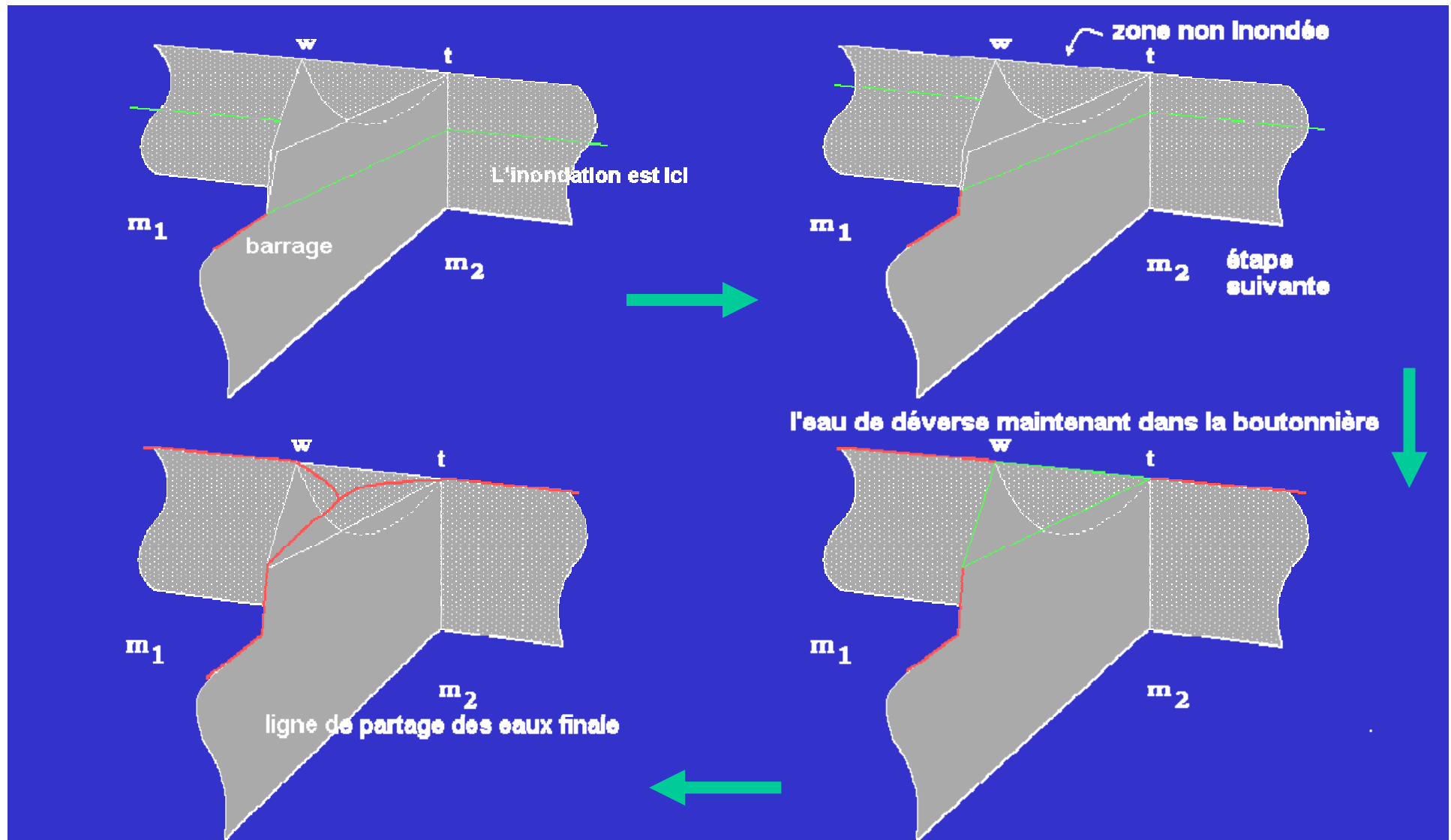
La réponse est **NON!** Contre-exemple: la boutonnière



(Boutonnière dans le Grésivaudan)



LA BOUTONNIERE

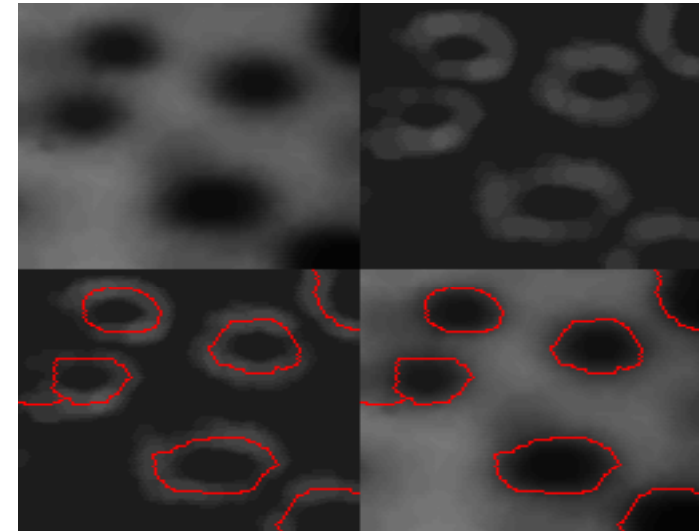
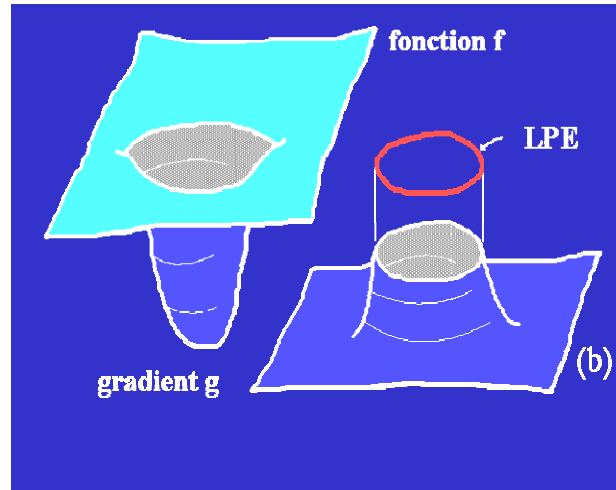


USAGE DE LA LIGNE DE PARTAGE DES EAUX

La ligne de partage des eaux est utilisée en segmentation

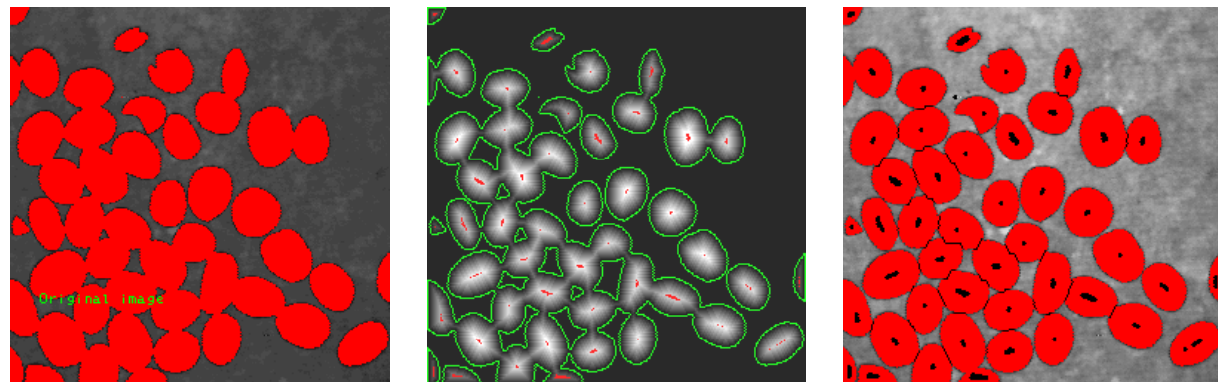
- **Segmentation d'images**

La LPE du module du gradient correspond aux contours des objets



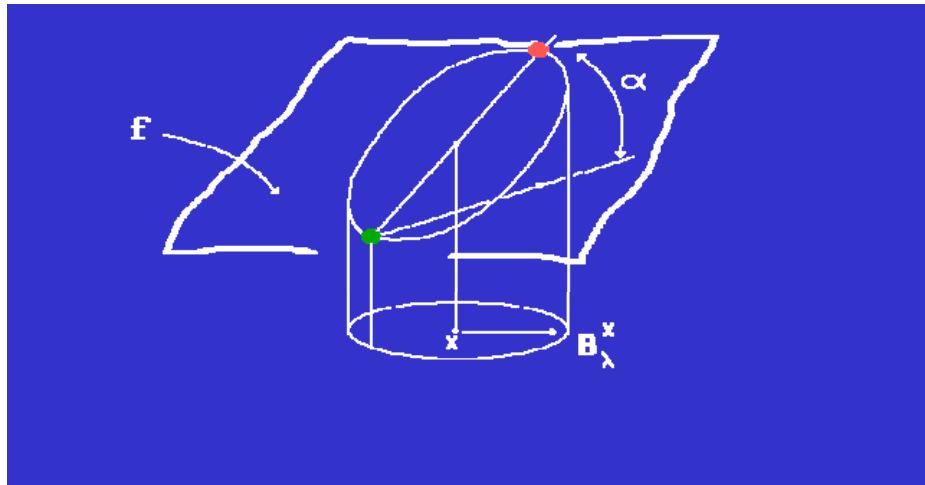
- **Segmentation d'ensembles**

Découpage d'objets en une union d'objets convexes à l'aide de la LPE de la fonction distance



LE GRADIENT: RAPPEL

Gradient morphologique



$$g(f) = (f \oplus B) - (f \ominus B)$$

D'autres gradients morphologiques (demi-gradients) peuvent également être définis:

$$g_-(f) = f - (f \ominus B)$$

$$g_+(f) = (f \oplus B) - f$$

Gradients épais:

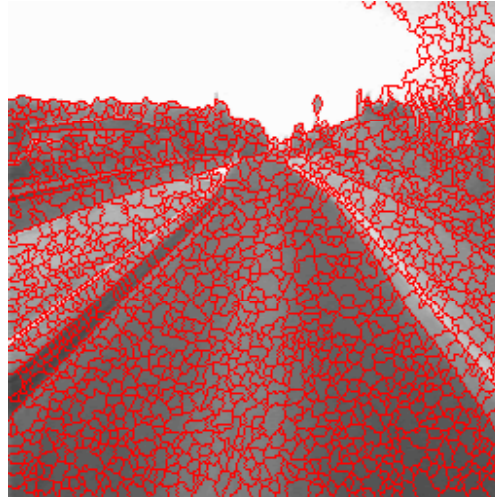
$$g_i(f) = (f \oplus B_i) - (f \ominus B_i)$$

Gradients régularisés



LPE CONTROLÉE PAR MARQUEURS

La LPE du gradient est sur-segmentée.



Les images gradient sont souvent bruitées et contiennent un grand nombre de minima. Chaque minimum génère un bassin versant dans la LPE.

Pour éviter cette sur-segmentation due à de nombreuses sources d'inondation, seules certaines d'entre elles peuvent être sélectionnées (les marqueurs) et une LPE contrôlée par ces marqueurs peut être réalisée.



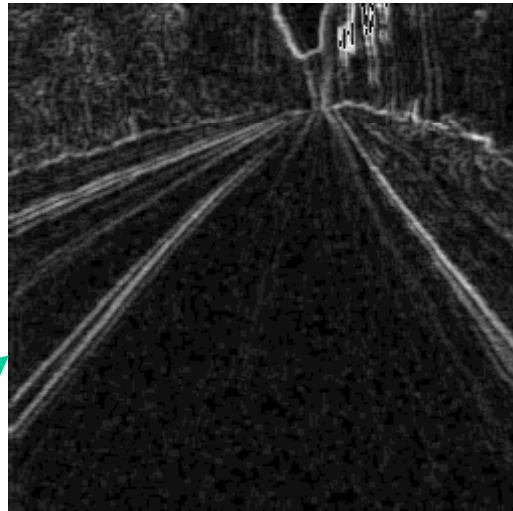
EXEMPLE DE LIGNE DE PARTAGE DES EAUX CONTROLEE PAR MARQUEURS

Segmentation de route



Image originale

gradient



marqueurs



LPE contrôlée par marqueurs du gradient

LPE CONTROLÉE PAR MARQUEURS ALGORITHMES

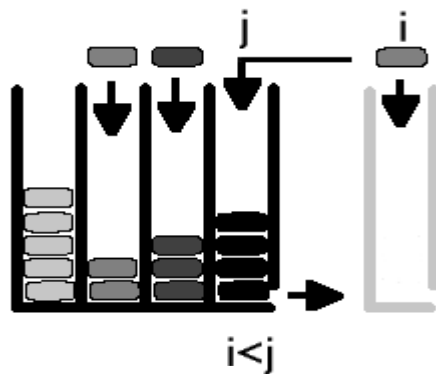
- Inondation niveau par niveau

$W_0 = M$, ensemble marqueur

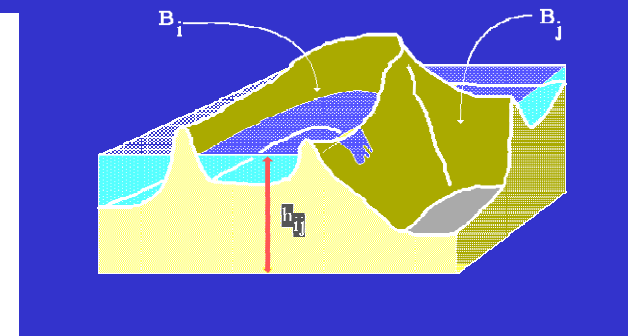
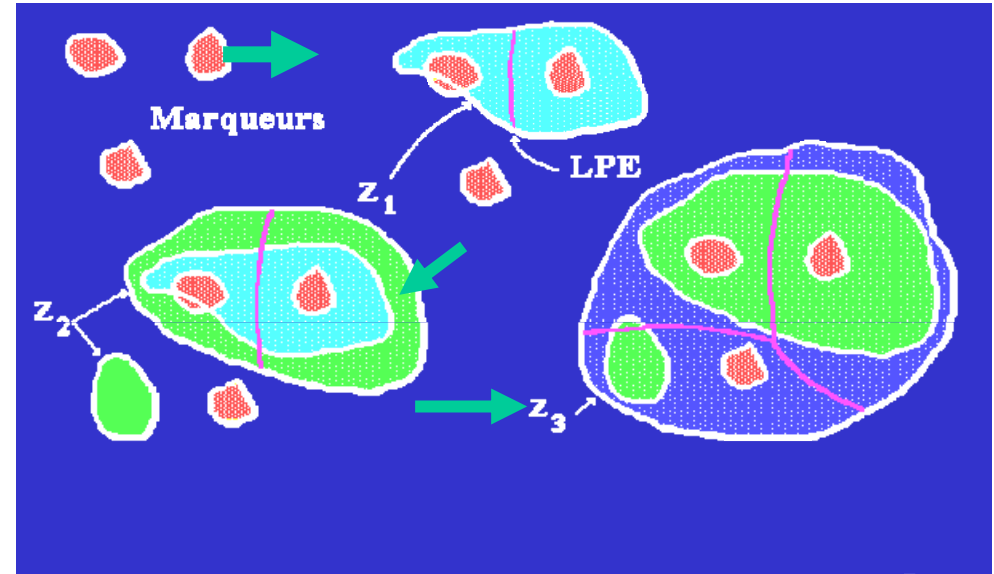
$$W_i = \text{SKIZ}_{Z_i(f) \cup M} (W_{i-1})$$

Cet algorithme est plus simple que l'algorithme classique: il n'y a pas de détection de minima

- Files d'attente hiérarchiques



Un jeton au niveau $i < j$ (niveau courant) peut apparaître. Dans ce cas, il est traité comme un jeton au niveau j (la file de niveau i n'existant plus)

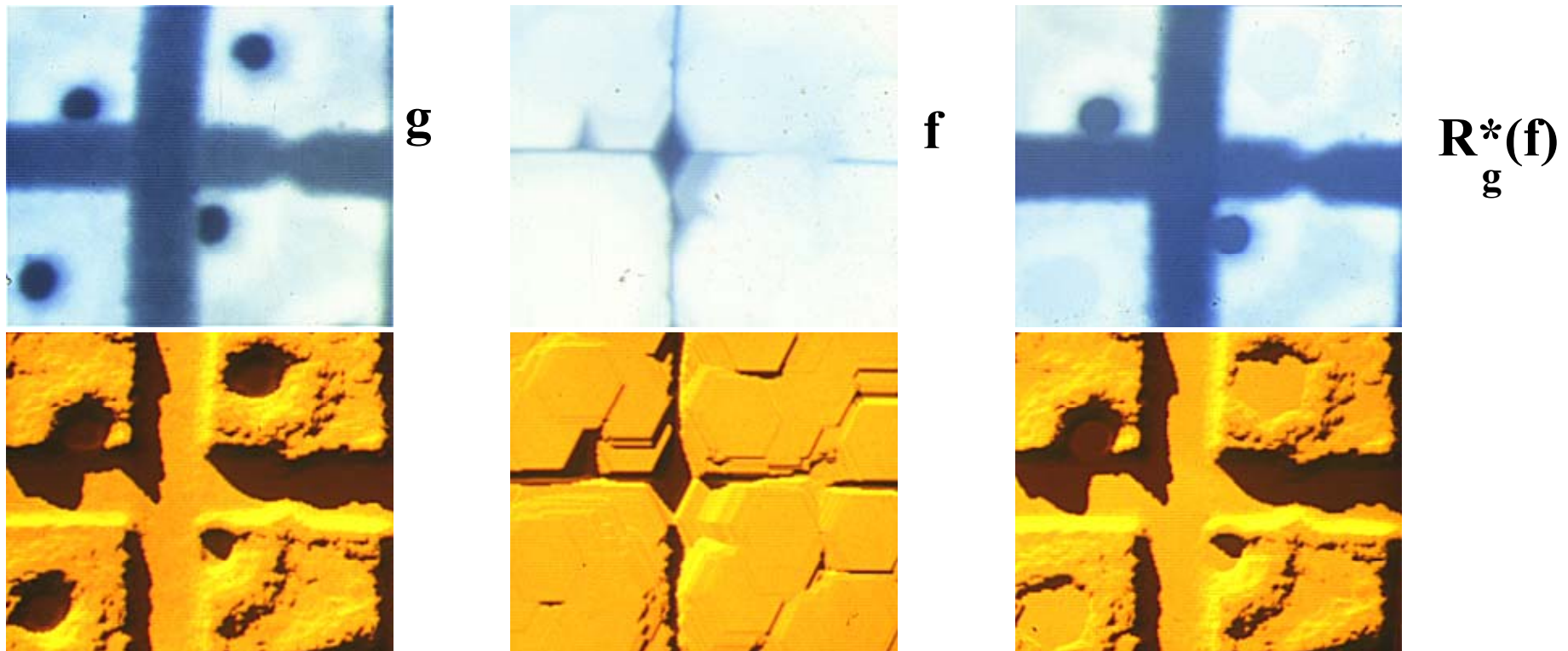


Avec la LPE contrôlée par marqueurs, le débordement est la règle et non plus l'exception

RECONSTRUCTION GEODESIQUE (RAPPEL)

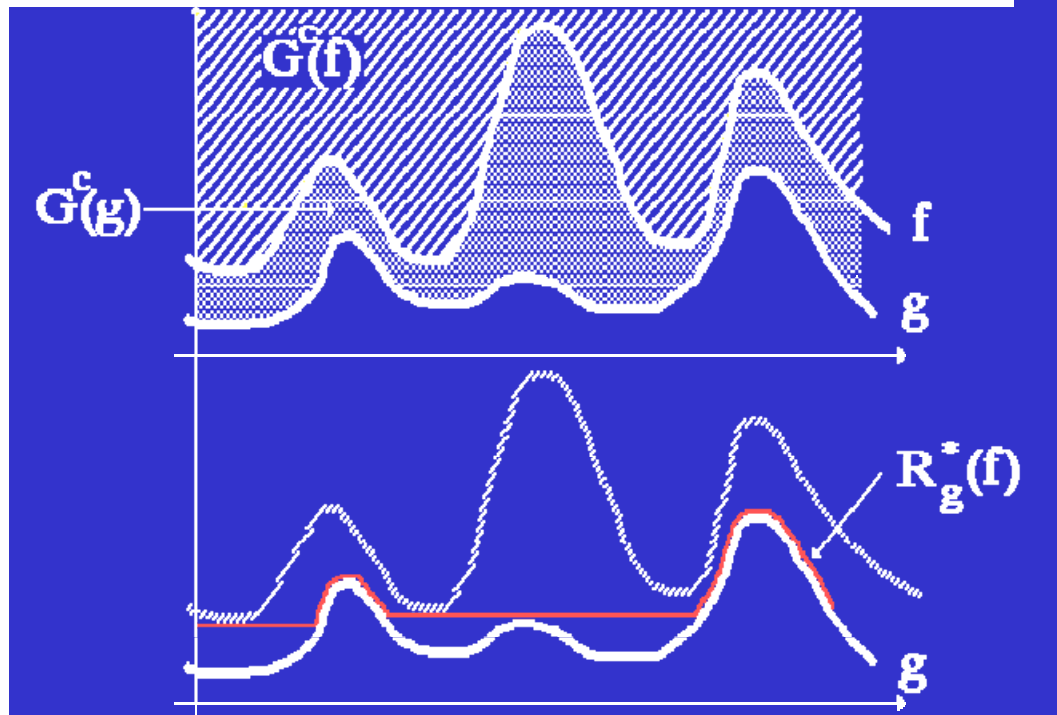
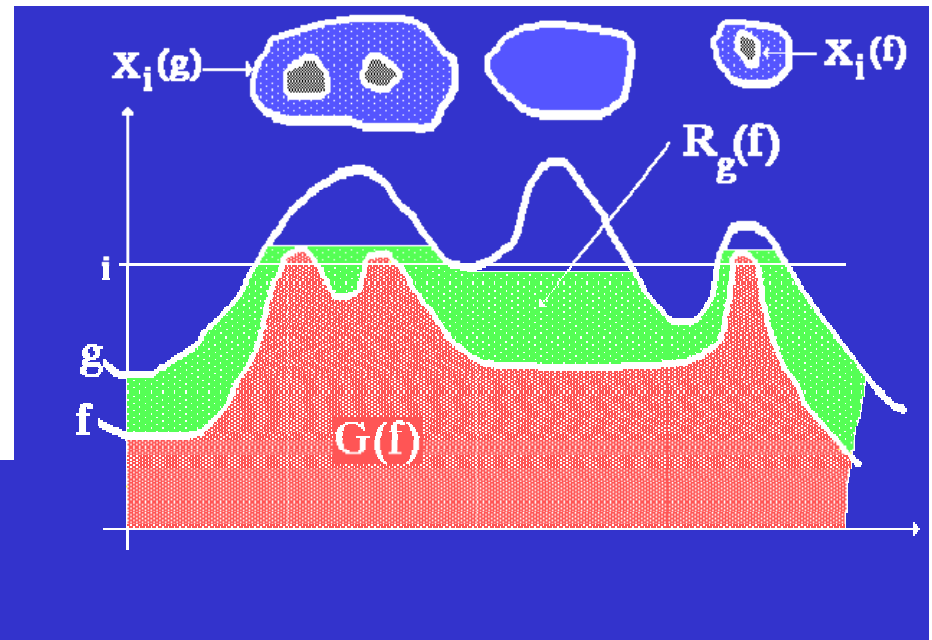
La reconstruction géodésique est largement utilisée en morphologie mathématique:

- détection d'extrema (minima, maxima)
- filtrage (ouvertures et fermetures par reconstruction)
- ligne de partage des eaux (modification d'homotopie)
- cascades



RECONSTRUCTION GEODESIQUE (2)

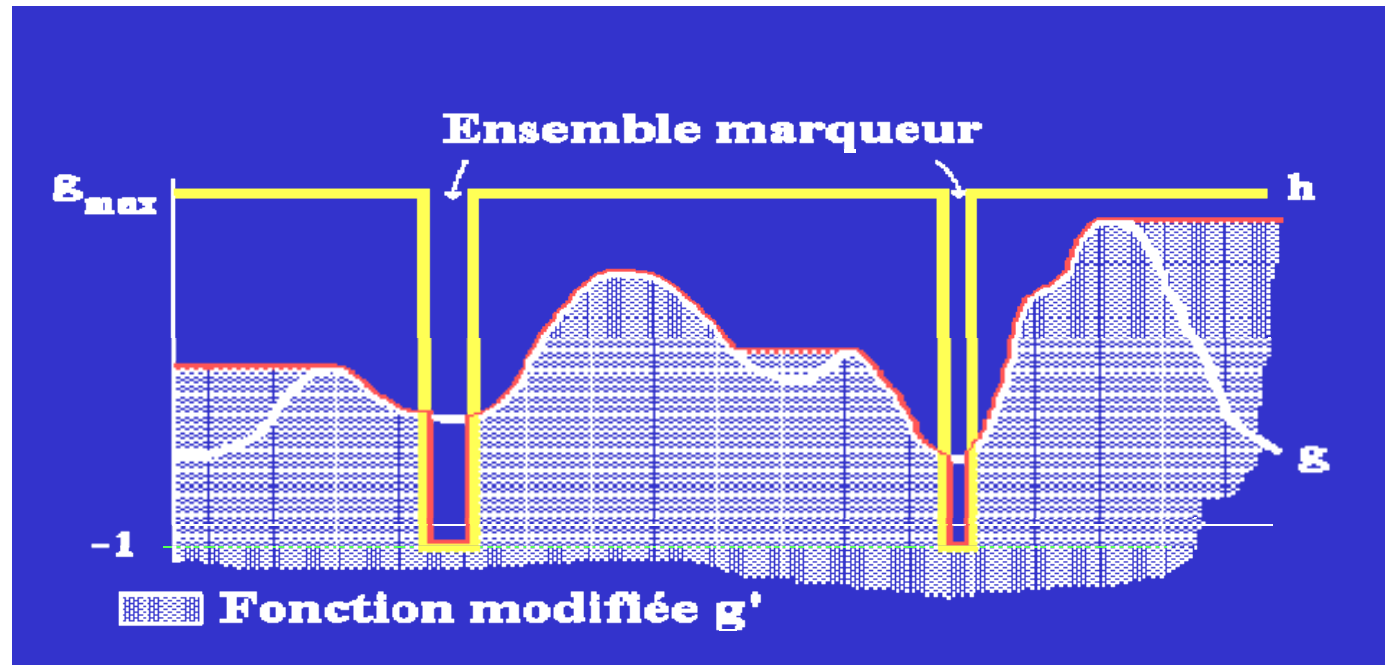
La reconstruction géodésique est capitale pour réaliser et comprendre la ligne de partage des eaux.



Une reconstruction duale peut également être définie (elle utilise les érosions géodésiques).

MODIFICATION D'HOMOTOPIE (“Swamping”)

Basé sur la reconstruction, la modification d'homotopie permet de construire une nouvelle fonction dont les minima correspondent aux marqueurs.



1) Une fonction marqueur est définie:

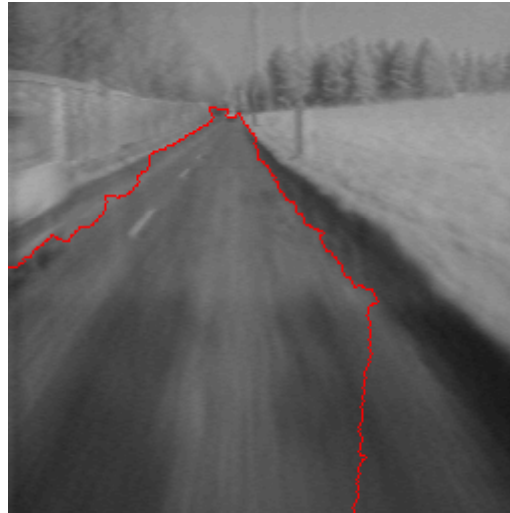
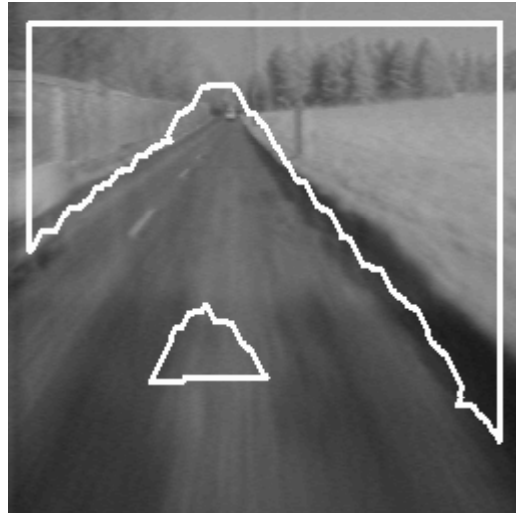
$$h(x) = -1 \text{ ssi } x \in M$$

$$h(x) = g_{\max}, \text{ sinon}$$

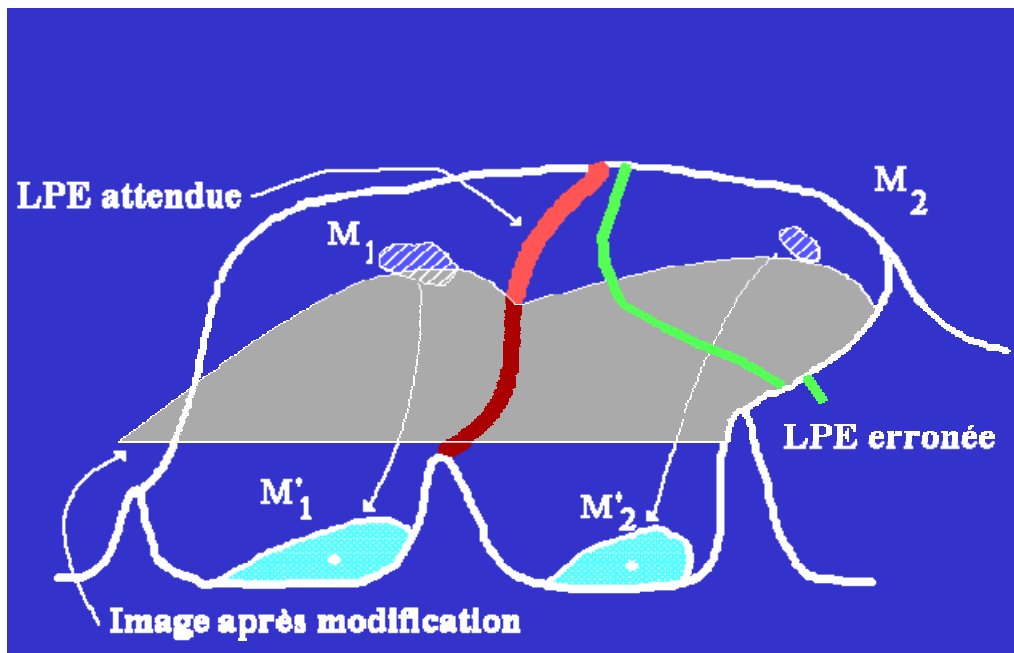
2) La reconstruction de h au-dessus de $g' = \inf(g, h)$ est réalisée:

→ $R_{g'}^*$, (h) fonction modifiée

POSITION DES MARQUEURS

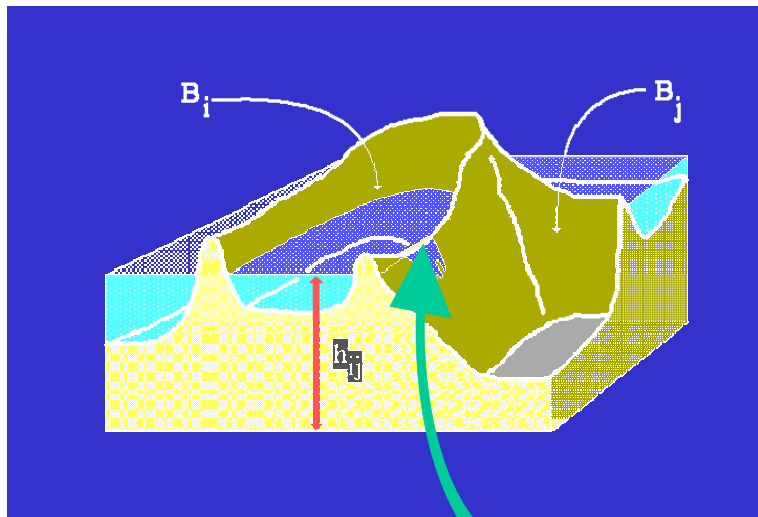


Segmentation obtenue (image de droite) avec une LPE du gradient contrôlée par marqueurs (marqueurs à gauche)



Quand les minima sont remplacés par des marqueurs, il est crucial de contrôler la position de ces marqueurs

POSITION DES MARQUEURS (2)



Zone selle

Notion de sous-bassin versant

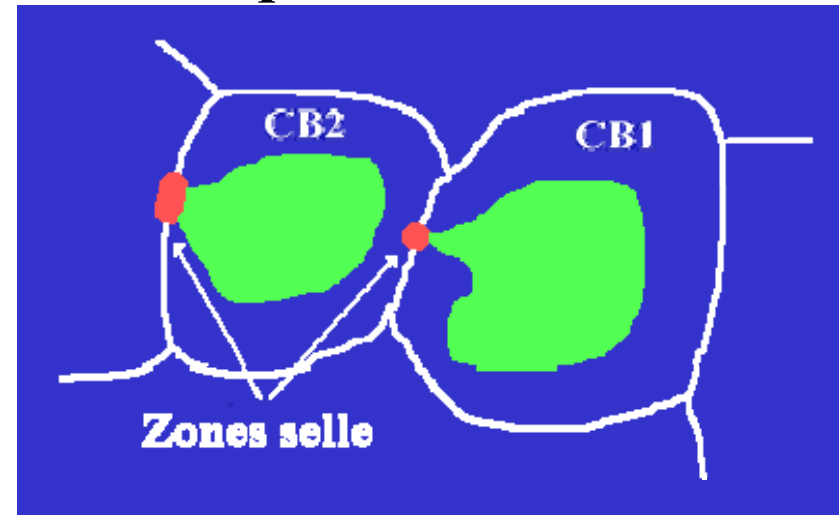
C'est la partie du bassin versant inondée avant le premier débordement (par la zone selle la moins élevée)

Solution: les marqueurs doivent être inclus dans les sous-bassins versants.

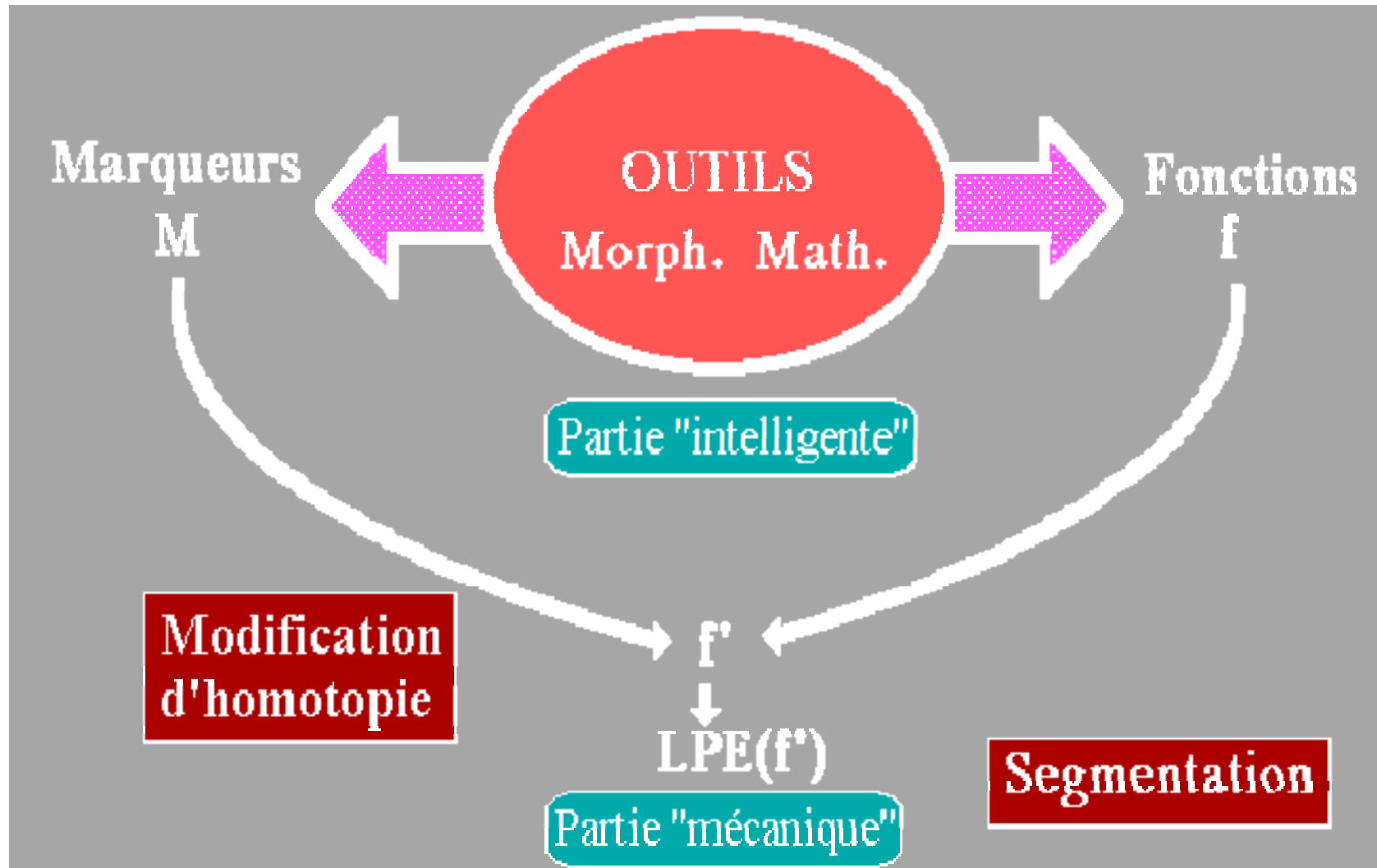
Une correspondance biunivoque n'est pas indispensable pourvu que les marqueurs inclus dans le même bassin versant aient la même étiquette.

Question:

Si on remplace les minima originaux par des marqueurs, où placer les marqueurs pour s'assurer que la LPE finale sera identique?



LE PARADIGME DE LA SEGMENTATION



QUELS CRITERES?

- **Critères de contraste**

 - Gradient**

 - Transformation chapeau haut-de-forme**

- **Critères de taille et de forme**

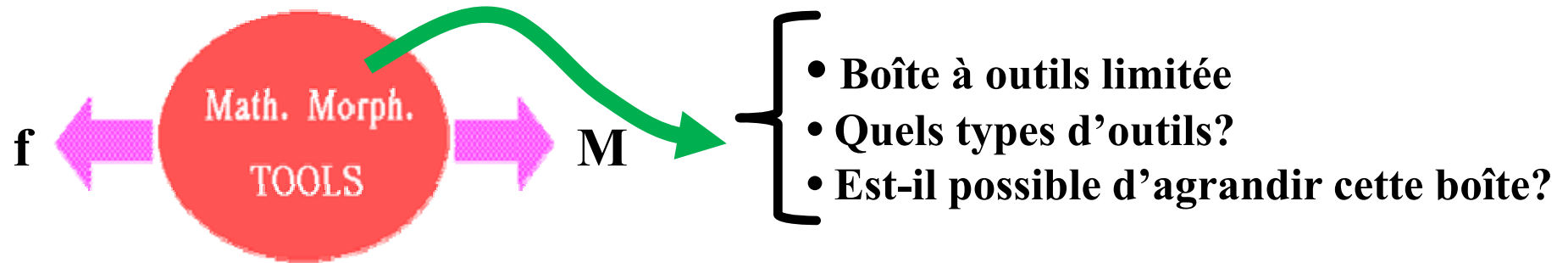
 - Fonction distance**

 - Fonction granulométrique**

 - Quasi-distance**

- **Combinaison de plusieurs critères**

EXPLORATION DE LA BOÎTE A OUTILS



Tous les opérateurs utilisés avec la LPE sont des résidus.

Un opérateur résiduel est la différence de deux opérateurs appelés opérateurs primitifs:

- Gradient morphologique $\longrightarrow \delta - \varepsilon$ (dilatation, érosion)
- Transformée chapeau haut-de-forme $\longrightarrow \mathbf{I} - \gamma$ (identité, ouverture)
- Fonction distance/érodé ultime $\longrightarrow \varepsilon_i \setminus \gamma(\varepsilon_i)$ (érosion, ouverture d'érosion)



De nouveaux résidus peuvent être définis

OPERATEURS RESIDUELS

DÉFINITION GÉNÉRALE D'UN RÉSIDU

Un opérateur résiduel élémentaire est un opérateur construit à l'aide de la différence de deux opérateurs

-Différence ensembliste pour les ensembles

$$r = \psi \setminus \zeta \quad \zeta \subset \psi$$

-Différence algébrique pour les fonctions

$$r = \psi - \zeta \quad \psi \geq \zeta$$

r s'appelle résidu, ψ et ζ les primitives

Il existe différentes manières d'utiliser et d'assembler ces résidus, en particulier lorsqu'ils sont générés par des familles $\{\psi_i\}$ et $\{\zeta_i\}$ de primitives

RÉSIDUS EN MORPHOLOGIE ENSEMBLISTE

Opérateurs basés sur la différence de deux familles d'opérateurs dépendant d'un paramètre i :

$$r_i = \psi_i \setminus \zeta_i \quad , \quad \psi_i \geq \zeta_i \quad \theta = \bigcup_{i \in I} r_i$$

Exemple trivial:

- Si $I = \{1\}$ (la famille d'opérateurs est réduite à une seule paire), en prenant $\psi = I$ et $\zeta = \varepsilon$ (érosion élémentaire), on a:
 $r = I \setminus \varepsilon$, contour intérieur de l'ensemble
- Si $\psi_i = \varepsilon_i$ et $\zeta_i = \varepsilon_{i+1}$, $\theta = I$



(l'intersection des résidus produit également une transformation résiduelle, mais elle est élémentaire, $\psi \setminus \zeta$)

RÉSIDUS EN MORPHOLOGIE ENSEMBLISTE

Exemples moins triviaux:

- **Erodé ultime**

$$\Psi_i = \varepsilon_i ; \zeta_i = \gamma_{\text{rec}} (\varepsilon_i)$$

- **Squelette par boules maximales:**

$$\Psi_i = \varepsilon_i ; \zeta_i = \gamma (\varepsilon_i)$$

- **Bissectrice conditionnelle**

$$\Psi_i = \varepsilon_i ; \zeta_i = \delta_{\varepsilon_i}^1 \circ \varepsilon_k (\varepsilon_i)$$

Ces opérateurs sont constitués d'un doublet:

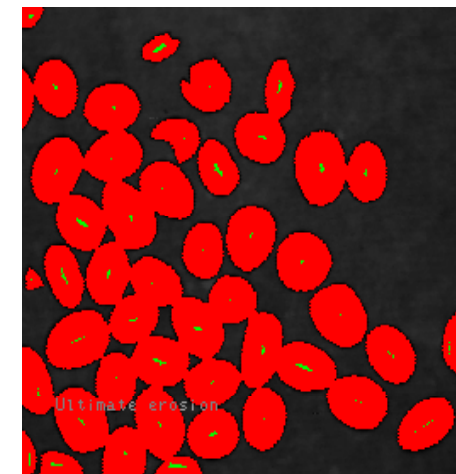
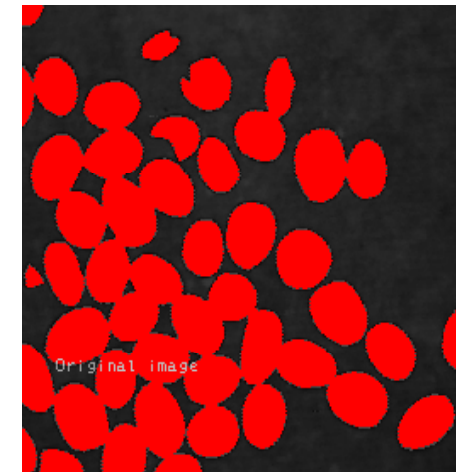
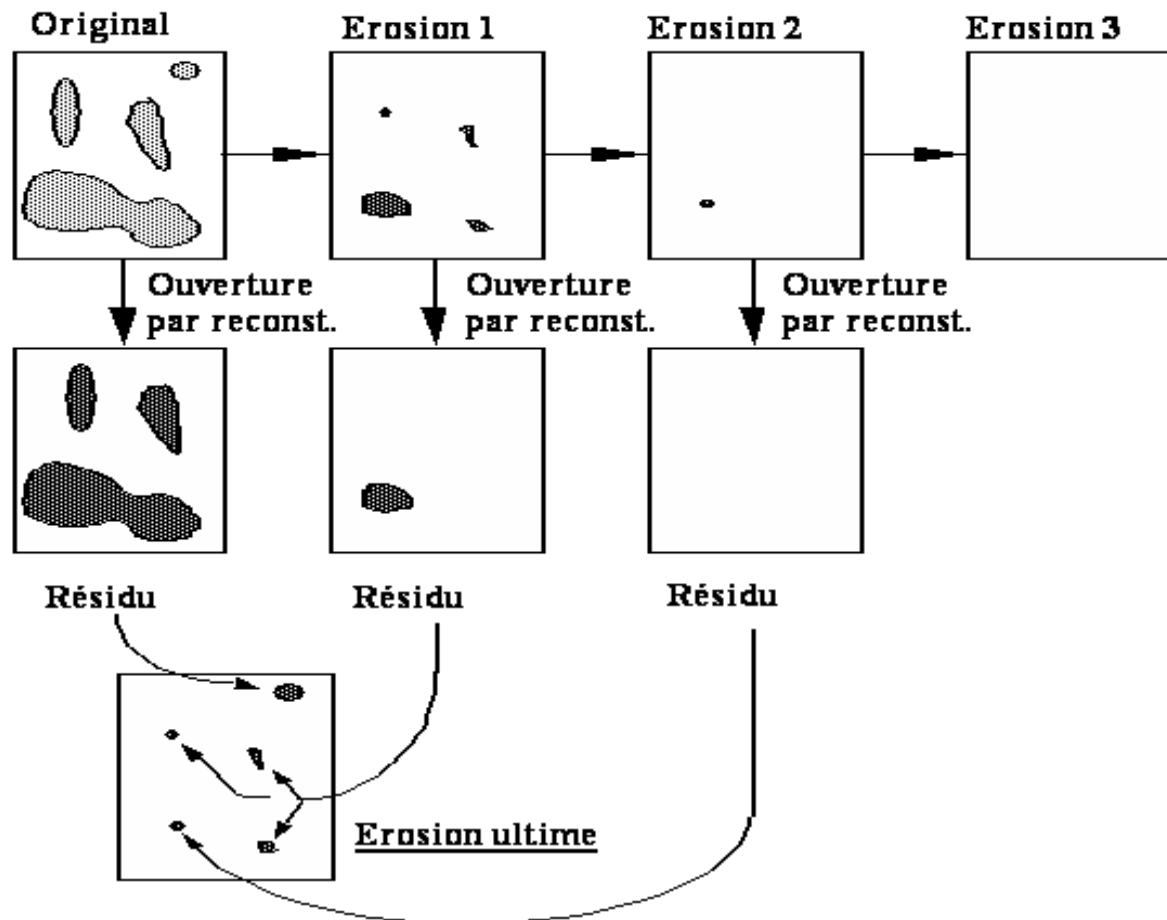
- **La transformation ensembliste θ**
- **Une fonction associée q : $q(x) = i + 1$ si et seulement si $x \in r_i$**

(On ajoute 1 à $q(x)$ afin d'obtenir une valeur strictement positive sur le support de la fonction)

ÉROSION ULTIME

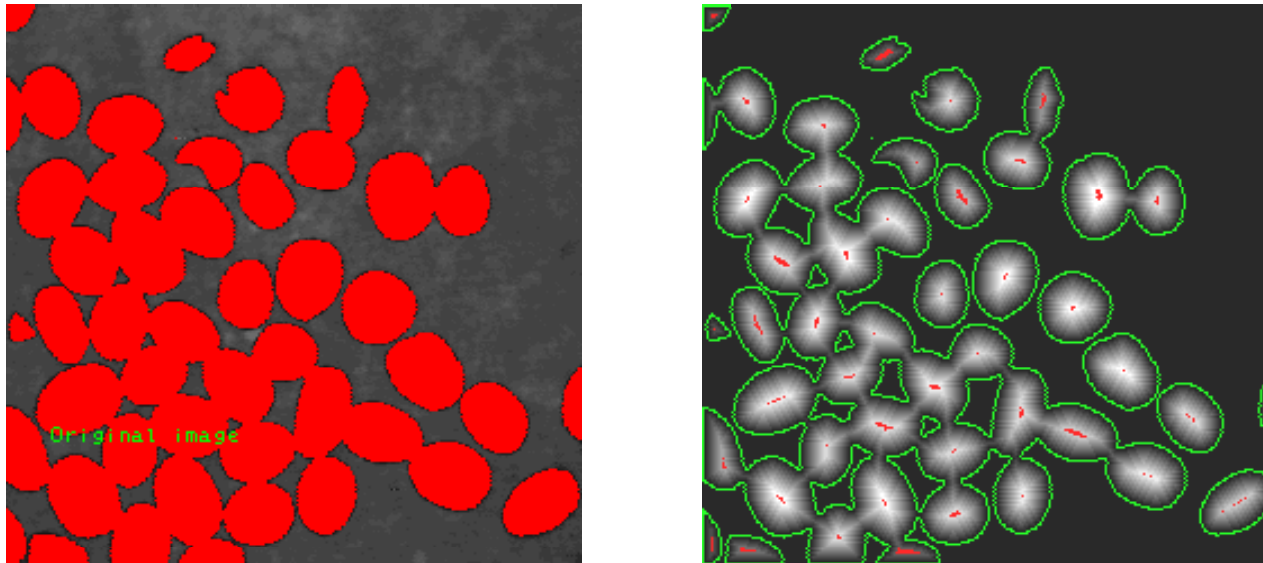
Les deux familles d'opérateurs sont constituées des érodés successifs de l'ensemble et de l'ouverture par reconstruction de chaque érodé

$$\psi_i = \varepsilon_i ; \zeta_i = \gamma_{rec}(\varepsilon_i)$$



EROSION ULTIME ET FONCTION DISTANCE

La fonction distance est construite par empilement des érodés successifs de X

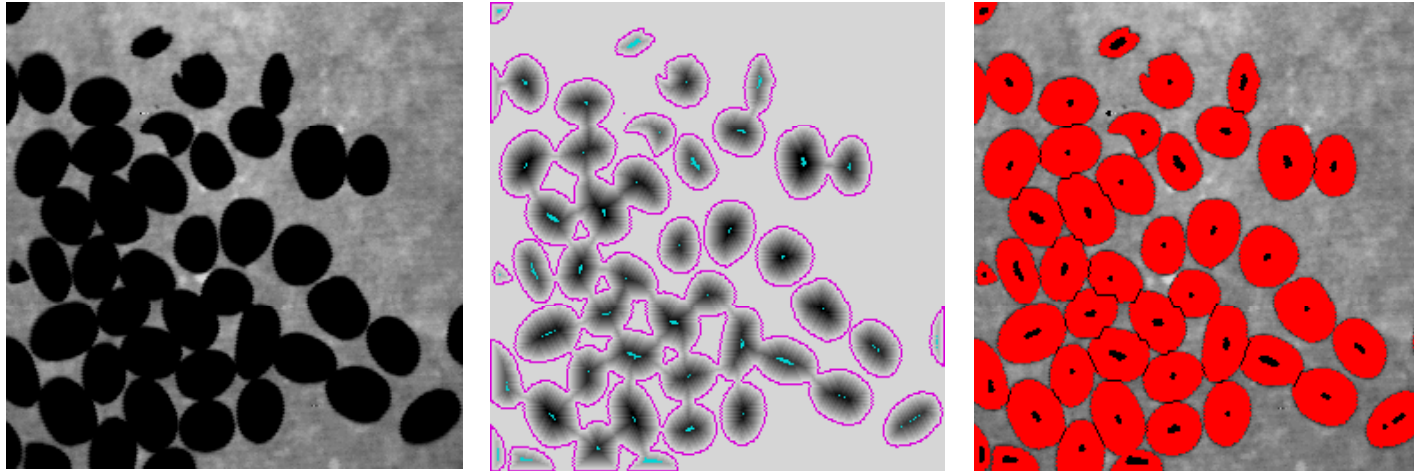


L'érodé ultime correspond alors aux maxima de cette fonction distance

La fonction associée q donne (à une unité près) la taille de l'érosion correspondant à l'apparition de chaque composant connexe de l'érodé ultime

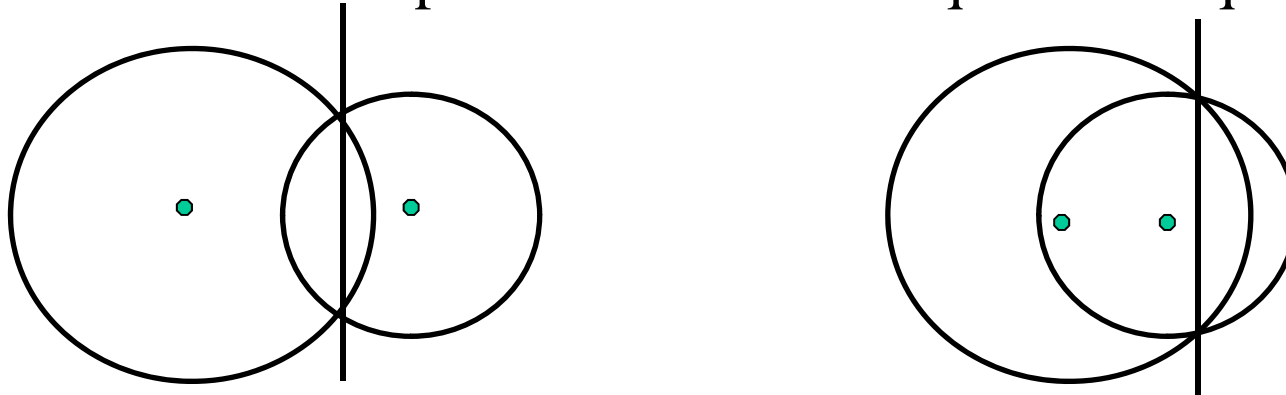
USAGE DE L'ÉRODÉ ULTIME

- Génération de marqueurs pour la segmentation



La fonction distance de l'ensemble est inversée et sa LPE est construite. L'ensemble marqueur est constitué des maxima de la fonction distance.

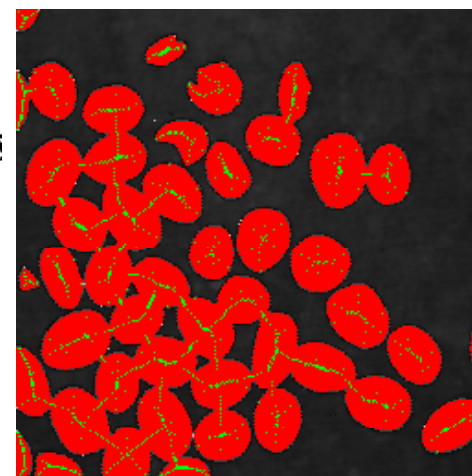
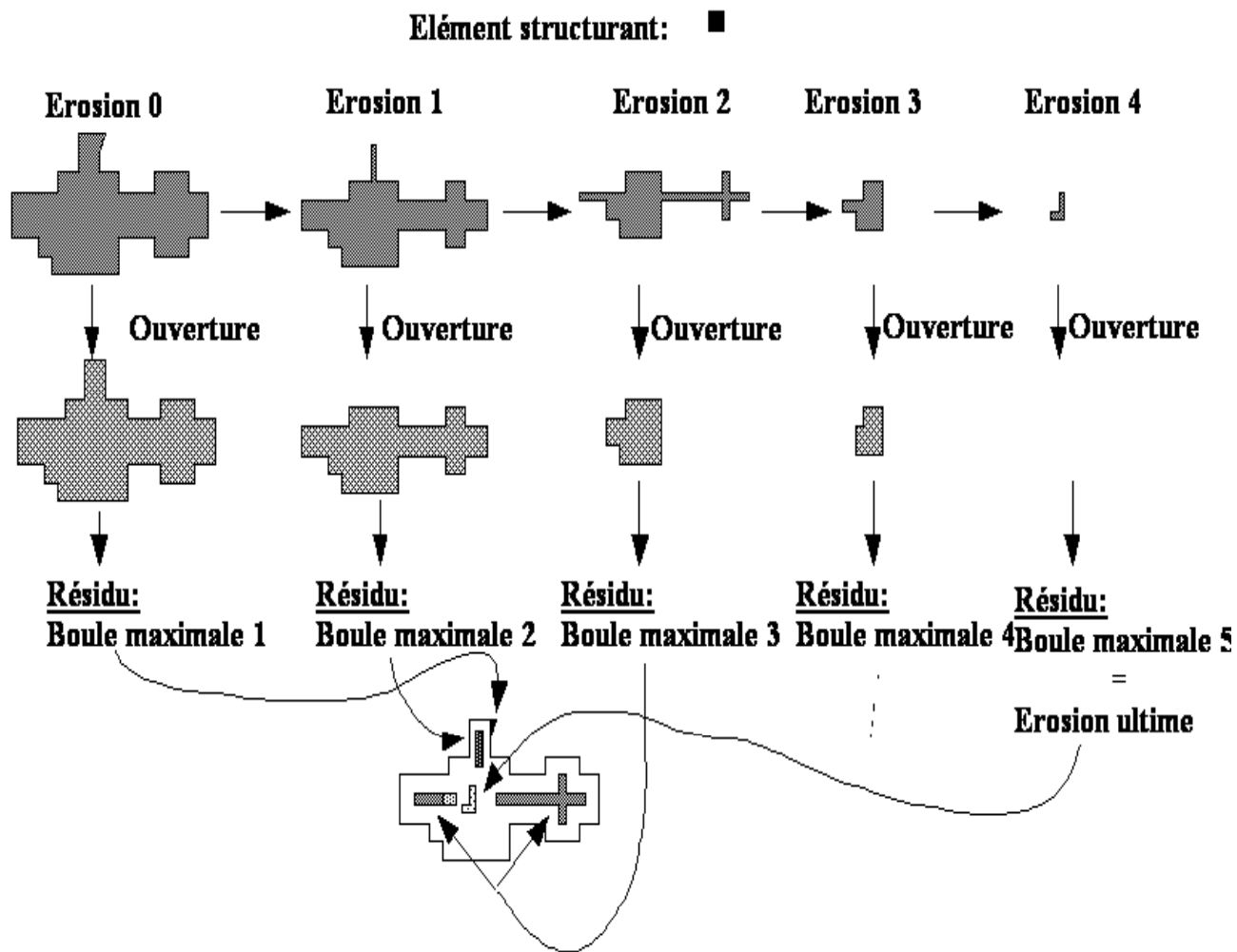
- Problème de la séparation de deux disques imbriqués



SQUELETTE PAR OUVERTURES

(ou squelette par boules maximales)

$$\Psi_i = \varepsilon_i ; \zeta_i = \gamma (\varepsilon_i)$$



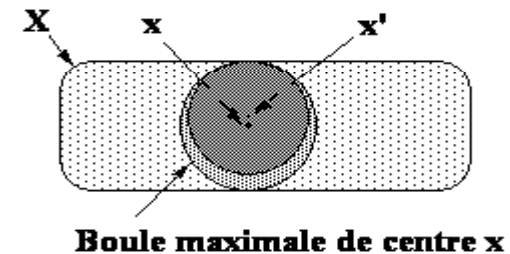
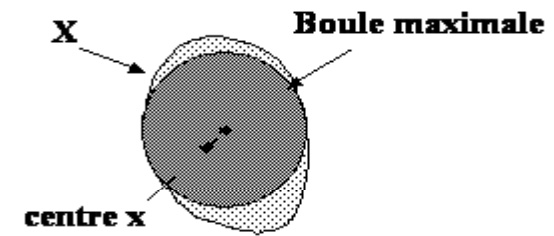
BOULES MAXIMALES

Une boule $B_n(x)$ de taille n et de centre x est maximale vis à vis de l'ensemble X , s'il n'existe aucun autre indice k et aucun autre centre y tels que:

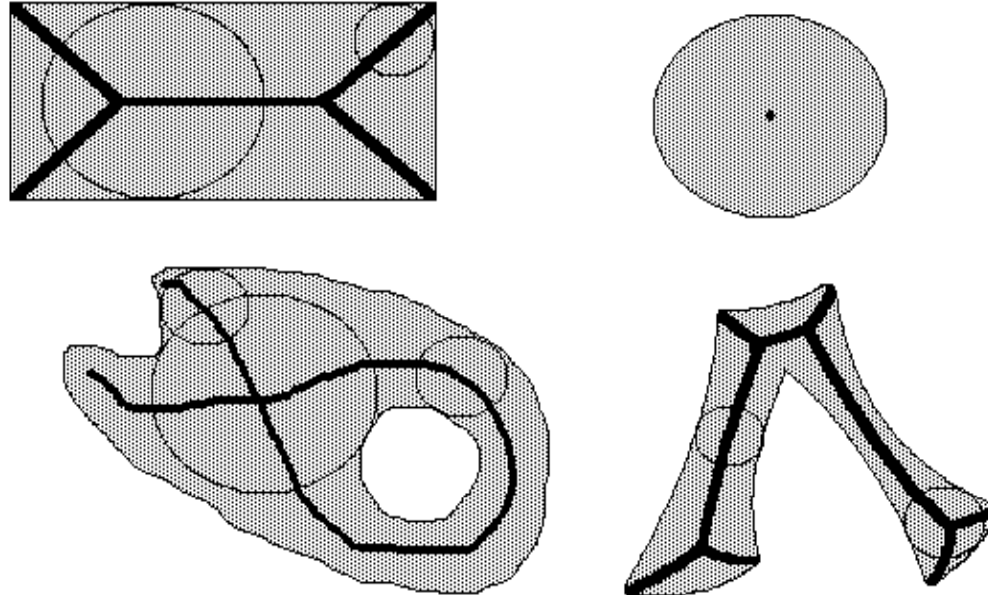
$$B_n(x) \subset B_k(y) \subset X \quad n \leq k$$

Le squelette d'un ensemble X selon une famille de boules $\{B_n\}$ est le lieu géométrique des centres de toutes ses boules maximales:

$$S(X) = \{x \in X : \exists B_n(x) \text{ maximale}\}$$



SQUELETTE PAR BOULES MAXIMALES



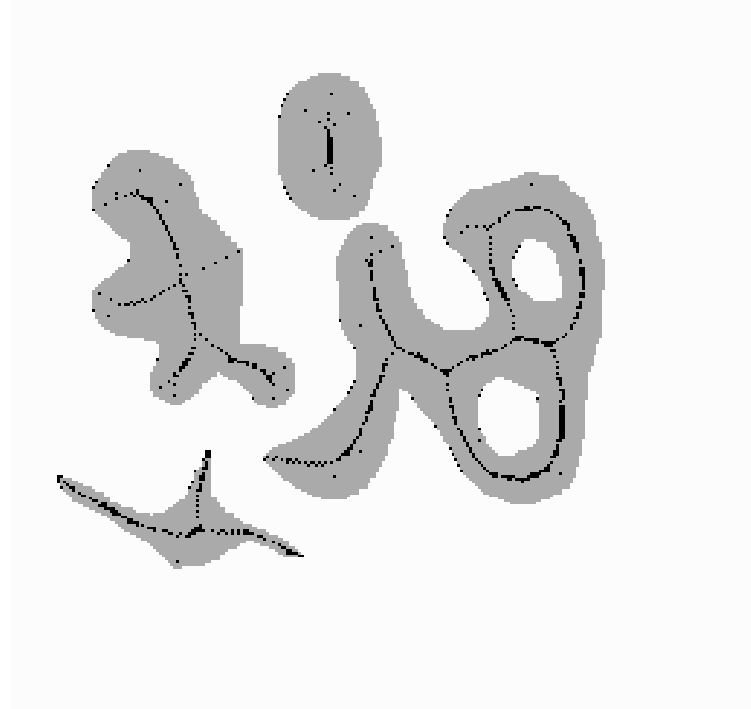
A chaque point x du squelette, on peut associer une fonction $q(x)$ prenant la valeur du rayon de la boule maximale implantée au point x . Cette fonction est appelée fonction d'étanchéité ou fonction d'extinction

$$q(x) = n : x \in S(X), B_n(x) \text{ maximale}$$

SQUELETTE PAR BOULES MAXIMALES ET PAR OUVERTURES

On peut montrer que le squelette par boules maximales et le squelette par résidus d'ouvertures sont identiques.

$$S(X) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \left[\varepsilon_i(X) \setminus (\gamma \circ \varepsilon_i(X)) \right]$$



- Chaque résidu r_i (noté aussi S_i) est le lieu des centres des boules maximales de rayon i
- Les boules maximales sont définies sur les familles homogènes de boules obtenues par les dilatations successives de la boule élémentaire B_0

PROPRIÉTÉS DU SQUELETTE PAR BOULES MAXIMALES

- Le squelette par boules maximales d'un ensemble connexe n'est pas connexe (d'une manière générale la connexité du squelette n'est pas avérée)
- Le squelette est anti-extensif et idempotent. Il n'est pas croissant:

$$S(X) \subset X$$

$$S(S(X)) = S(X)$$

$$X \subset Y \text{ n'implique pas } S(X) \subset S(Y)$$

Cependant la propriété suivante est vraie:

$$S(\varepsilon^n(X)) \subset S(X), \forall n \geq 0$$

PROPRIÉTÉS DU SQUELETTE PAR BOULES MAXIMALES

- Contrairement à la plupart des opérateurs morphologiques, la squelettisation est une opération inversible.

L'ensemble X , ainsi que ses érodés, ses dilatés et ses ouverts, peuvent être construits à partir du squelette et de la fonction d'extinction:

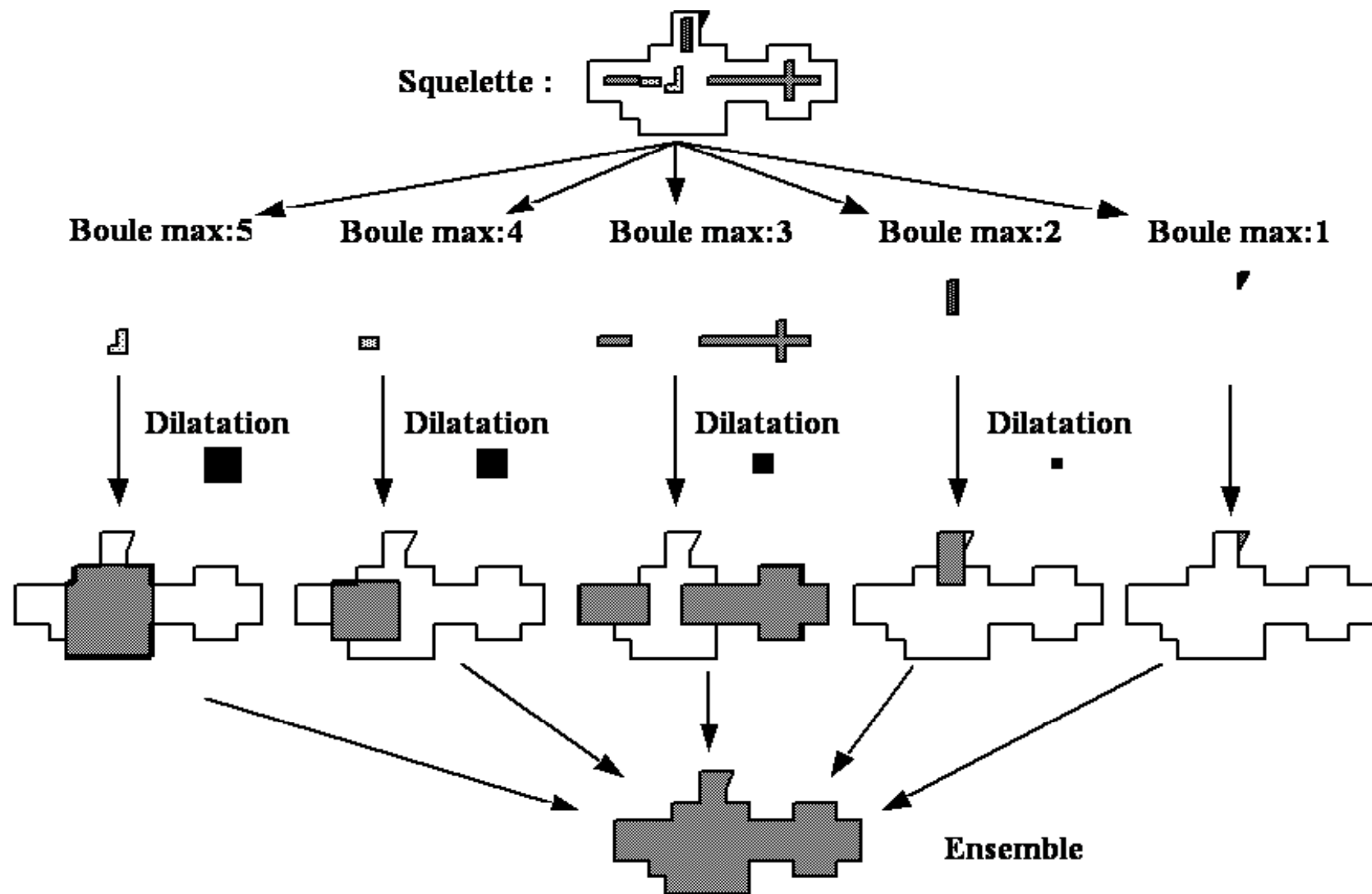
$$X = [X \setminus \gamma(X)] \cup \gamma(X) = S_0(X) \cup \delta(S_1(X)) \cup \delta^2(S_2(X)) \cup \dots$$

d'où, finalement:

$$X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \delta^i(S_i(X))$$

La transformation, réversible, fournit une autre représentation de X :
La donnée de X ou du doublet $[S(X), q]$ sont équivalents

RÉVERSIBILITÉ DU SQUELETTE



PROPRIÉTÉS (SUITE)

La donnée de $S(X)$ et de q permet de construire également:

- les érosions de X

$$\varepsilon^n (X) = \bigcup_{i \geq n} \delta^{i-n} (S_i (X))$$

- les dilatations de X

$$\delta^n (X) = \bigcup_{i \in I} \delta^{i+n} (S_i (X))$$

- les ouvertures de X

$$\gamma^n (X) = \bigcup_{i \geq n} \delta^i (S_i (X))$$

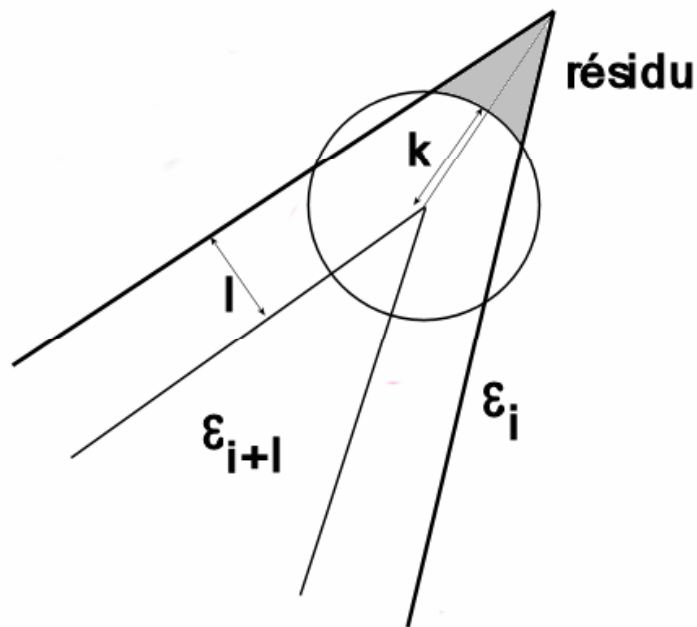
(on ne peut pas reconstruire les fermetures – *Pourquoi?*)

L'érodé ultime est toujours un sous-ensemble du squelette par boules maximales. L'érodé ultime correspond aux centres des boules maximales ultimes.

BISSECTRICE CONDITIONNELLE

La bissectrice conditionnelle est le résidu entre la famille d'érosions de taille 1 et la dilatation géodésique de taille k ($k > 1$) de ces érosions:

$$\psi_i = \varepsilon_i ; \zeta_i = \delta_{\varepsilon_i}^k \circ \varepsilon_i (\varepsilon_i)$$



Apparition d'un résidu quand
 $k < l/\sin(\alpha)$
 $l/k > \sin(\alpha) = q'(x)$

La bissectrice conditionnelle est un seuil sur la dérivée de la fonction d'étanchéité

La bissectrice permet une identification plus précise des composantes des ensembles que l'érosion ultime

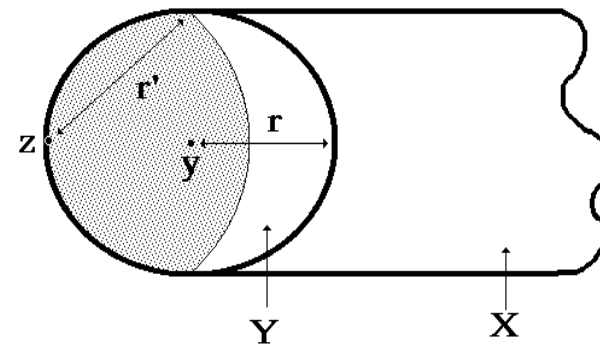
RÉSIDUS GÉODÉSINIQUES

Tous les opérateurs résiduels définis dans un contexte euclidien peuvent être transposés dans des espaces géodésiques:

- Les boules géodésiques peuvent être définies à partir de la distance géodésique

$$B_x(x, r) = \{y \in X : d_x(x, y) \leq r\}$$

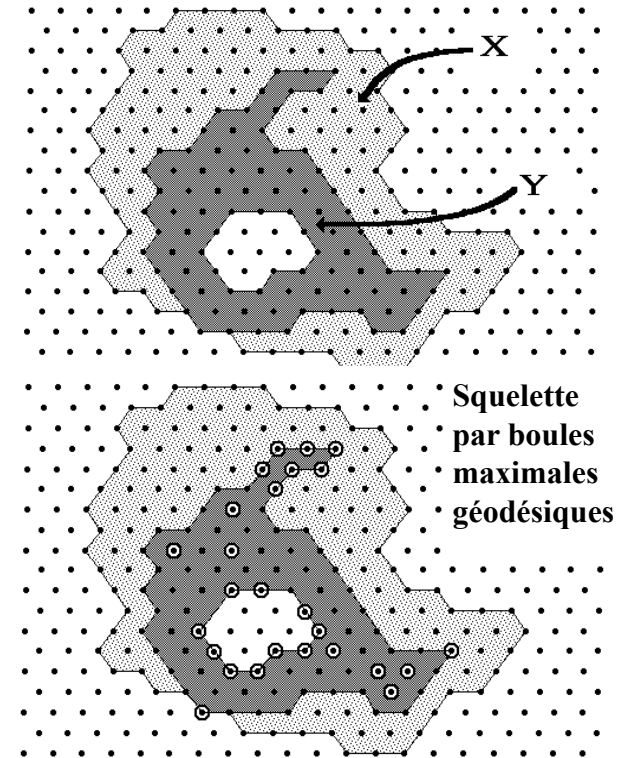
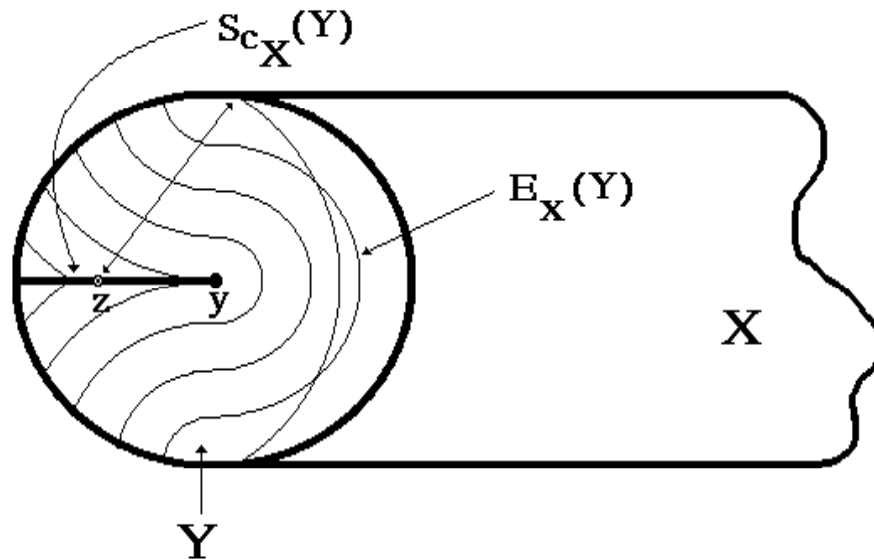
- Les boules maximales géodésiques ont la même définition que les boules maximales euclidiennes (mutatis mutandis). Il faut néanmoins éviter certains pièges...



SQUELETTE GÉODÉSIQUE

Le squelette par boules maximales géodésiques $S_X(Y)$ d'un ensemble Y inclus dans un espace géodésique X est défini par:

$$S_X(Y) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \left[\varepsilon_X^i(Y) \setminus (\gamma_X \circ \varepsilon_X^i(Y)) \right]$$



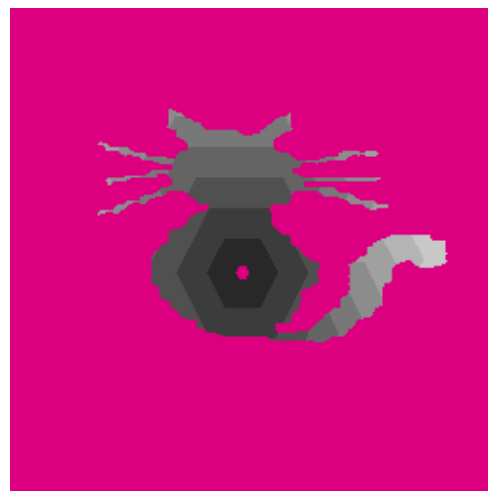
Construction du squelette géodésique

EXTRÉMITÉS DE PARTICULE

L'érodé ultime géodésique peut être utilisé pour mettre en évidence les extrémités d'une particule simplement connexe

- On lui associe un *centroïde* C (à l'aide de l'amincissement D_{thin} , voir plus loin)
- Les extrémités de la particule sont alors définies comme l'érodé ultime géodésique, dans X , de l'ensemble $Y = X \setminus C$

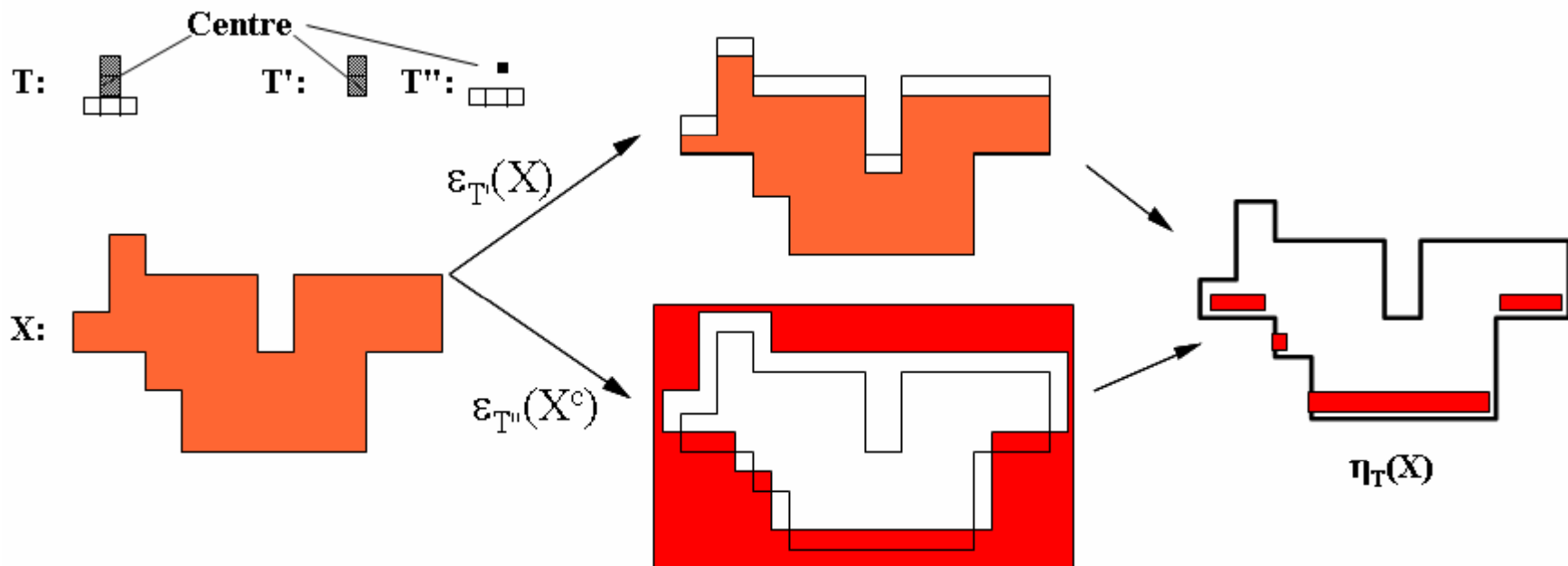
$$\text{Extr}(X) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \left[\varepsilon_X^i(Y) \setminus \left(\gamma^{\text{rec}} \left(\varepsilon_X^i(Y); \varepsilon_X^{i+1}(X) \right) \right) \right]$$



LA TRANSFORMÉE EN TOUT OU RIEN

La transformation en tout ou rien (HMT) η_T généralise à la fois érosion et dilatation, en mettant en jeu le couple d'éléments structurants disjoints $T = \{T', T''\}$

$$\eta_T(X) = \{x : T''(x) \subset X^c \text{ et } T'(x) \subset X\} = \varepsilon_{T'}(X) \cap \varepsilon_{T''}(X^c)$$

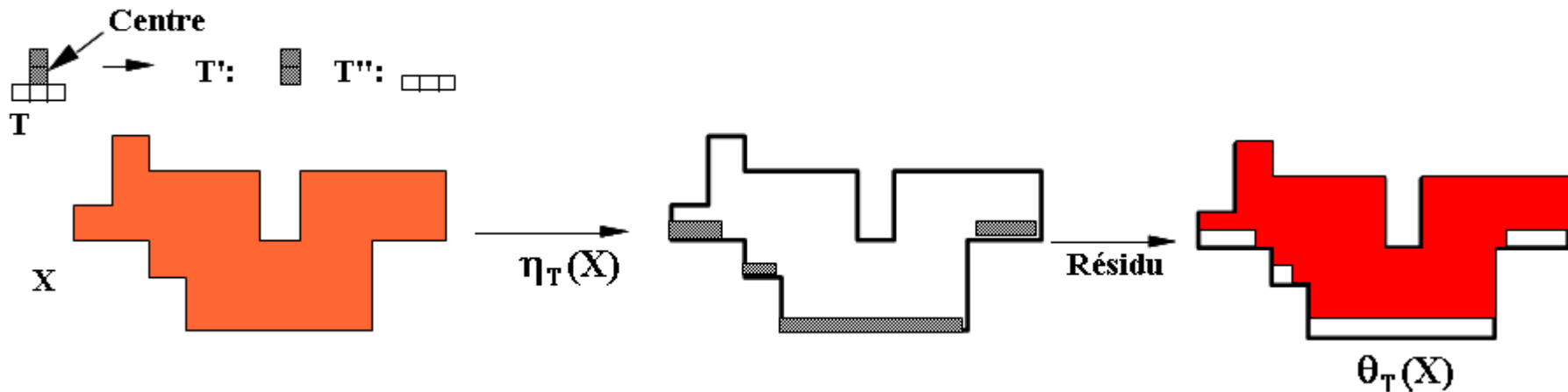


La HMT est un résidu: $\eta_T(X) = \varepsilon_{T'}(X) \setminus \delta_{T''}(X)$

AMINCISSEMENT, ÉPAISSISSEMENT

L'amincissement θ_T est le résidu entre l'ensemble initial et sa transformation par tout ou rien :

$$\theta_T(X) = X \setminus \eta_T(X) = X \setminus \left[\varepsilon_{T'}(X) \cap \varepsilon_{T''}(X^c) \right]$$



L'épaississement ξ_T est introduit alors par dualité pour le complément:

$$\xi_T(X) = X \cup \eta_T(T) = X \cup \left[\varepsilon_{T'}(X) \cap \varepsilon_{T''}(X^c) \right]$$

PROPRIÉTÉS

- L'amincissement selon $T=(T',T'')$ est le dual pour le complément de l'épaississement selon $T^*=(T'',T')$:

$$\theta_T (X) = \left[\xi_{T^*} (X^c) \right]^c$$

- Tout amincissement est anti-extensif, et tout épaississement extensif. Pour que ces opérations ne se réduisent pas à l'identité, il faut que l'origine de T appartienne à T' dans le cas des amincissements ou à T'' pour les épaississements.
- Il existe des amincissements simples. Cependant, les plus utiles sont ceux qui respectent une propriété topologique particulière, l'homotopie.

COMBINAISON D'AMINCISSEMENTS

On peut combiner les amincissements de deux manières différentes:

- Séquentiellement:

Séquence $\{T_i\}$ d'éléments structurants

$$\theta_{T_n} \circ \dots \circ \theta_{T_i} \circ \dots \circ \theta_{T_1}$$

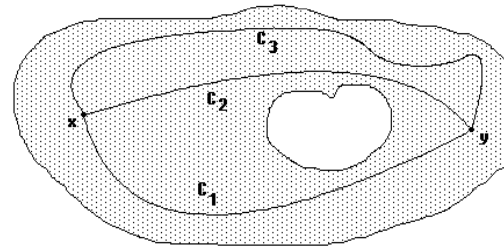
- Sous forme d'unions:

Famille $\{T_i\}$ d'éléments structurants

$$I \setminus \left(\bigcup_i \eta_{T_i} \right) = I \cap \left(\bigcap_i \eta_{T_i}^c \right) = \bigcap_i (I \setminus \eta_{T_i}) = \bigcap_i \theta_{T_i}$$

HOMOTOPIE

Propriété relative à la déformation de chemins et de lacets



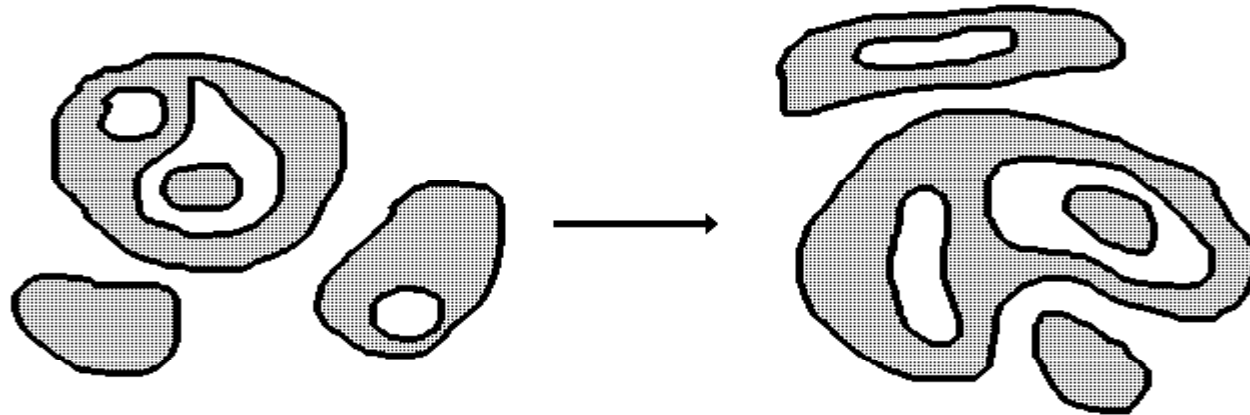
Définition intuitive:

- Deux chemins (ou lacets) d'un espace X connexe par arc sont homotopes si on peut appliquer de façon continue l'un sur l'autre
- L'homotopie est une relation d'équivalence
- Deux espaces connexes par arcs sont homotopes (homotopiquement équivalents) si on peut appliquer l'un sur l'autre par une suite continue de déformations)

TRANSFORMATIONS HOMOTOPIQUES

Une transformation ψ est homotopique si l'ensemble de départ X et d'arrivée $Y = \psi(X)$ sont homotopes c'est-à-dire s'il existe une transformation bicontinue pour passer de l'un à l'autre, telle que

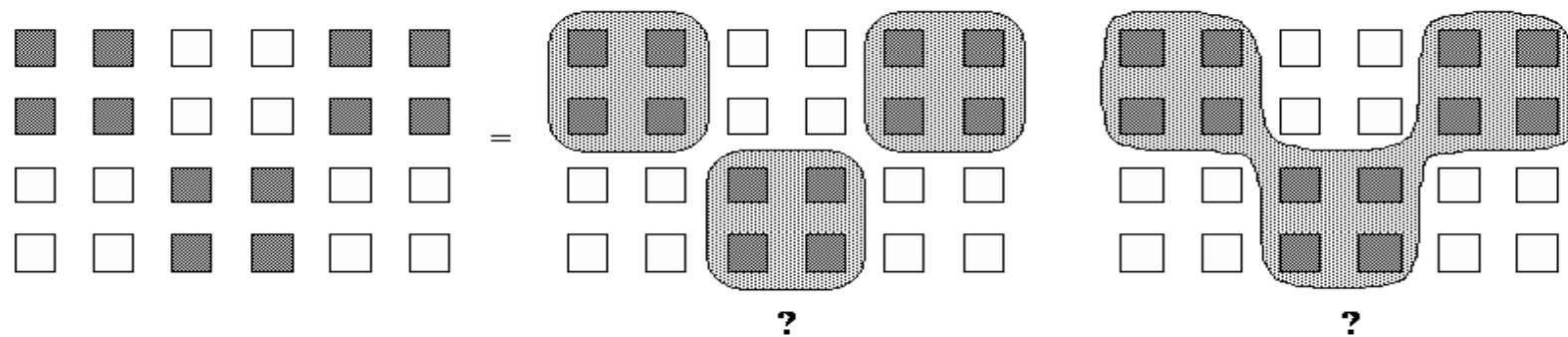
- chaque composante connexe de X contient le même nombre de trous que son transformé Y ,
- chaque trou de X contient le même nombre de composantes connexes que son transformé Y .



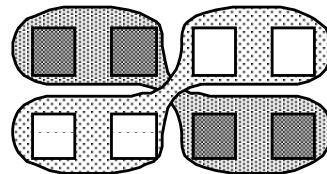
l'homotopie décrit l'organisation des composantes connexes et des trous entre eux.

CONNEXITÉ DES ESPACES DIGITAUX

Dans le cas digital, la définition de l'homotopie dépend de la donnée d'une *connexité par arcs*. Or, il n'est pas trivial de définir combien de composantes la figure suivante possède :



Il faut choisir des règles de connexion portant sur les configurations diagonales pour que la connexité réalisée ait une structure de graphe planaire.



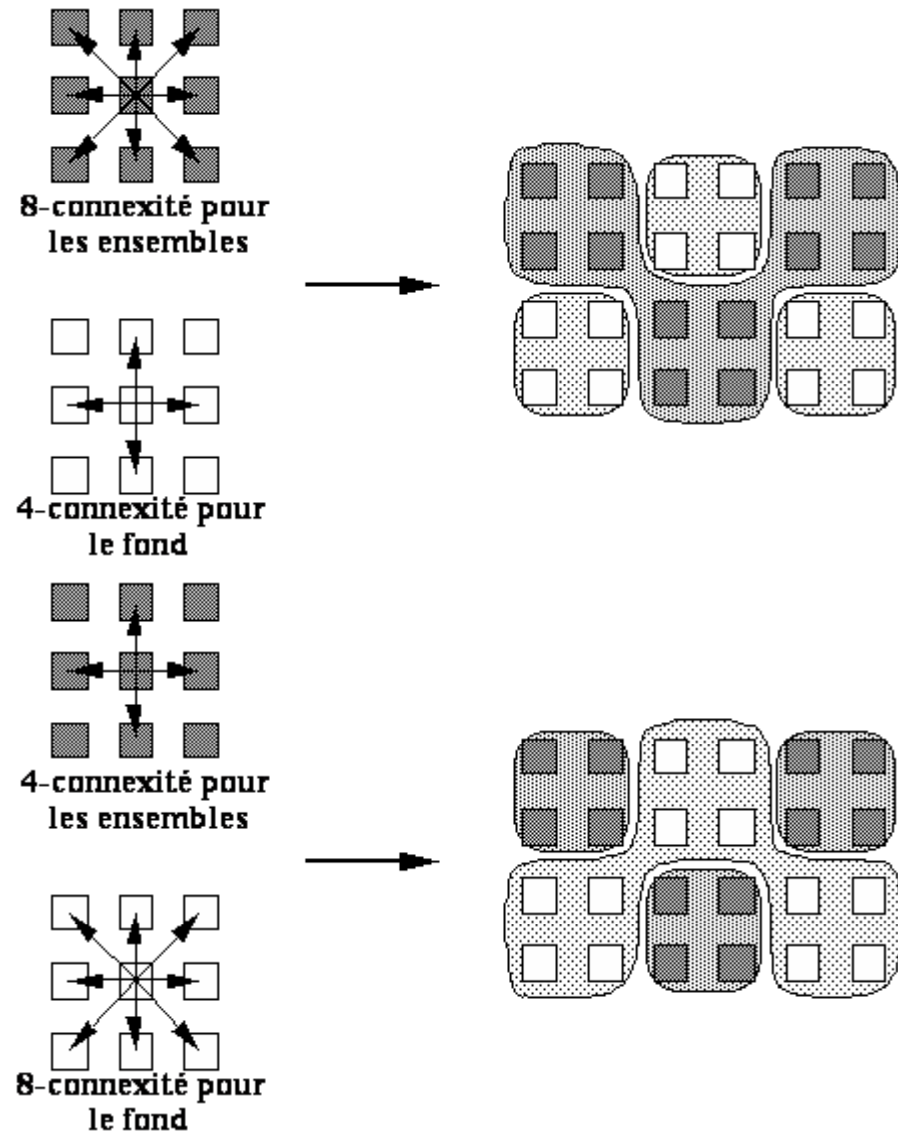
CONNEXITÉ ET MAILLE CARRÉE

En maille carrée, deux types de connexité sont possibles:

- 8-connexité pour les ensembles et 4-connexité pour le fond

- 4-connexité pour les ensembles et 8-connexité pour le fond

Cette structure est très pénalisante et complique les opérateurs topologiques

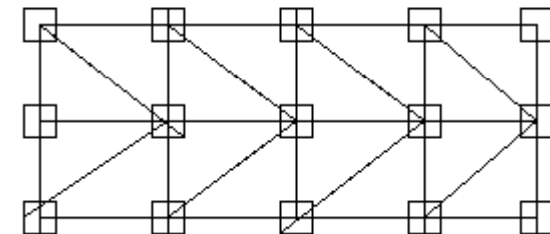
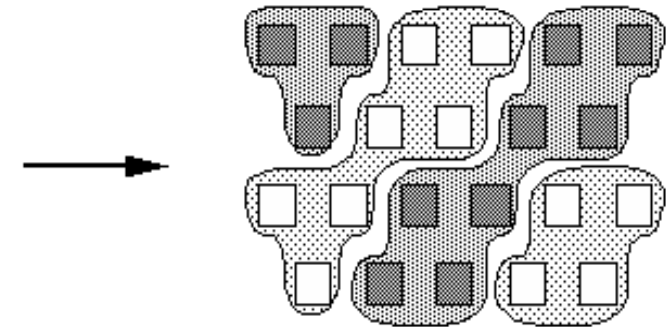
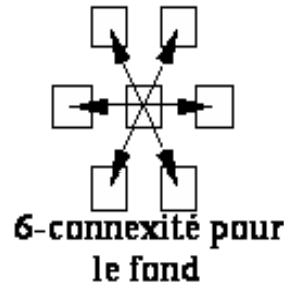
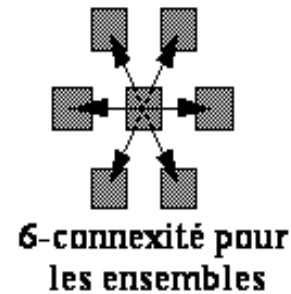


CONNEXITÉ EN TRAME HEXAGONALE

En trame hexagonale, on peut définir une 6-connexité À la fois pour les formes et pour le fond

Simplification des algorithmes (moins de voisins et configuration auto-duale

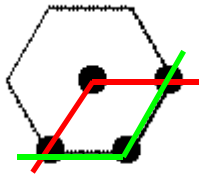
En pratique, la maille hexagonale peut être construite à partir de la maille carrée.



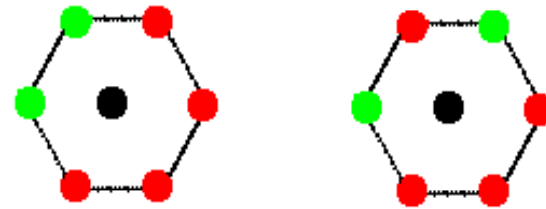
AMINCISSEMENTS HOMOTOPIQUES

On peut analyser toutes les configurations d'éléments structurants T définissables (aux rotations, symétries près) sur la boule élémentaire et déterminer lesquels préservent l'homotopie des chemins passant dans la boule

Cas de la trame hexagonale



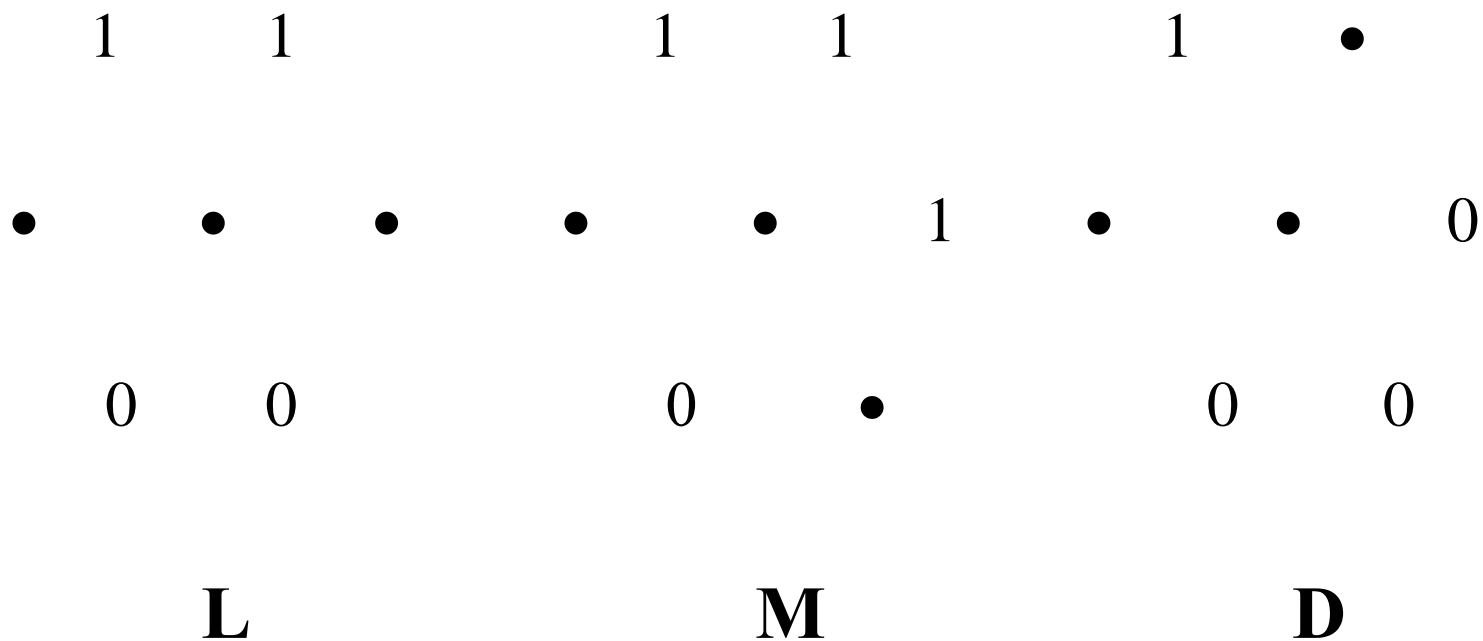
Le chemin rouge peut être remplacé par le chemin vert homotope après suppression du point central



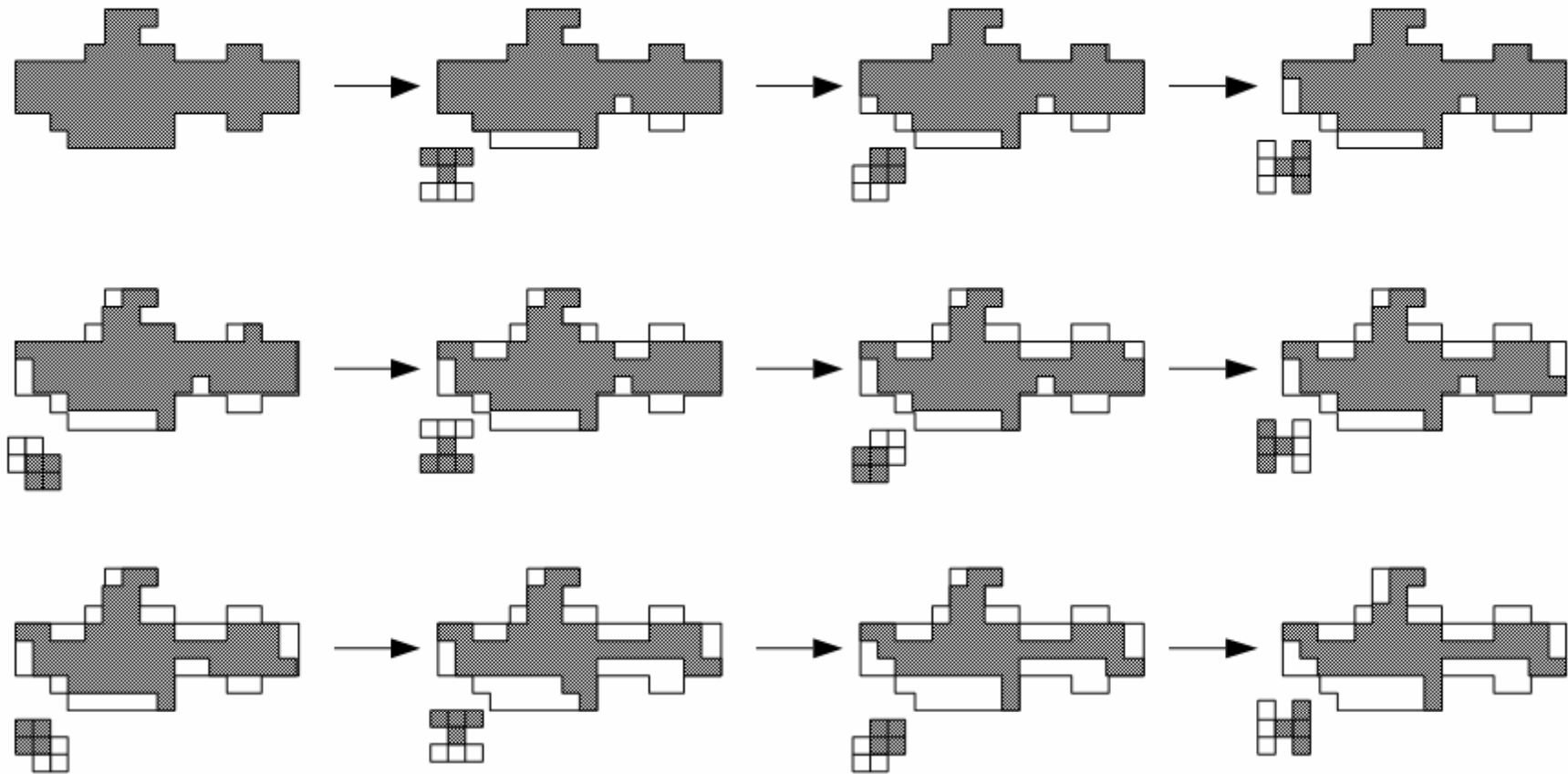
Seules les configurations où T' et T'' sont simplement connexes produisent des amincissements homotopiques

ELÉMENTS STRUCTURANTS L, M ET D

En trame hexagonale, en regroupant certaines configurations, on définit trois familles d'éléments structurants produisant des amincissements homotopiques à condition d'être utilisés séquentiellement



EXEMPLE D'AMINCISSEMENT SÉQUENCIEL



AMINCISSEMENTS PAR D



- D est utilisé pour mettre en évidence les composantes simplement connexes (elles sont homotopes à un point)
- On l'utilise également pour construire un centroïde de la composante connexe (ce n'est pas le centre géodésique)

AMINCISSEMENT PAR M



- L'amincissement est rarement utilisée (le résultat est beaucoup trop chaotique!)
- L'épaississement est utilisé dans un contexte géodésique

SQUELETTE L



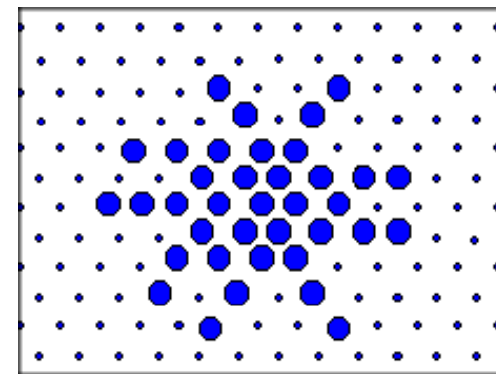
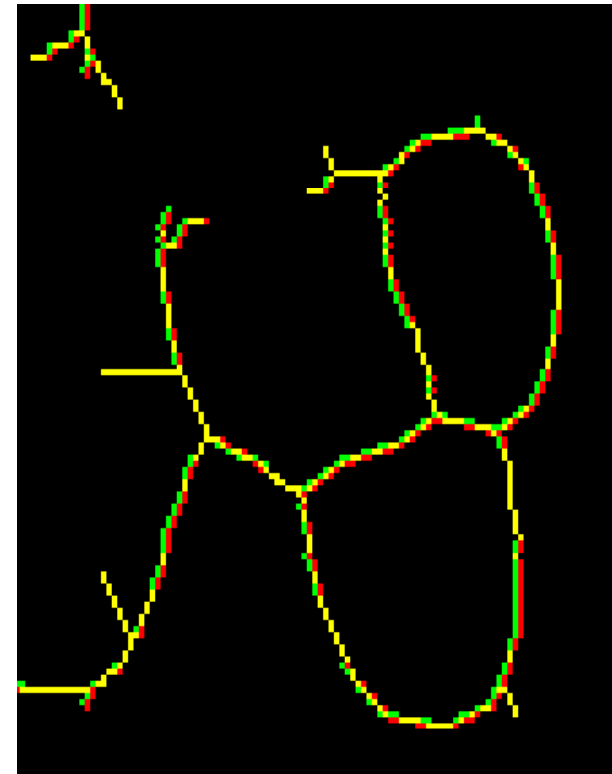
Cet amincissement est souvent appelé squelette car:

- Il est connexe
- Il est construit à l'aide d'un algorithme de propagation
- Le résultat « ressemble » à un squelette

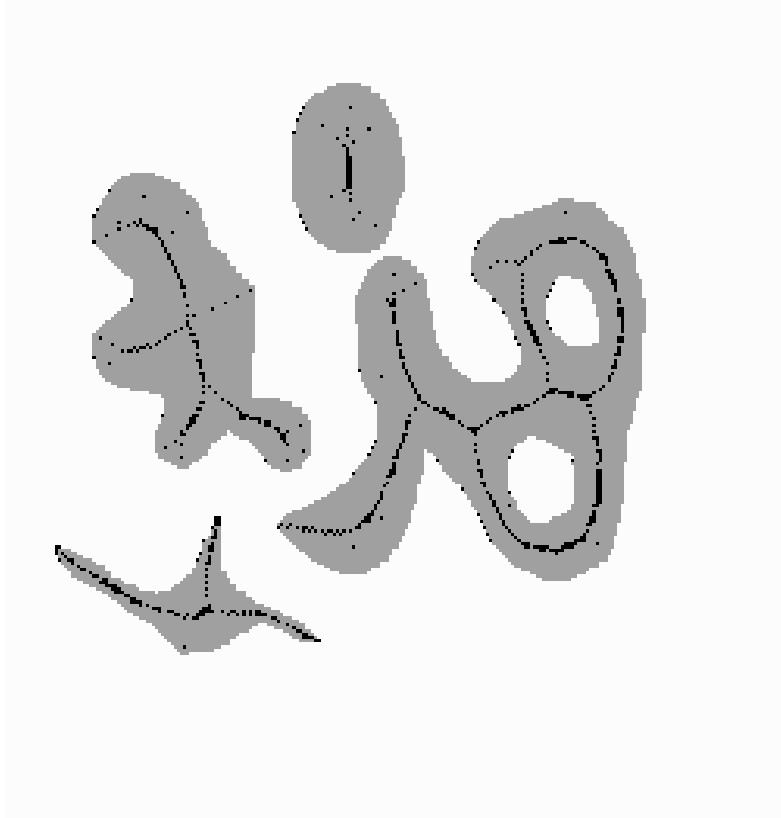
Cependant, il présente de nombreux défauts

DÉFAUTS DU SQUELETTE L

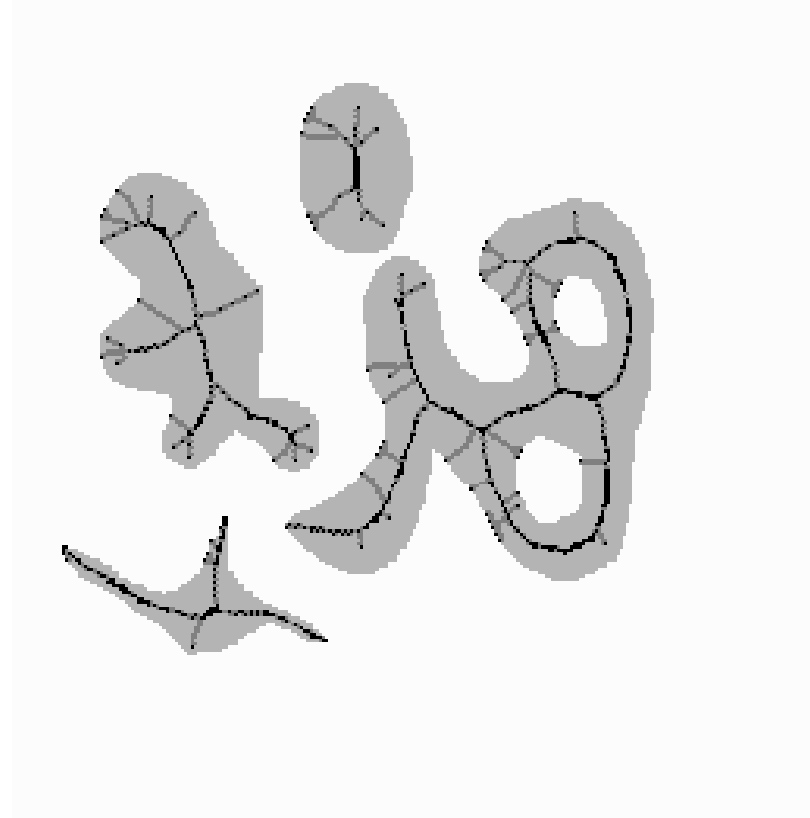
- Il ne contient pas le squelette par boules maximales
- Le résultat final diffère selon la séquence d'éléments structurants
- Ce squelette peut être très épais
- Le résultat est souvent biaisé et les biais peuvent être très importants



EXEMPLE DE SQUELETTE CONNEXE NON BIAISÉ



Squelette par boules maximales



Squelette connexe contenant le squelette par boules maximales

USAGE DU SQUELETTE

Le squelette en tant que tel a peu d'intérêt:

- Le squelette par boules maximales n'est pas un bon descripteur de forme
- La représentation d'un ensemble par son squelette et sa fonction d'étanchéité ne conduit pas à la définition d'algorithmes plus performants pour effectuer les opérations morphologiques élémentaires
- Le squelette connexe présente de nombreux défauts

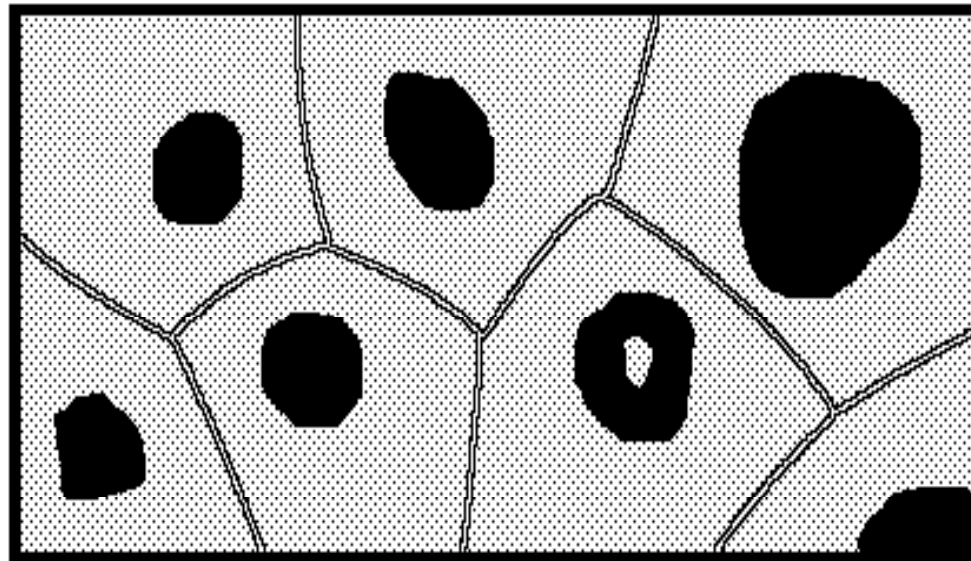
Le squelette par zone d'influence (SKIZ) est beaucoup plus utilisé.

LE SQUELETTE PAR ZONES D'INFLUENCE

X , ensemble formé de n composantes connexes $\{X_i\}$

- Zone d'influence $Z(X_i)$ de X_i : ensemble des points plus proches de X_i que de toute autre composante connexe de X :

$$z(X_i) = \left\{ x : \forall j \neq i, d(x, X_i) < d(x, X_j) \right\}$$



CONSTRUCTION DU SKIZ

Le SKIZ est construit à l'aide d'épaississements homotopiques combinés à un opérateur éliminant les barbules

L'épaississement sur la trame hexagonale est réalisé avec M (indispensable dans le cas où une composante connexe est réduite à un point) et l'ébarbulage avec un élément structurant noté E:

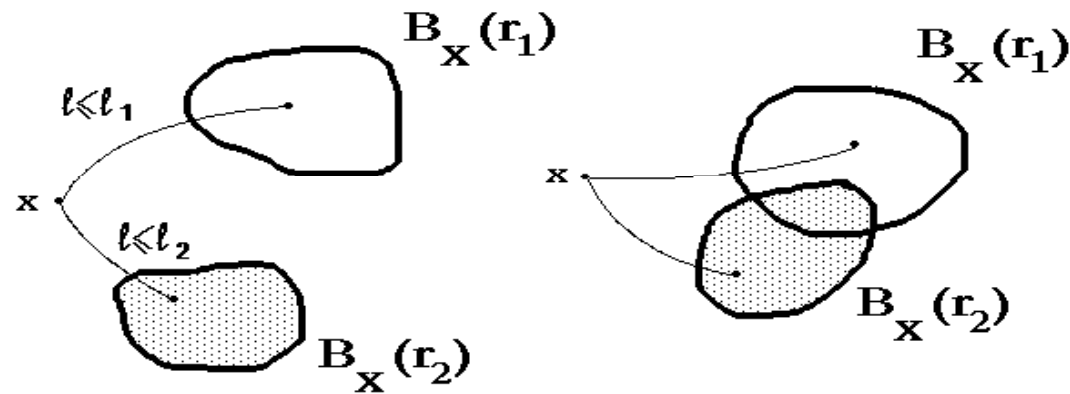
$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & 0 & & & . & . \\ M & & . & . & 0 & & E & 1 & 0 & 1 \\ & & 1 & . & & & & 1 & 1 & \end{array}$$

Le SKIZ n'est pas une transformée homotopique (les trous des composantes connexes sont éliminés).

L'algorithme par épaississements engendre quelques biais

AMINCISSEMENTS, ÉPAISSISSEMENTS GÉODÉSQUES

On peut définir des amincissements et épaississements géodésiques. Les éléments structurants sont définis à l'aide de boules et de distances géodésiques. Ces éléments structurants ne sont pas « rigides » mais déformables.



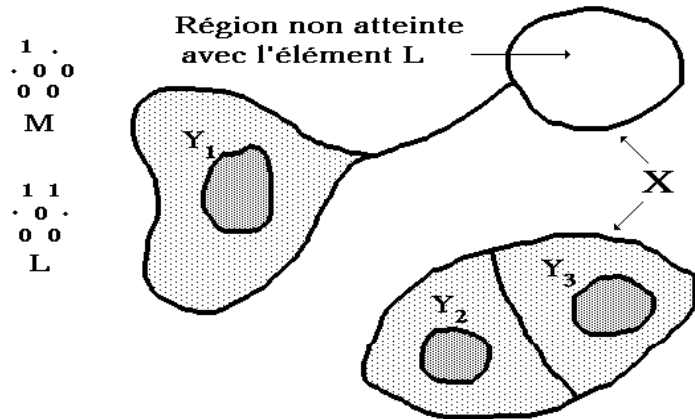
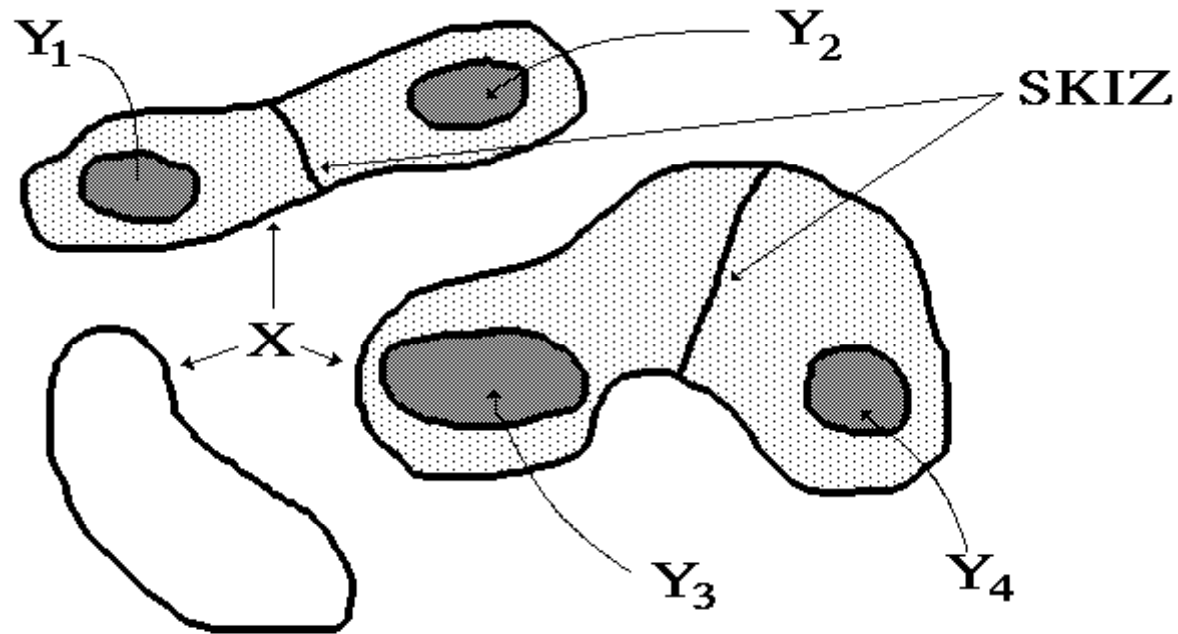
SKIZ GÉODÉSIQUE

Ensemble Y formé de composantes connexes et inclus dans un espace géodésique X

Zone d'influence d'une composante connexe: ensemble des points de X à une distance géodésique finie de la composante connexe et plus proche de celle-ci que de tout autre composante connexe:

$$Z_X(Y_i) = \left\{ \begin{array}{l} x \in X : d_X(x, Y_i) < +\infty \\ \text{et} \\ \forall j \neq i, d_X(x, Y_i) < d_X(x, Y_j) \end{array} \right\}$$

SKIZ GÉODÉSIQUE, CONSTRUCTION



L'utilisation de l'élément structurant M est indispensable pour assurer la propagation dans les régions de X de faible épaisseur

RÉSIDUS NUMÉRIQUES

On peut définir en numérique des résidus élémentaires par différence entre deux transformations ψ et ζ (avec $\zeta \leq \psi$)

Les exemples les plus courants de résidus élémentaires numériques sont le gradient morphologique et la transformée chapeau haut-de-forme:

- **Gradient morphologique $\delta_i - \varepsilon_i$
(demi-gradients $I - \varepsilon_i$ et $\delta_i - I$)**

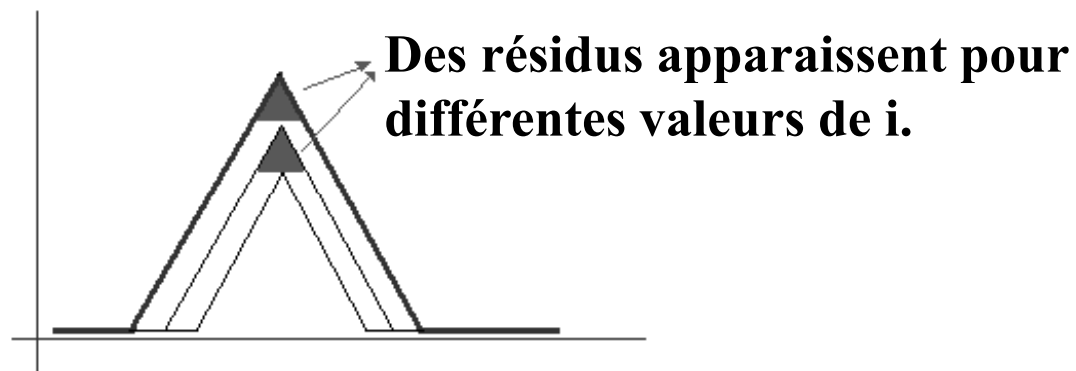
Transformée chapeau haut-de-forme $I - \gamma_i$

RÉSIDUS EN MORPHOLOGIE NUMÉRIQUE

On peut tenter d'étendre aux fonctions les définitions des résidus ensemblistes.

Cette extension fait apparaître certaines difficultés:

- La différence d'ensembles et la soustraction de fonctions ne sont pas vraiment équivalents.
- Plusieurs résidus différents peuvent apparaître en un point x problème de la définition de la fonction associée.



TRANSFORMÉES RÉSIDUELLES NUMÉRIQUES, DÉFINITION

Définition basée sur l'observation de l'évolution verticale de l'image au cours de sa transformation.

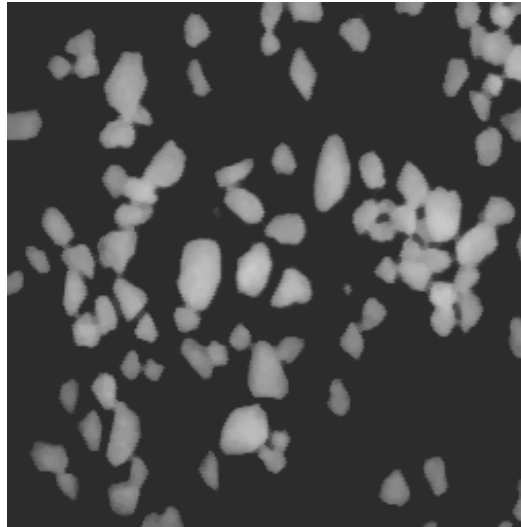
Définitions

- **Transformation** $\theta = \sup_{i \in I} (\psi_i - \zeta_i)$
- **Fonction associée** $q = \operatorname{argmax}(r_i) + 1 = \operatorname{argmax}(\psi_i - \zeta_i) + 1$
 $q(x) = \max(i) + 1 \quad r_i(x) > 0 \text{ et maximum}$

Dans le cas binaire, cette définition et la définition classique sont identiques.

EXEMPLES (1)

Erodé ultime



θ

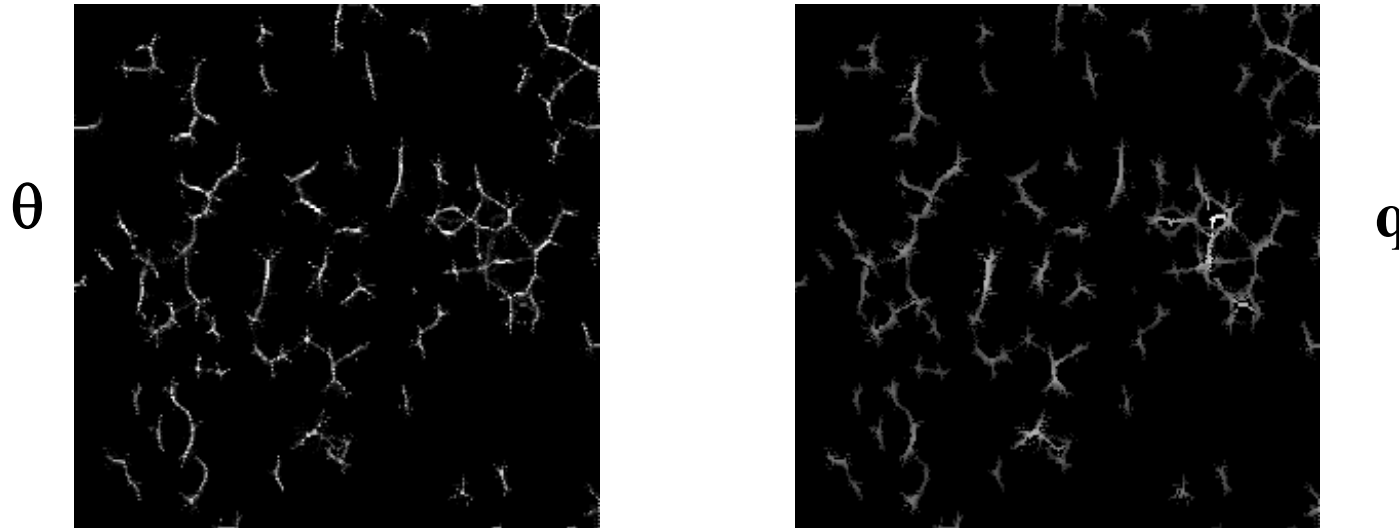


q



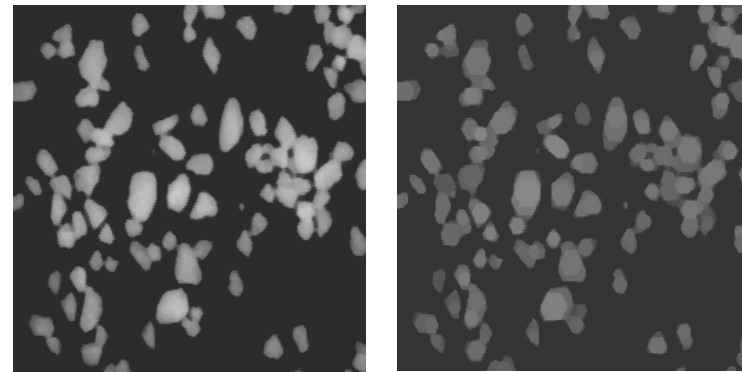
EXEMPLES (2)

Squelette par « cylindres maximaux significatifs »



Problème de la reconstruction: Il n'est généralement pas possible de reconstruire entièrement la fonction à l'aide de son squelette

$$\rho(f) = \sup_{x \in E} (\theta(x) \oplus B_{q(x)})$$



NOUVEAUX RÉSIDUS

- **L'extension de la définition des résidus ensemblistes comme l'érodé ultime ou les squelettes par ouvertures aux fonctions est intéressante.**
- **Cette définition des résidus permet surtout d'introduire, en numérique et en binaire, de nouvelles transformations résiduelles intéressantes tant du point de vue de la transformation elle-même que de la fonction associée.**

On introduira en particulier:

- **L'ouvert ultime (avec diverses variantes)**
- **La quasi-distance**
- **des résidus basés sur des empilements**

OUVERT ULTIME

$$\Psi_i = \gamma_i$$

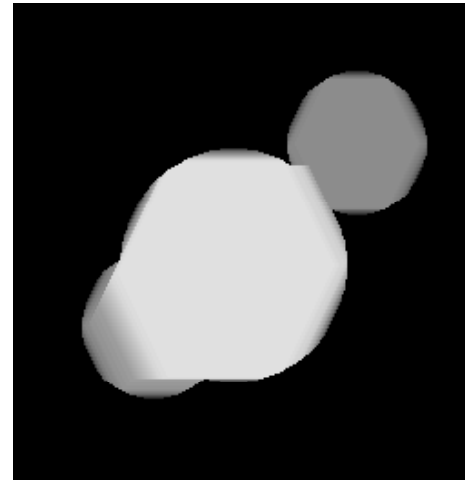
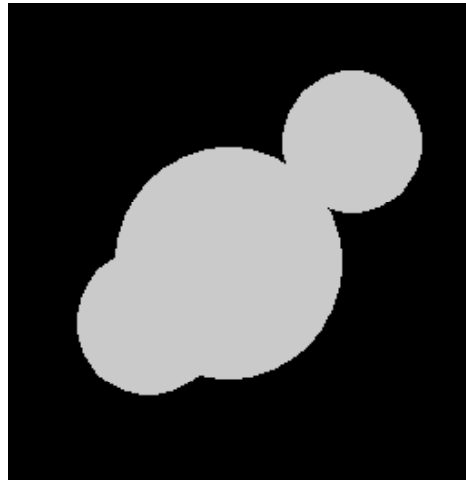
$$\zeta_i = \gamma_{i+1}$$

En binaire, la transformée θ ne présente aucun intérêt ($\theta = \mathbf{I}$).

La fonction associée q est appelée fonction granulométrique.

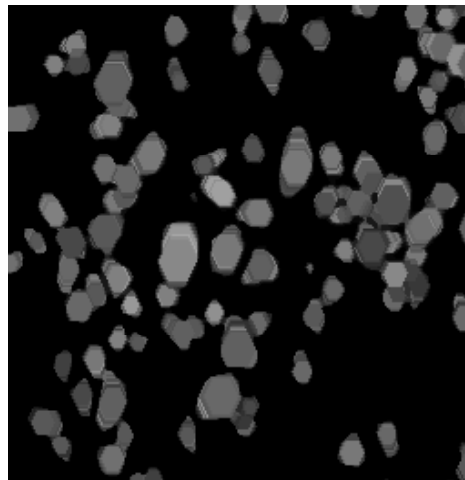
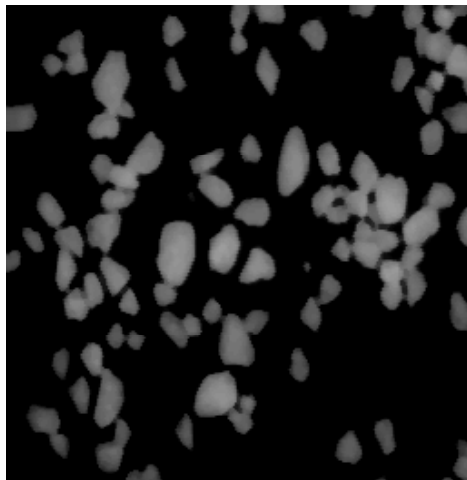
En chaque point x , $q(x)$ est égal (à l'unité près) à la taille de la plus grande boule recouvrant ce point x dans le cas binaire, au rayon du plus grand cylindre significatif de la reconstruction partielle recouvrant x dans le cas numérique.

OUVERT ULTIME (2)

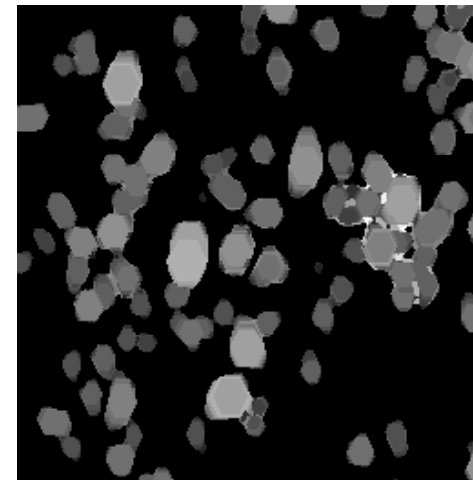


q

Fonction associée à l'ouvert ultime d'un ensemble



θ



q

Ouvert ultime numérique et fonction associée

OUVERT ULTIME, RECONSTRUCTION

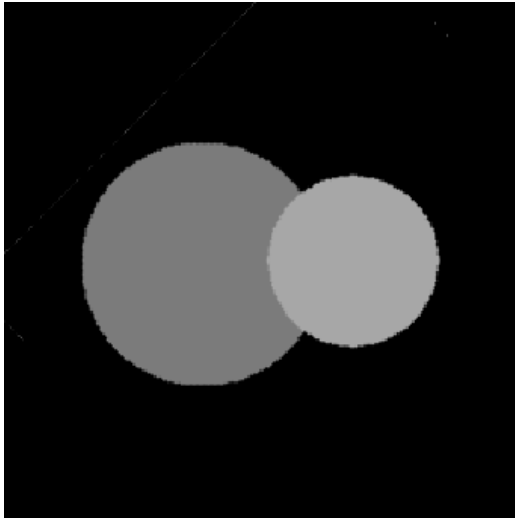
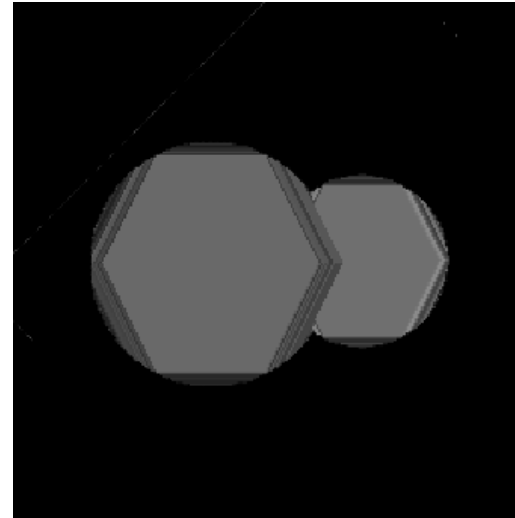
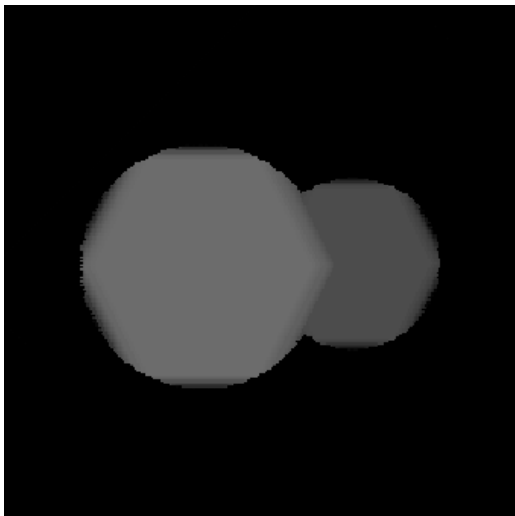


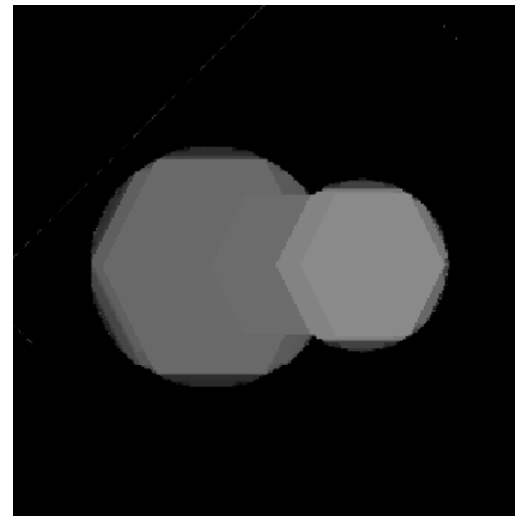
Image originale



Ouvert ultime



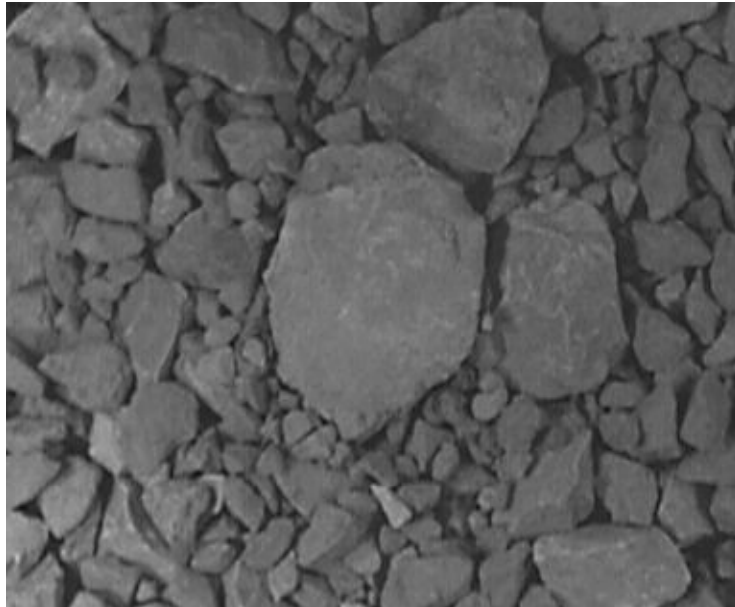
Fonction granulométrique



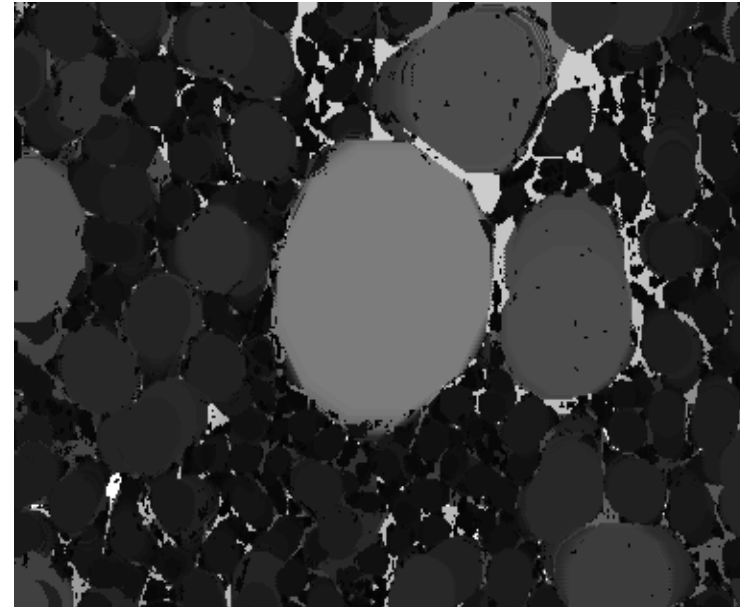
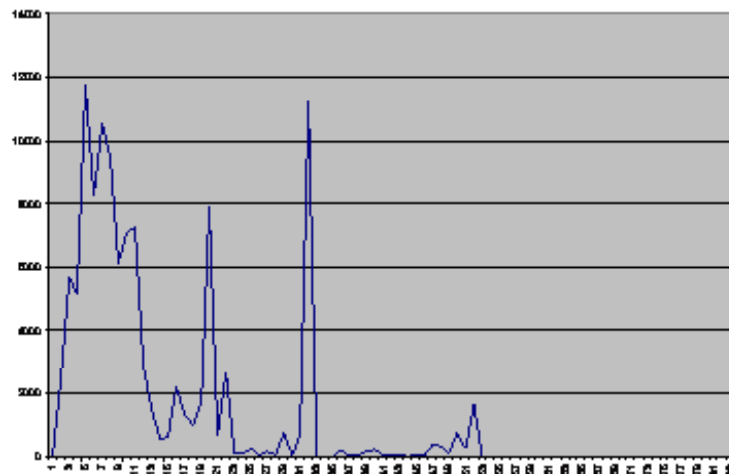
Reconstruction par squelette

GRANULOMÉTRIES ET SEGMENTATION

Blocs en tas: Détermination de la granulométrie des blocs



Granulométrie



Fonction granulométrique

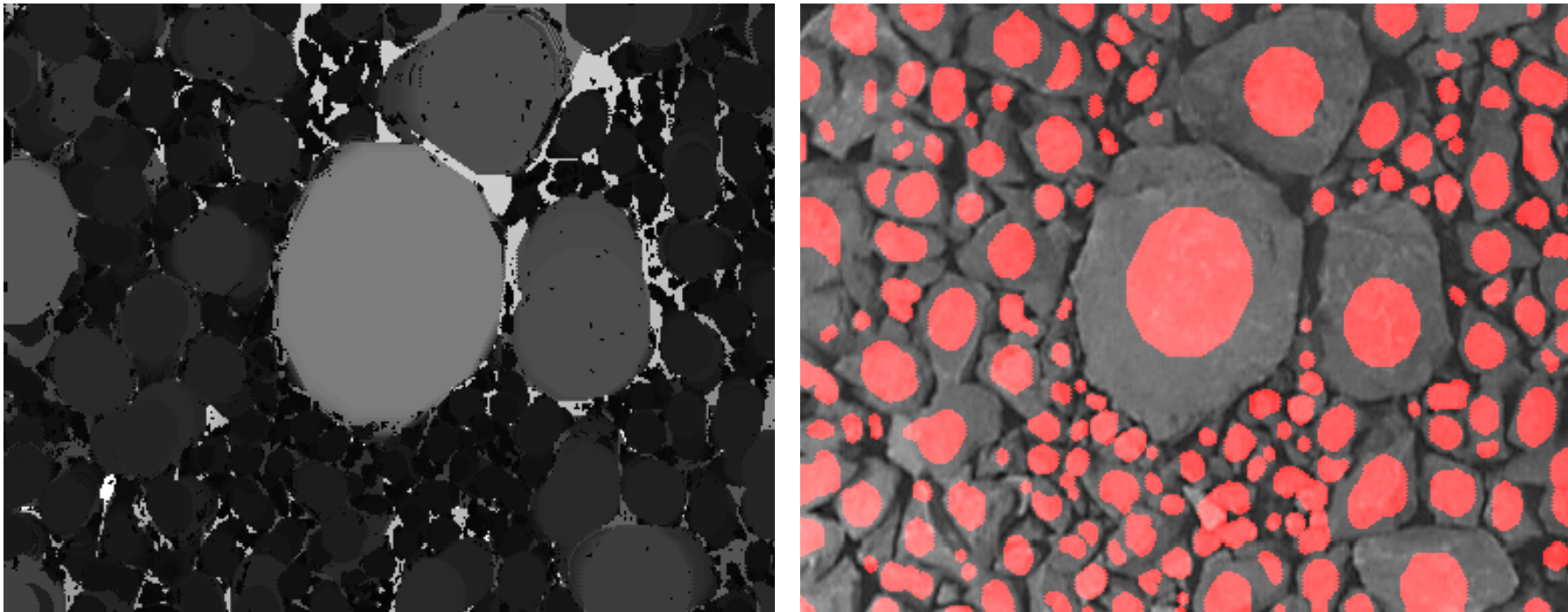
Ces fonctions permettent de définir la granulométrie des régions plus ou moins homogènes de l'image AVANT de les segmenter

GRANULOMÉTRIES ET SEGMENTATION (2)

Définition de marqueurs pour le comptage et la segmentation.

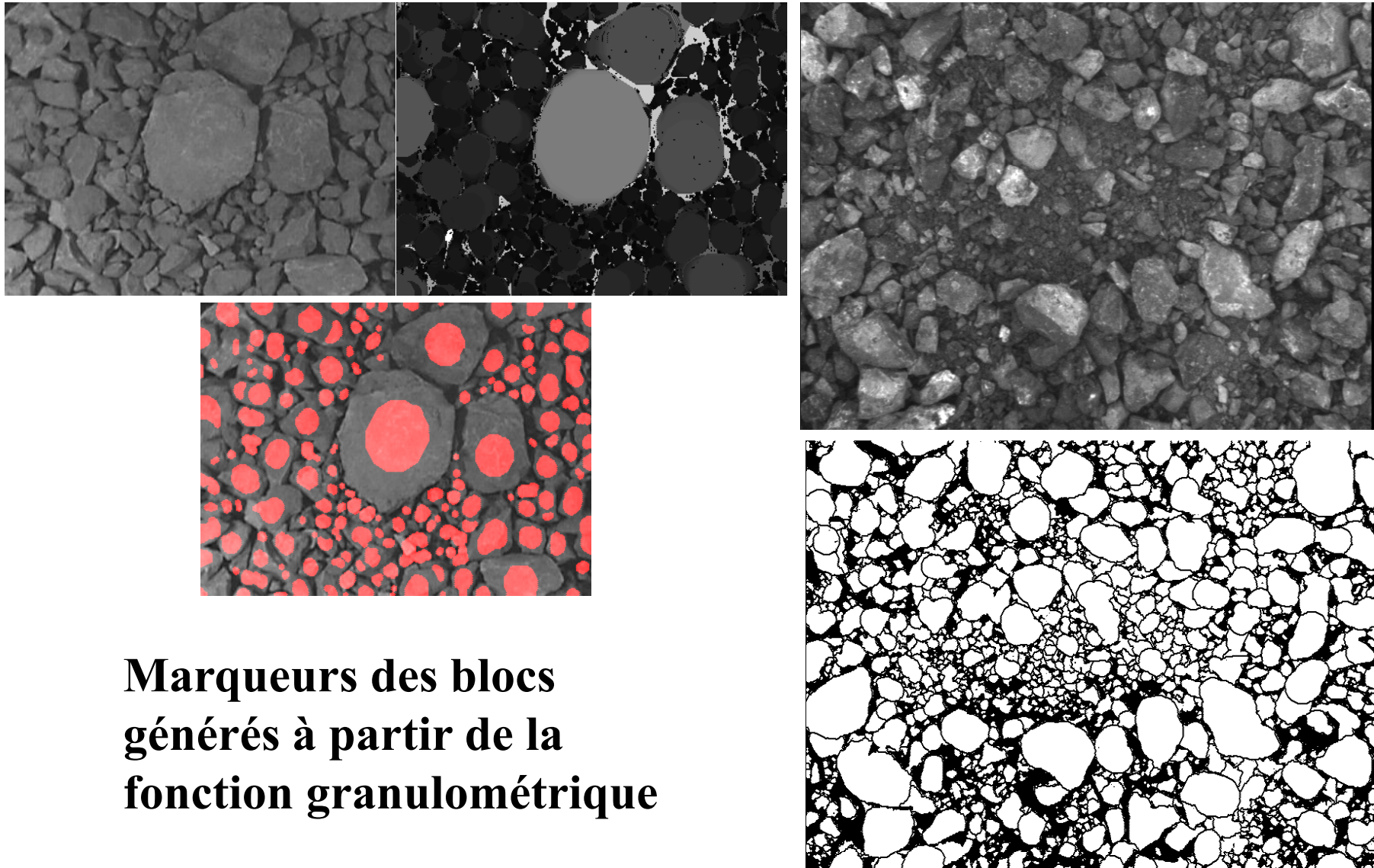
Pour chaque seuil i de la fonction granulométrique:

- bouchage des trous
- érosion de taille $j = \max(k \cdot i, c)$, $k < 1$



Marqueurs des blocs générés à partir de la fonction granulométrique

GRANULOMÉTRIES ET SEGMENTATION (3)



**Marqueurs des blocs
générés à partir de la
fonction granulométrique**

AUTRES OUVERTS ULTIMES

On peut définir de nouveaux ouverts ultimes en utilisant des ouvertures basées sur des critères

- **Ouvertures surfaciques**
- **Ouvertures basées sur des diamètres de Féret et des tailles de boîtes englobantes**

OUVERTURES SURFACIQUES

Ouvertures surfaciques ensemblistes

$$\gamma_{\lambda}^a(X) = \{x \in X / \text{Aire}(C_x(X)) \geq \lambda\}$$

Si X_i est une composante connexe de X , $\gamma_{\lambda}^a(X)$ est égal à l'union des X_i dont l'aire est supérieure ou égale à λ

$$\gamma_{\lambda}^a(X) = \cup \{X_i / \text{Aire}(X_i) \geq \lambda\}$$



original



1250 pixels



2000 pixels

OUVERTURES SURFACIQUES

Ouvertures surfaciques numériques

$$(\gamma_{\lambda}^a(f))(x) = \sup \left\{ h \leq f(x) / x \in \gamma_{\lambda}^a(T_h(f)) \right\}$$

$T_h(f)$ est le seuil de f à la valeur h : $T_h(f) = \{x : f(x) \geq h\}$



original



Taille 100 pixels

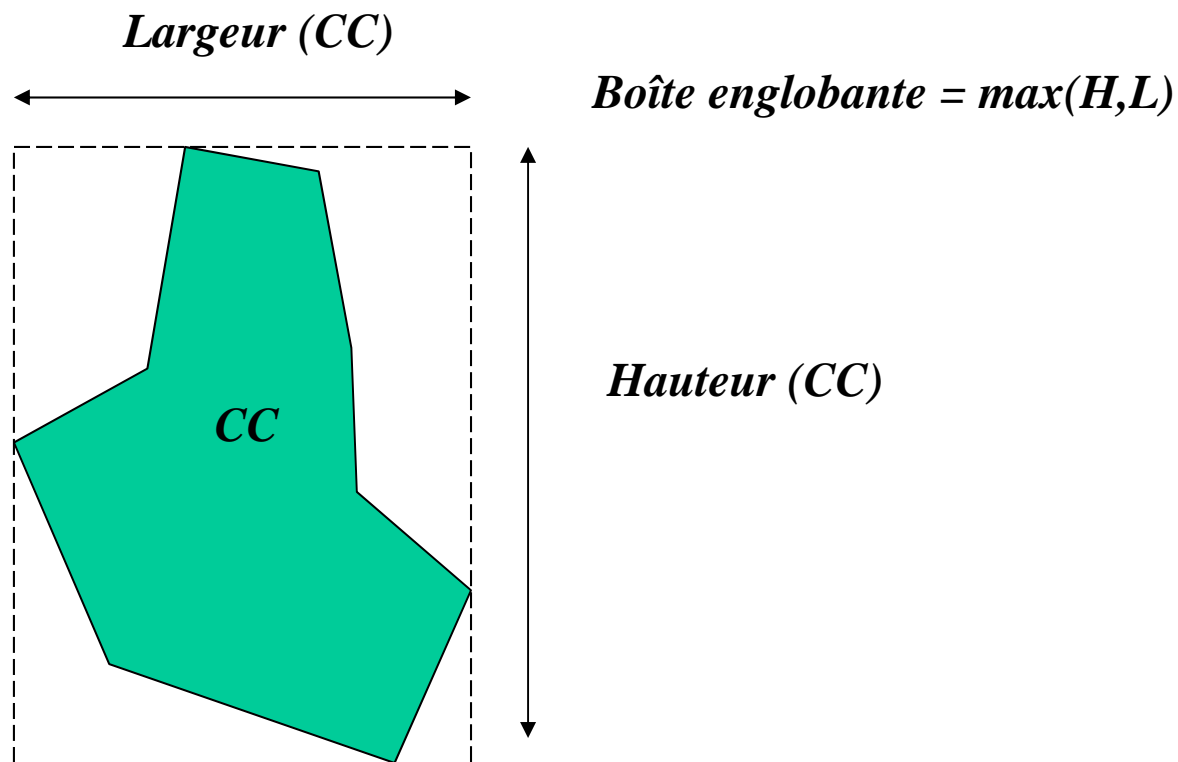


Taille 500 pixels

L'ouverture surfacique s'obtient en empilant les ouvertures surfaciques de tous les seuils de la fonction

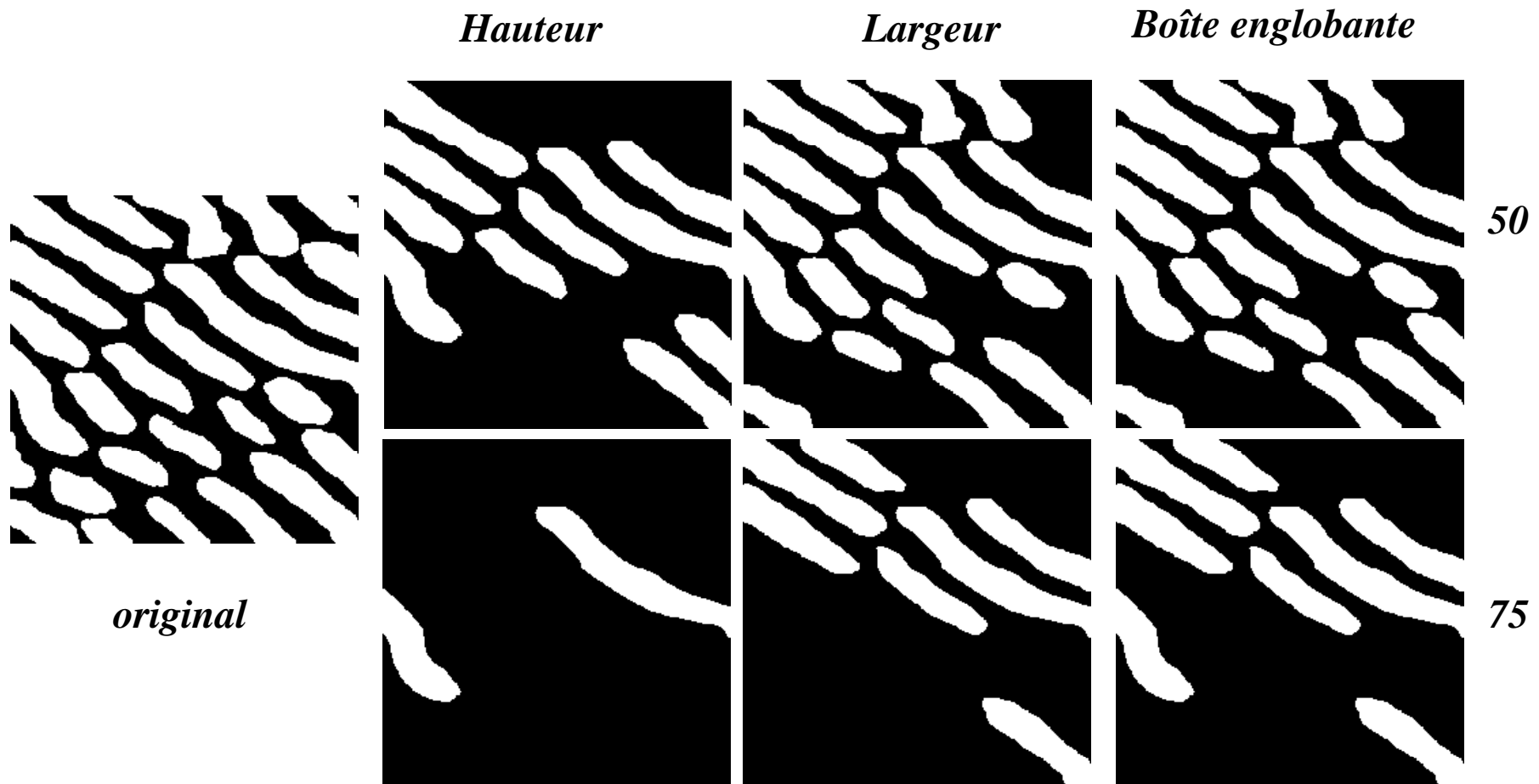
OUVERTURES PAR BOÎTES ENGLOBANTES

Plutôt que la surface, on peut utiliser les diamètres de Féret horizontaux et verticaux des composantes connexes de X ou la taille de la boîte englobante



EXEMPLE D'OUVERTURE PAR BOÎTE ENGLOBANTE

L'ouverture par boîte englobante est une union d'ouvertures

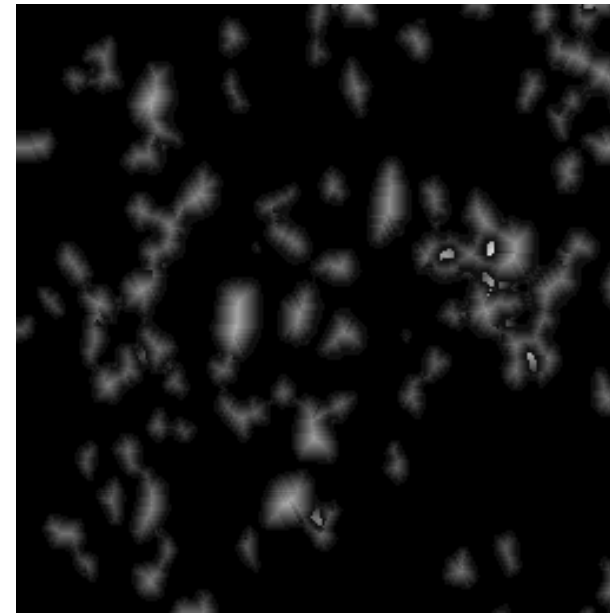
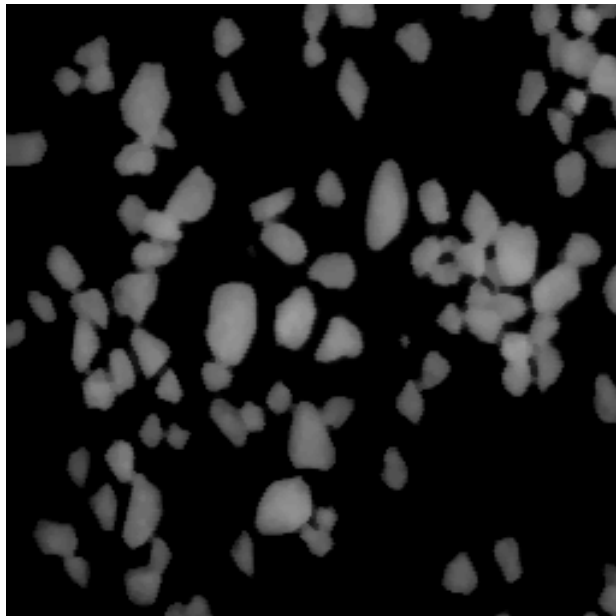


QUASI-DISTANCE

$$\Psi_i = \varepsilon_i$$

$$\zeta_i = \varepsilon_{i+1}$$

- En binaire, θ et q ne sont pas intéressants ($\theta = I$ et q est la fonction distance).
- En numérique q est appelée quasi-distance.

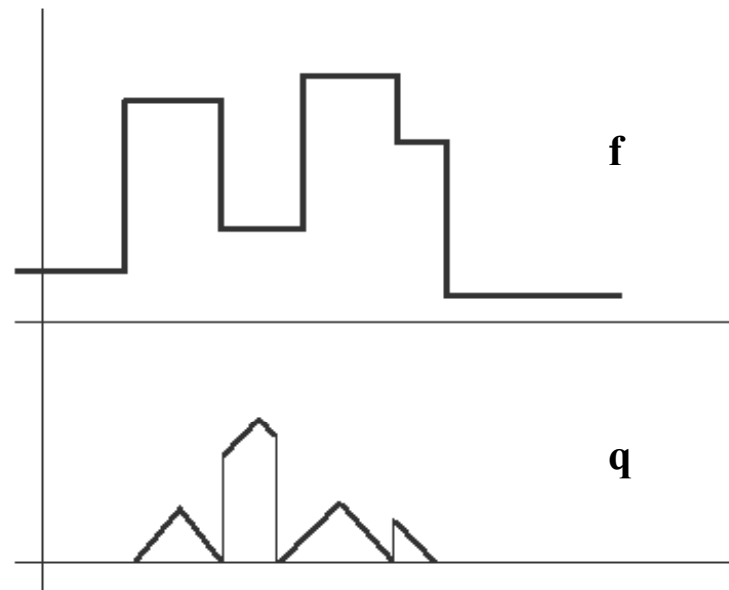


Des distances « perchées » apparaissent.

QUASI-DISTANCE (2)

La quasi-distance n'est pas 1-Lipschitzienne.

On peut rendre la quasi-distance 1-Lipschitzienne par un opérateur itératif de « descente » des distances perchées.



- **En tout point x où $[q - \varepsilon(q)](x) > 1$, faire $q(x) = \varepsilon(q)(x) + 1$**
- **Réitérer jusqu'à idempotence.**

QUASI-DISTANCE (3)

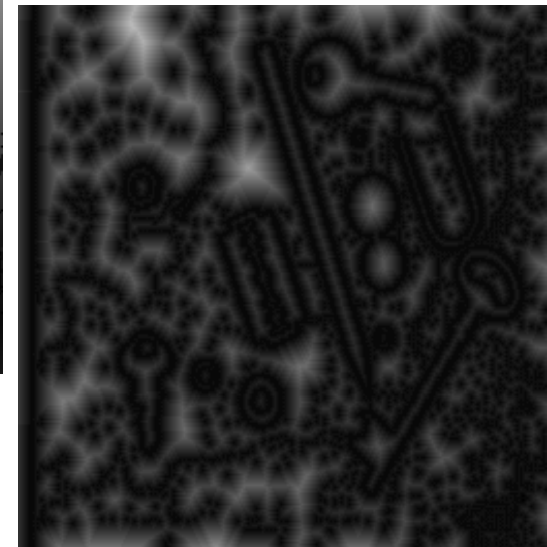
Quasi-distances brute et corrigée



Image initiale



Quasi-distance brute

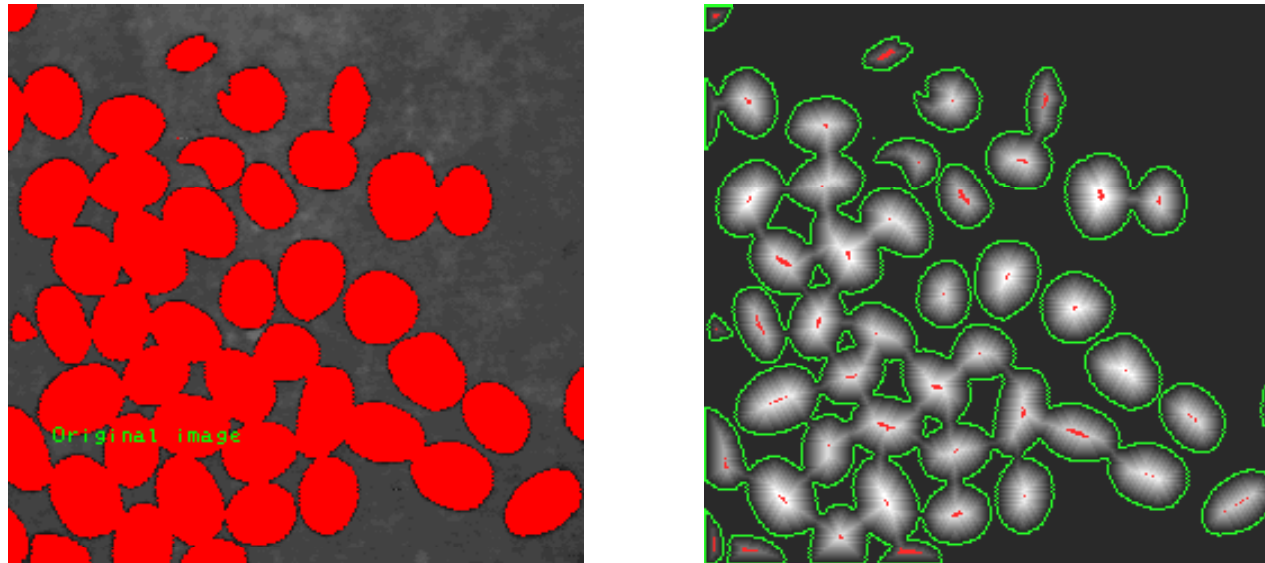


Quasi-distance corrigée

UTILISATION DES OUTILS DE SEGMENTATION

FONCTION DISTANCE & EROSION ULTIME

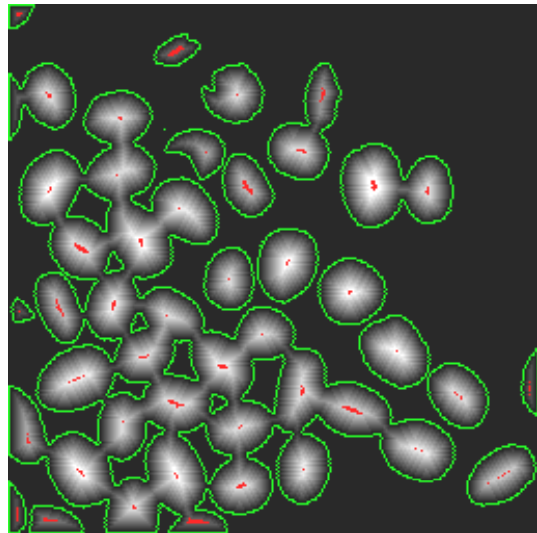
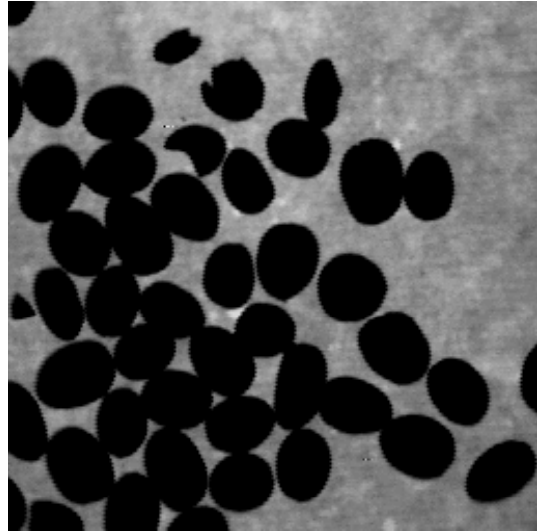
La fonction distance est construite par empilement des érodés successifs de X



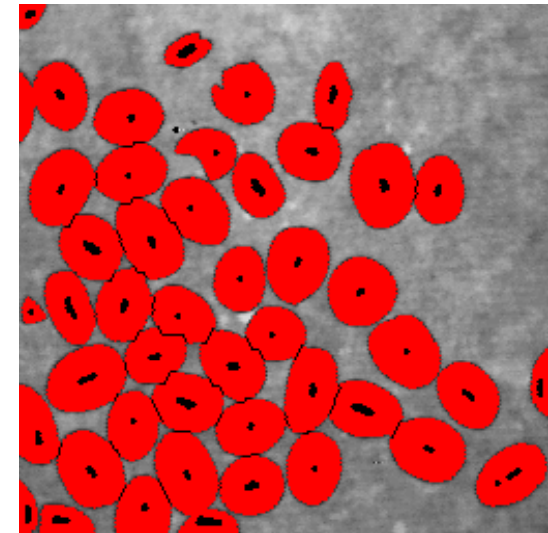
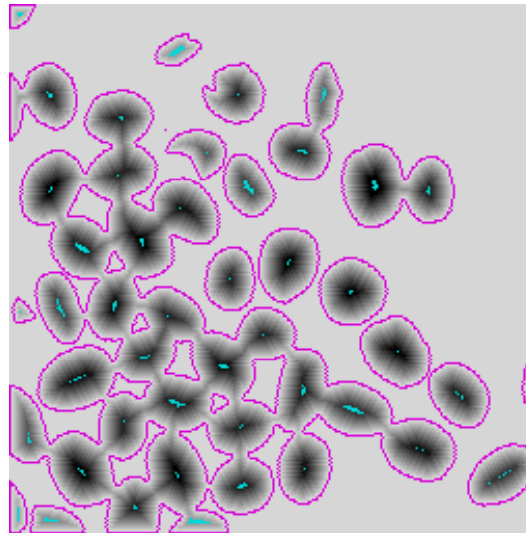
L'érodé ultime correspond alors aux maxima de cette fonction distance. L'érodé ultime est un opérateur résiduel.

APPLICATIONS

Grains de café



La fonction distance de l'ensemble est calculée. Cette fonction distance est inversée et sa LPE est construite. L'ensemble marqueur est constitué des maxima de la fonction distance.



La LPE est réalisée sur le support de la fonction distance. Les maxima sont filtrés pour éviter la sur-segmentation due à des problèmes de parité.

APPLICATIONS (2)

Grains de nitrate d'argent sur un film

Problème:
segmentation des grains,
même superposés

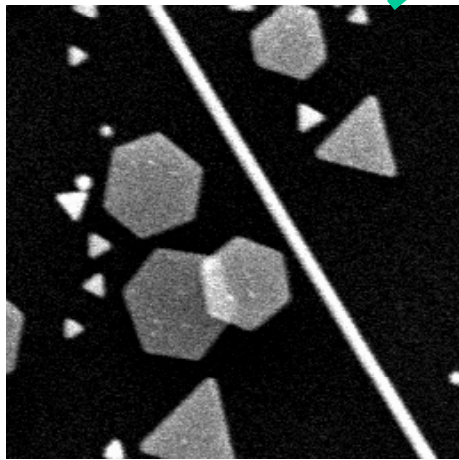
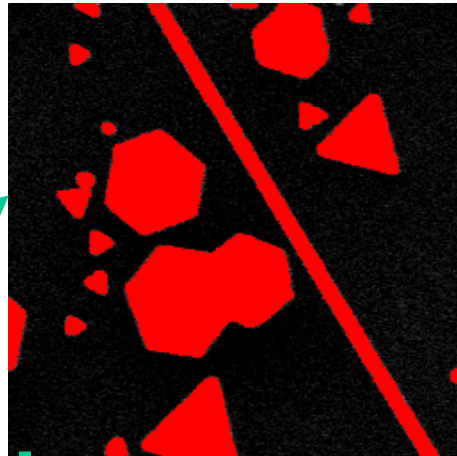
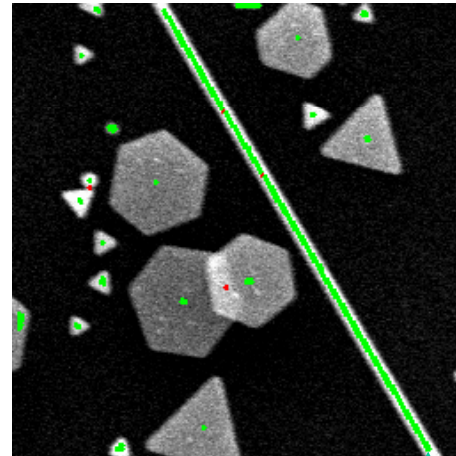


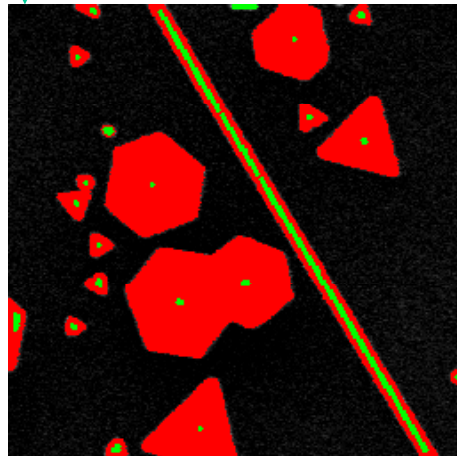
Image originale



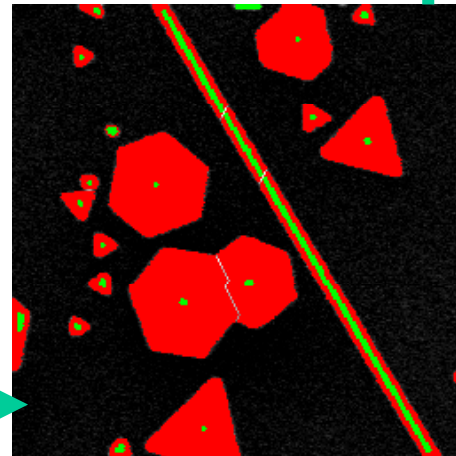
Masque des grains



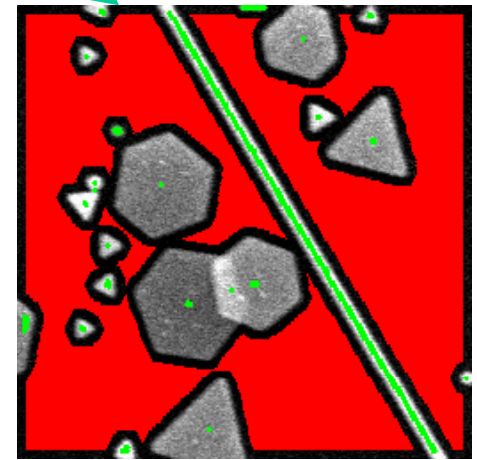
2ème marqueurs



1ers marqueurs, maxima
de la fonction distance

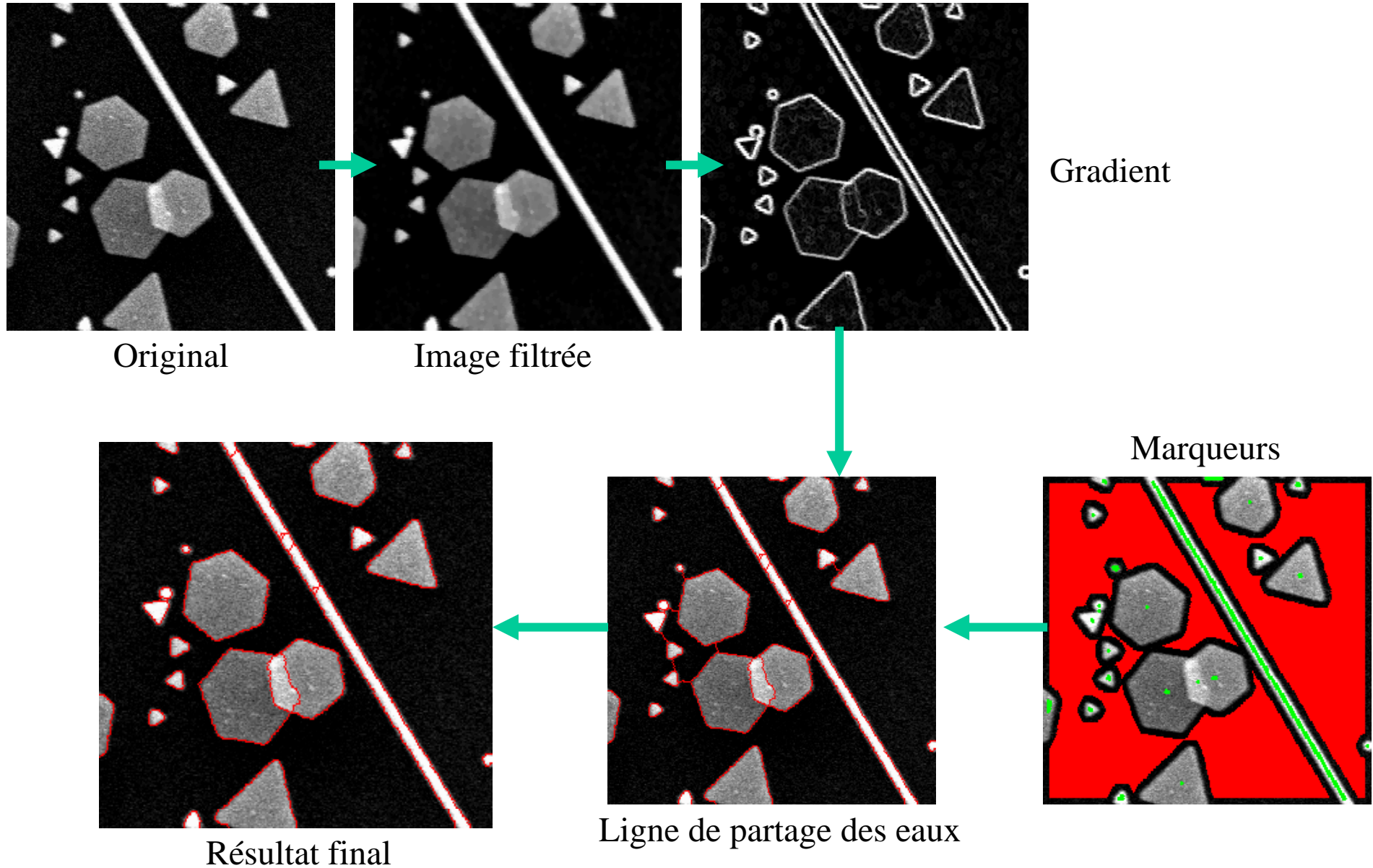


LPE de la fonction
distance



Le marqueur du
fond est ajouté.
Ensemble marqueur
final

APPLICATIONS (3)

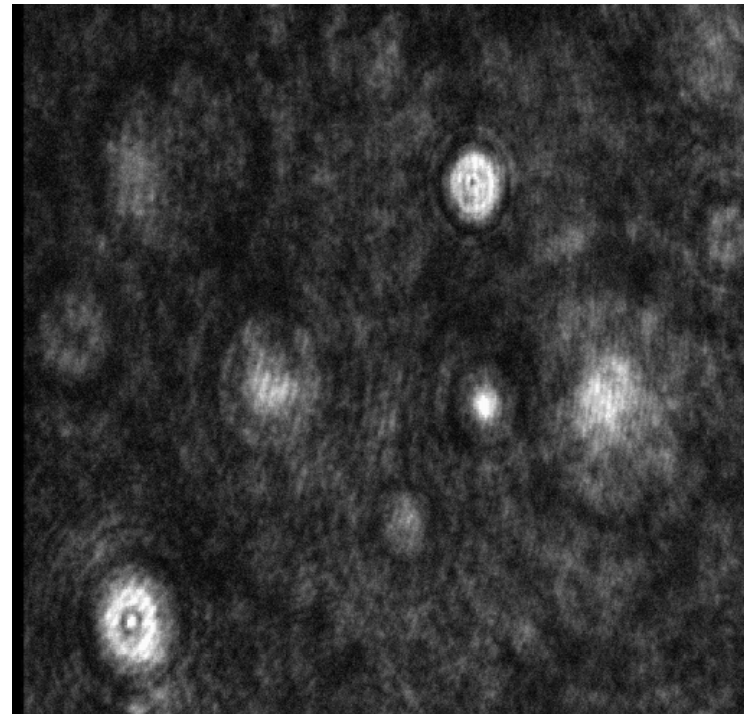


APPLICATIONS (4)

Restitution 3D de gouttes d'eau à partir d'un hologramme

Une image 3D d'un aérosol (brouillard artificiel) est générée à partir d'un hologramme. Les diverses sections de l'image 3D sont obtenues avec une caméra à faible profondeur de champ.

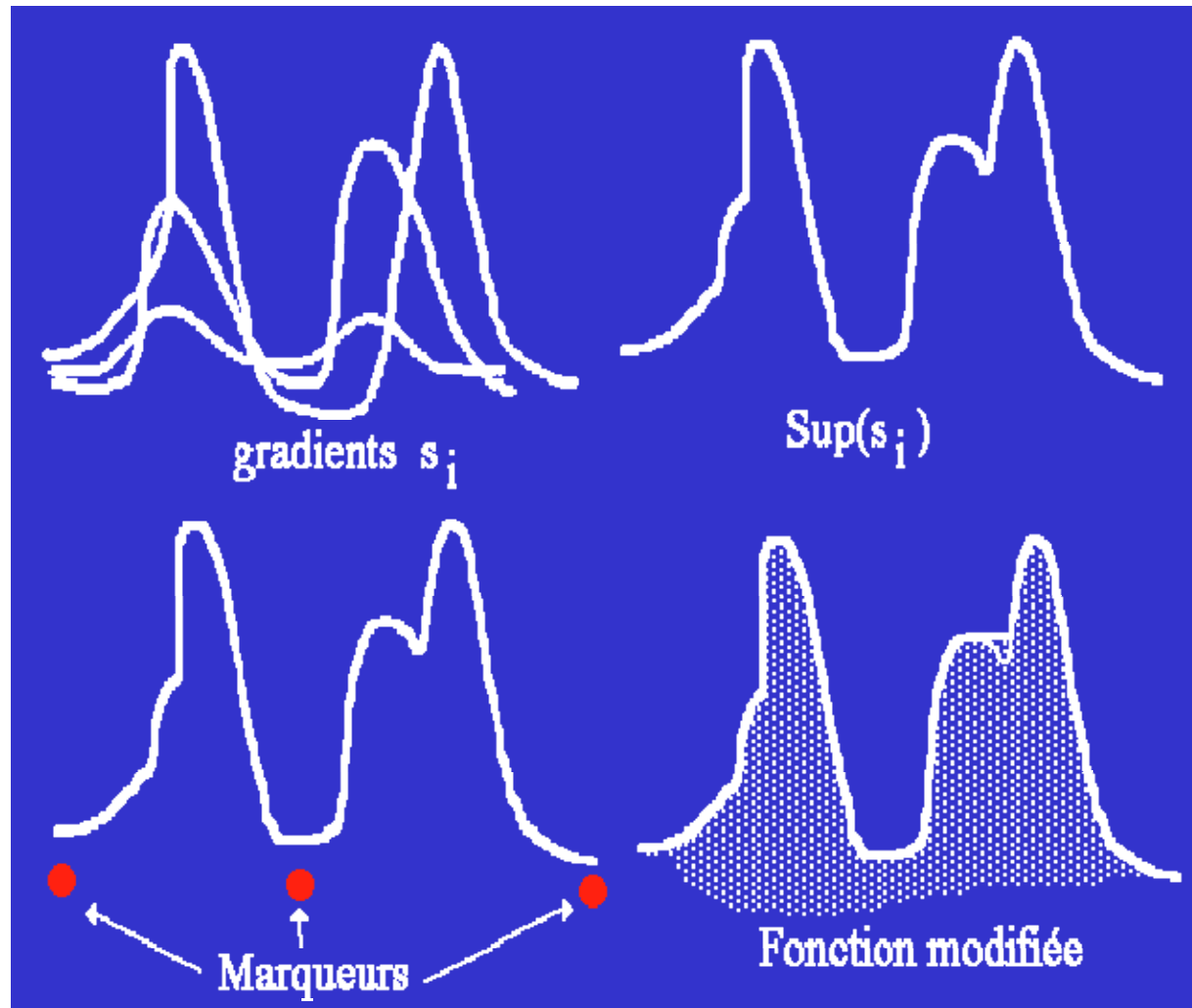
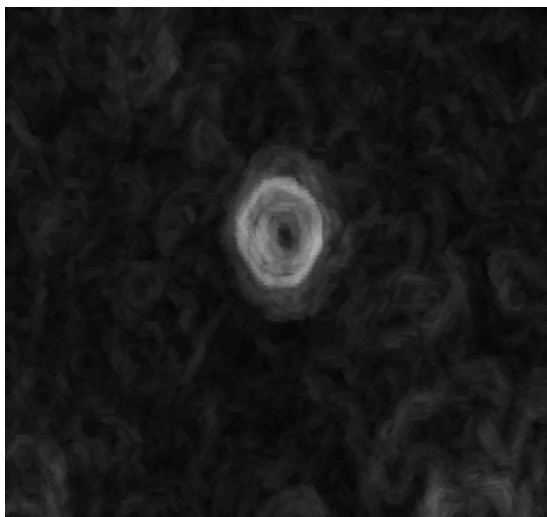
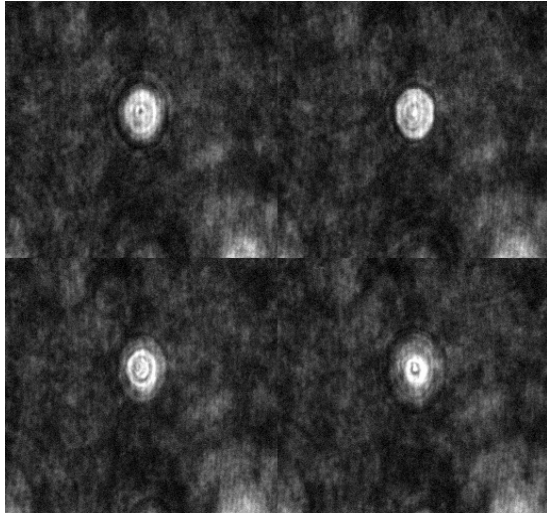
- n sections s_i
- trouver le meilleur contour
- position x, y, z de chaque goutte
- volume



APPLICATIONS (5)

Critère:

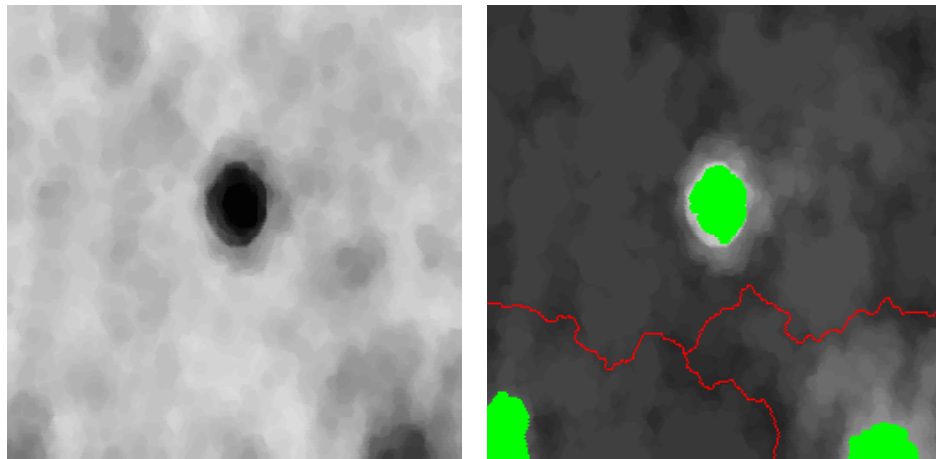
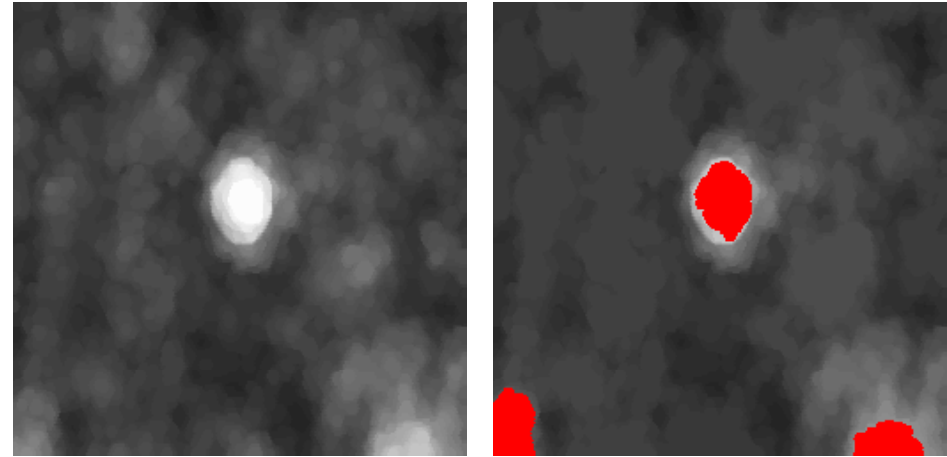
Sup des gradients



APPLICATIONS (6)

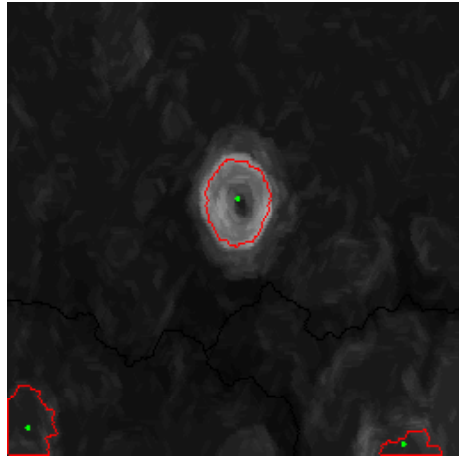
Marqueurs:

- **Gouttes** → maxima significatifs du sup filtré de toutes les sections
- **Fond** → LPE du sup des images (inversé)

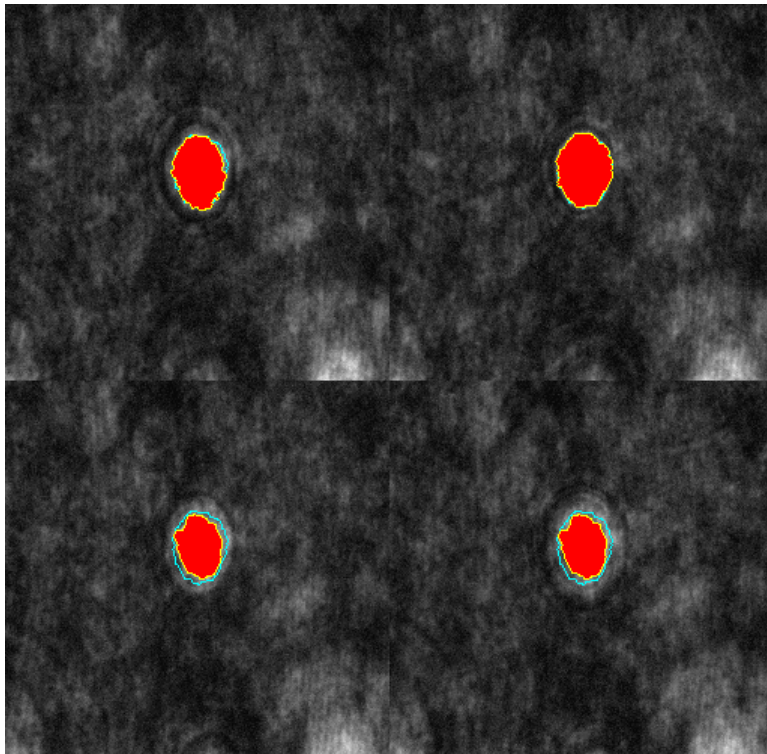
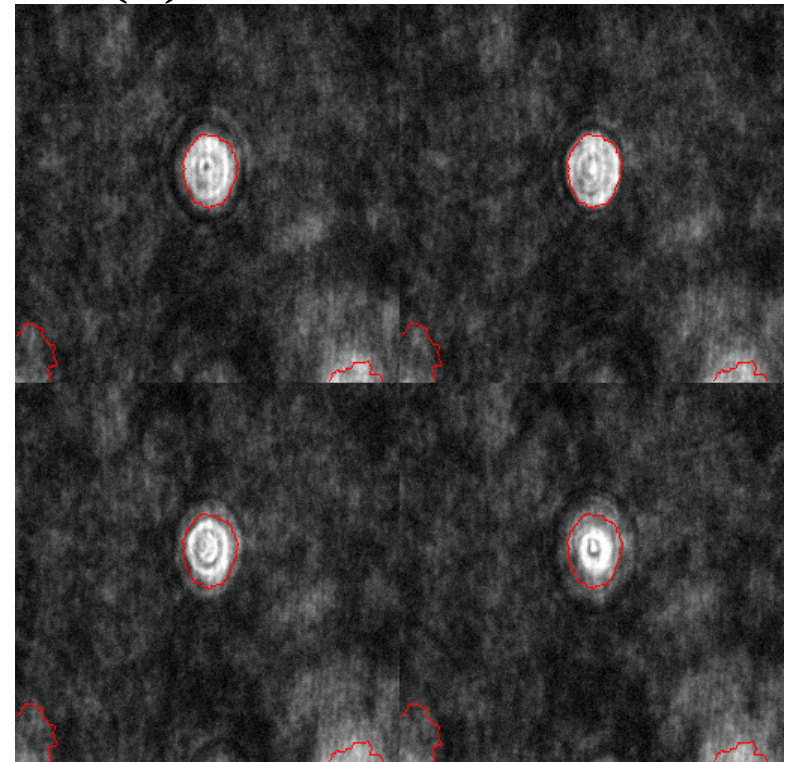


Cette LPE est une LPE contrôlée par marqueurs (les marqueurs de la LPE sont les marqueurs des gouttes)

APPLICATIONS (7)



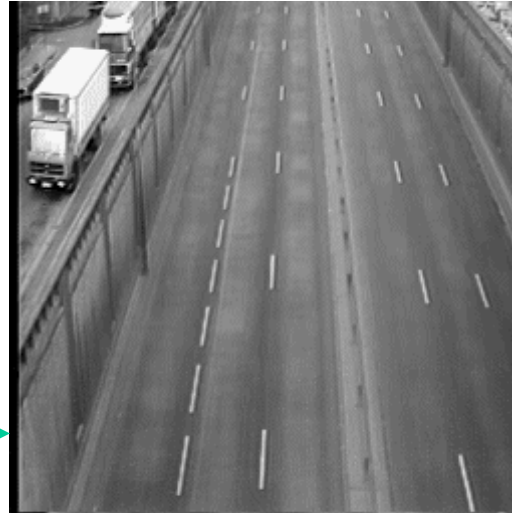
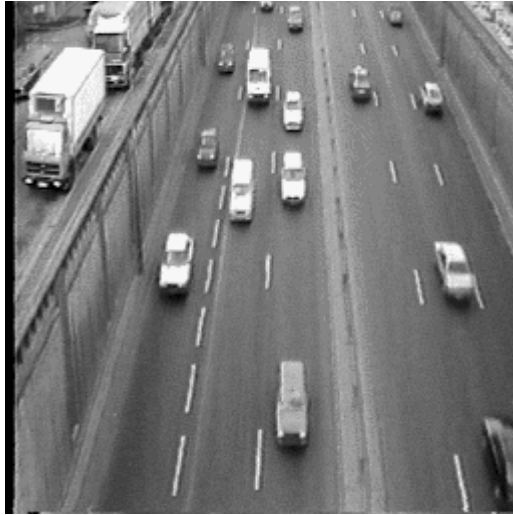
LPE finale (à gauche). La même LPE superposée aux différentes sections (à droite).



Pour trouver la meilleure section, une LPE du gradient contrôlée par marqueurs est réalisée sur chaque section avec le même ensemble marqueur (résultat en bleu) et le meilleur ajustement avec le contour précédent est déterminé. La section correspondante donne la coordonnée z de la goutte.

APPLICATIONS (8)

Segmentation de voies de circulation



Les marqueurs des voies sont obtenus grâce à un seuillage automatique. Le marqueur du fond est le complémentaire d'une dilatation.

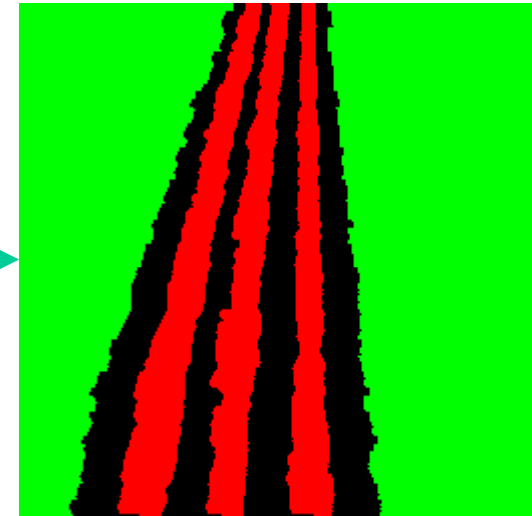
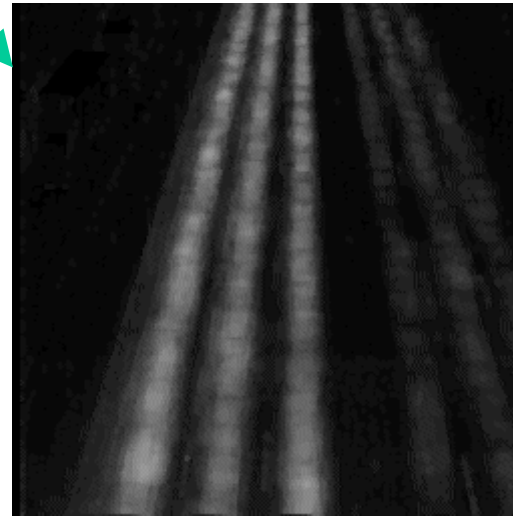
A partir d'une séquence de n images f_i , deux images sont générées:

- La moyenne,

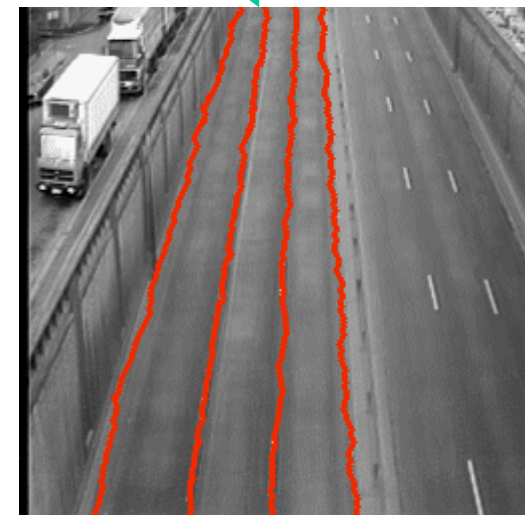
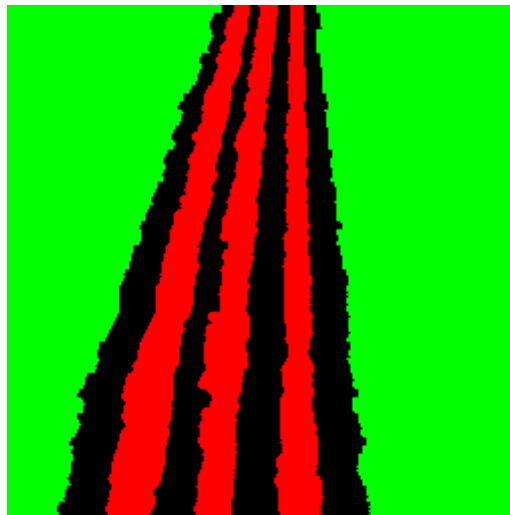
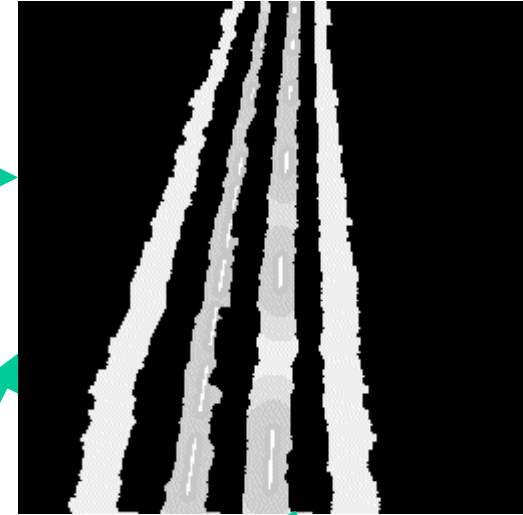
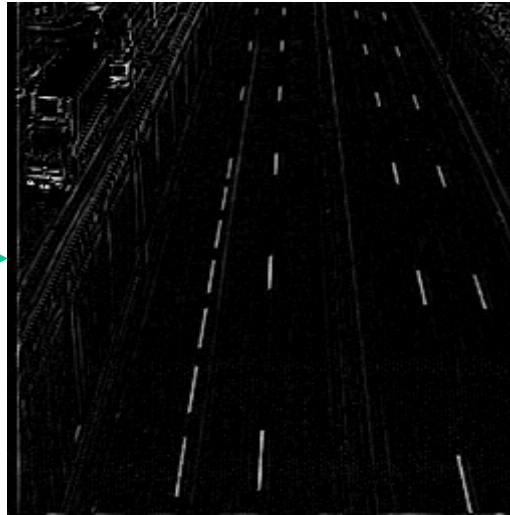
$$\Sigma f_i / n$$

- La moyenne des différences absolues,

$$\Sigma |f_i - f_j| / n$$



APPLICATIONS (9)

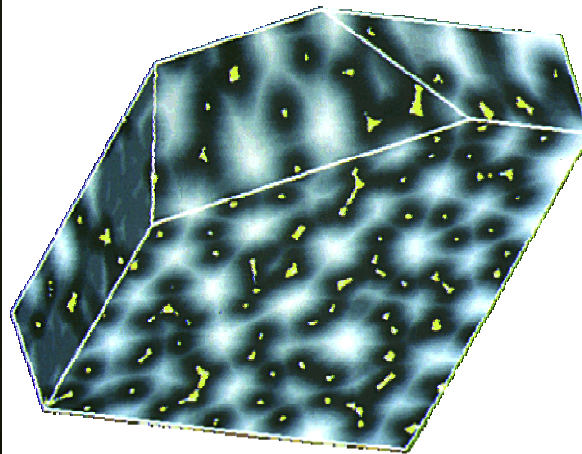
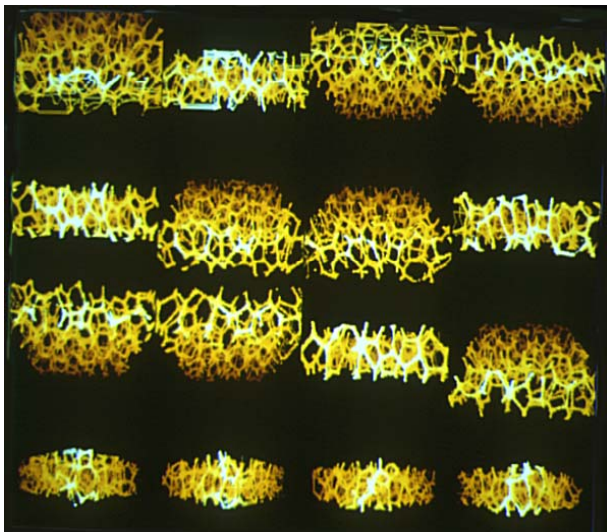


- Extraction du marquage au sol par une transformation chapeau haut-de-forme
- Calcul de la fonction distance du marquage au sol entre les marqueurs des voies
- LPE de la fonction distance

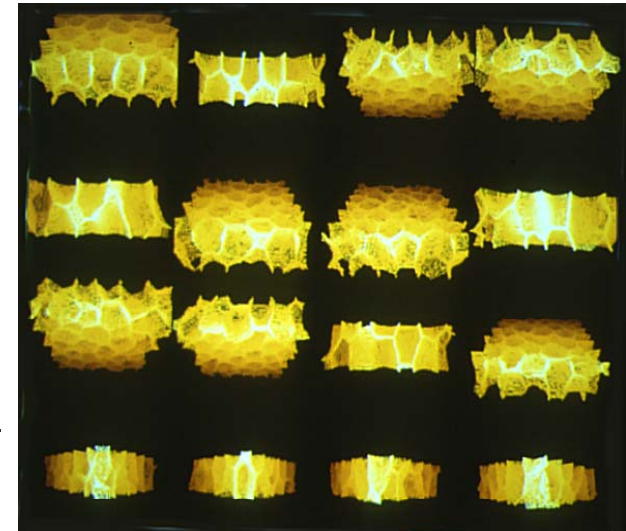
APPLICATIONS (10)

Segmentations 3D basées sur les fonctions distance

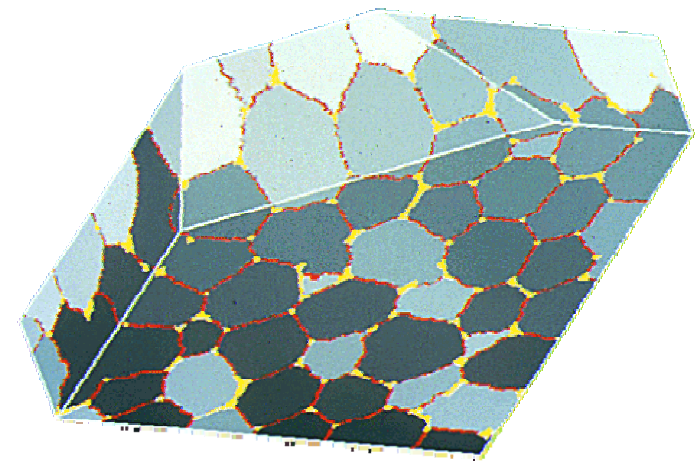
Mousse de polyester



Fonction distance



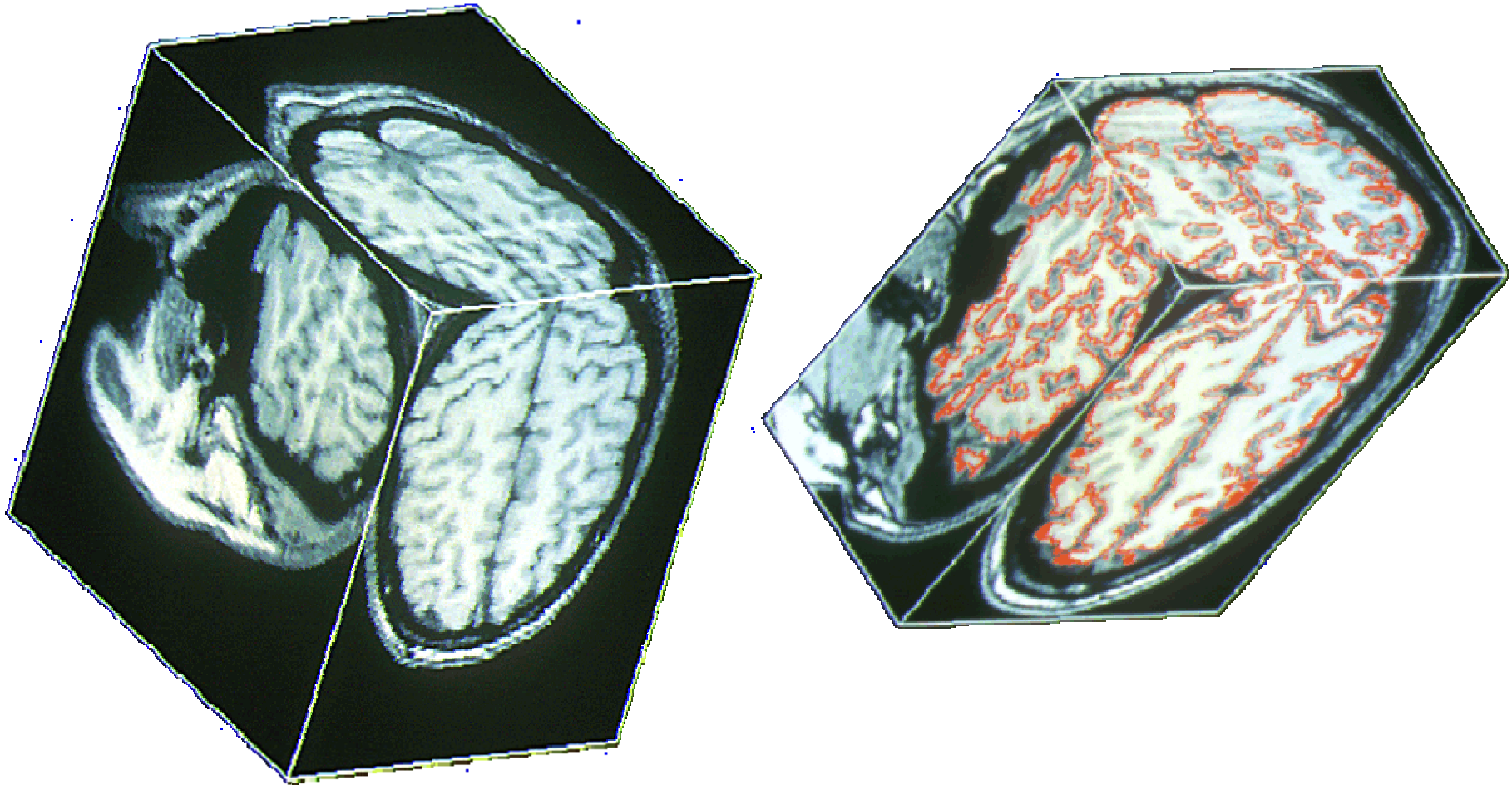
LPE 3D



APPLICATIONS (11)

Segmentations 3D basées sur les gradients

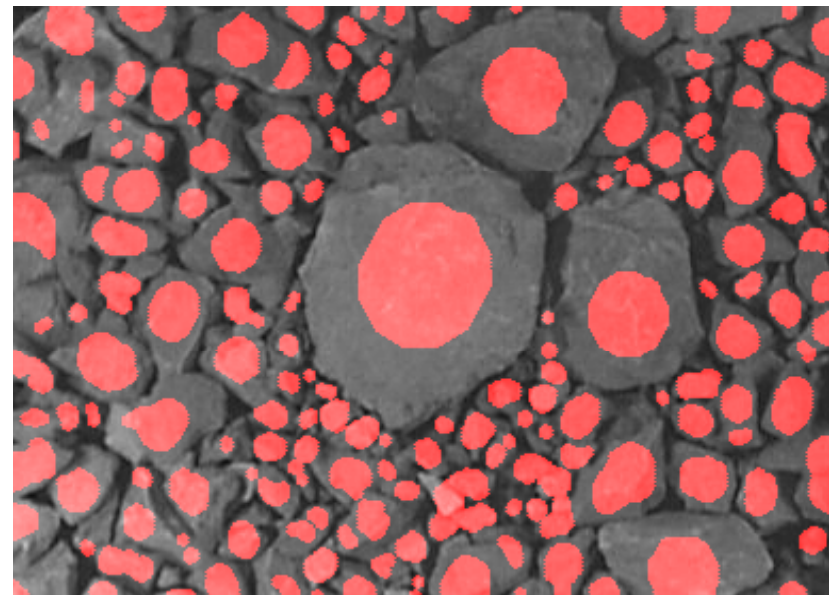
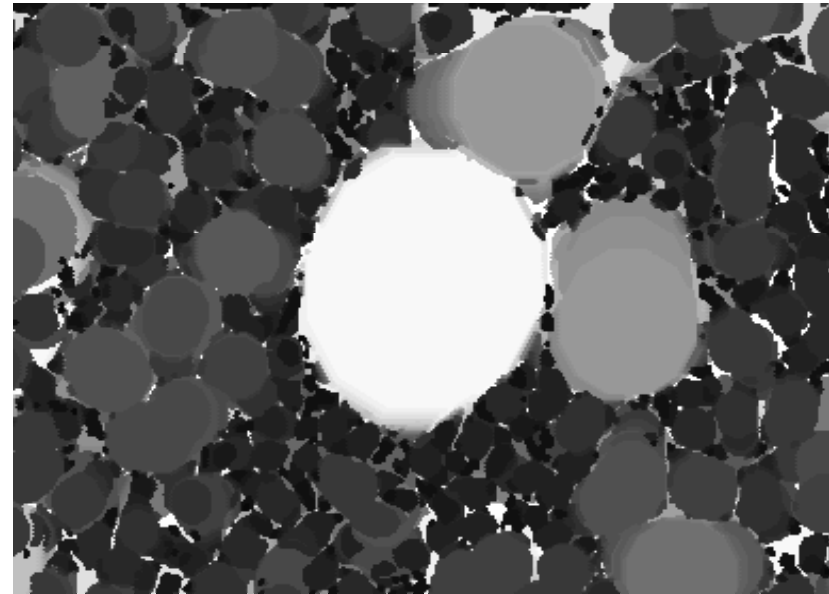
Image IRM 3D du cerveau



GRANULOMETRIE, MARQUEURS

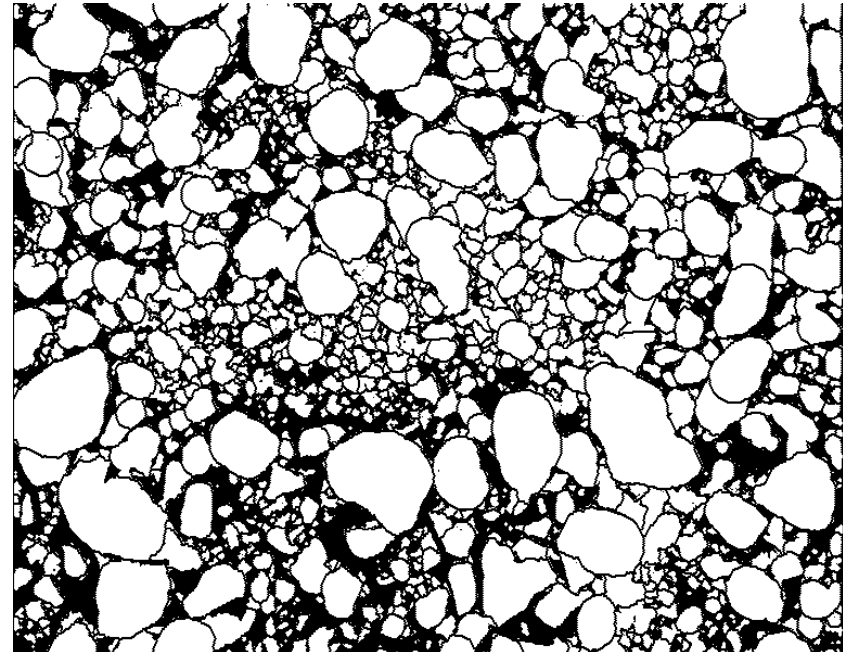
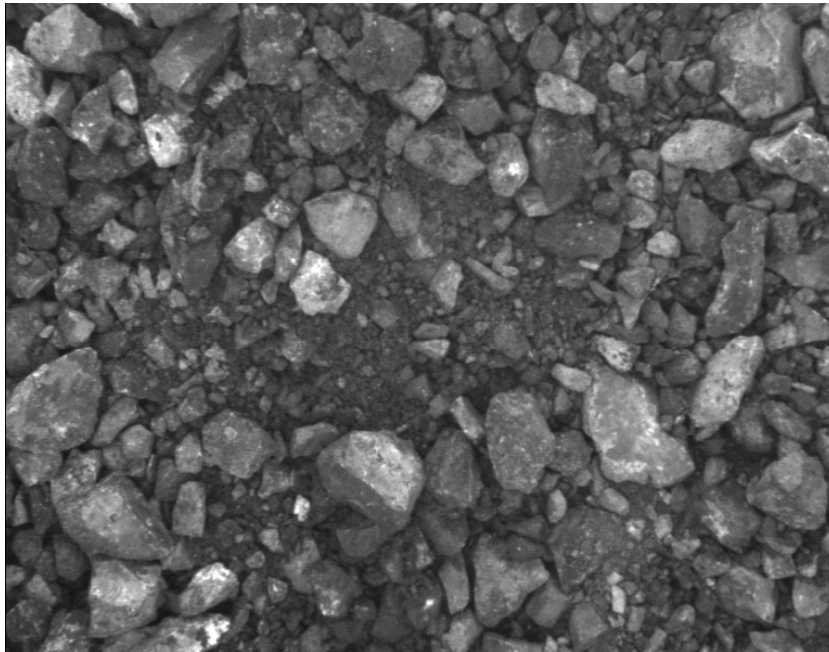
Chaque seuil λ de la fonction granulométrique q est érodé par un disque de taille $k\lambda$ ($k < 1$)

Cette opération génère des marqueurs des blocs dont la taille est proportionnelle à la taille du bloc



SEGMENTATION DES BLOCS

Les marqueurs extraits de la fonction granulometrique fournissent des germes précieux pour la segmentation par LPE contrôlée par ces marqueurs (des critères de taille et de contraste peuvent être mélangés).



OUVERT ULTIME PAR RECONSTRUCTION

On peut également utiliser les ouvertures par reconstruction:

$$\Psi_i = \gamma_{\text{rec}_i}$$

$$\zeta_i = \gamma_{\text{rec}_{i+1}}$$

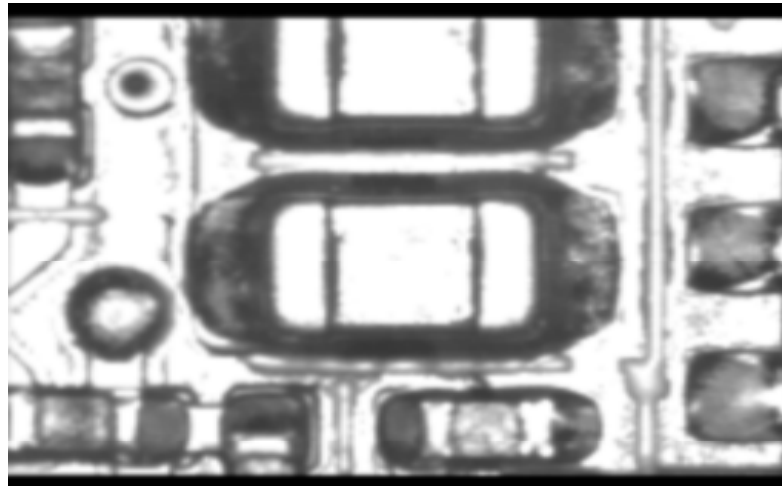
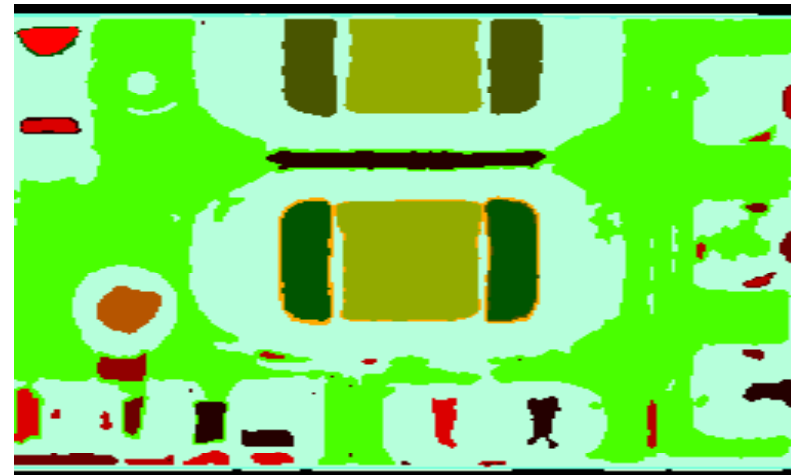


Image initiale



Ouvert ultime



Fonction granulométrique

SEGMENTATION AVEC L'OUVERT ULTIME PAR RECONSTRUCTION

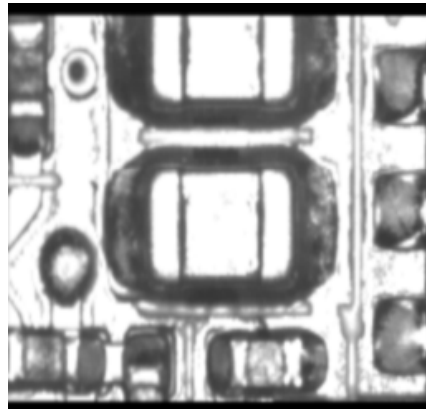
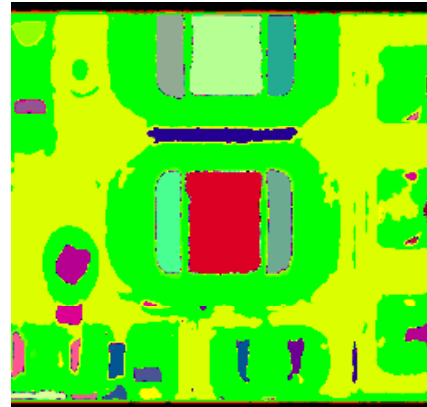
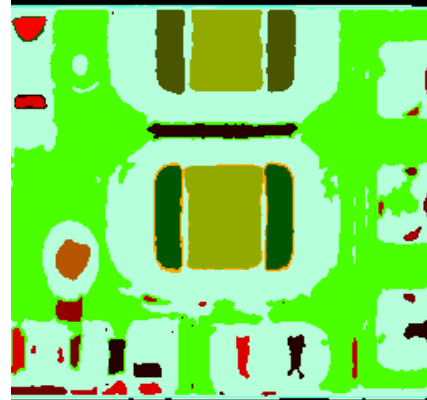


Image initiale

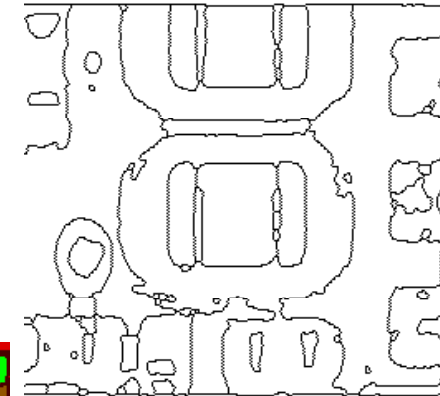


Ouvert ultime

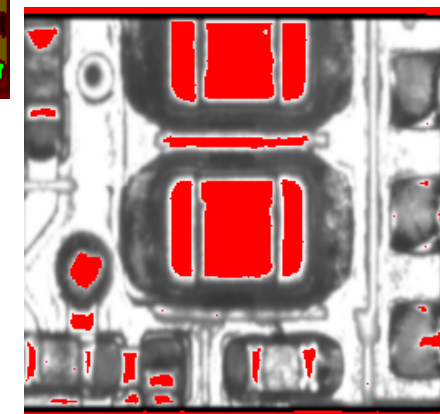
Fonction
granulométrique



Sélection de
marqueurs à partir de
la fonction
granulométrique

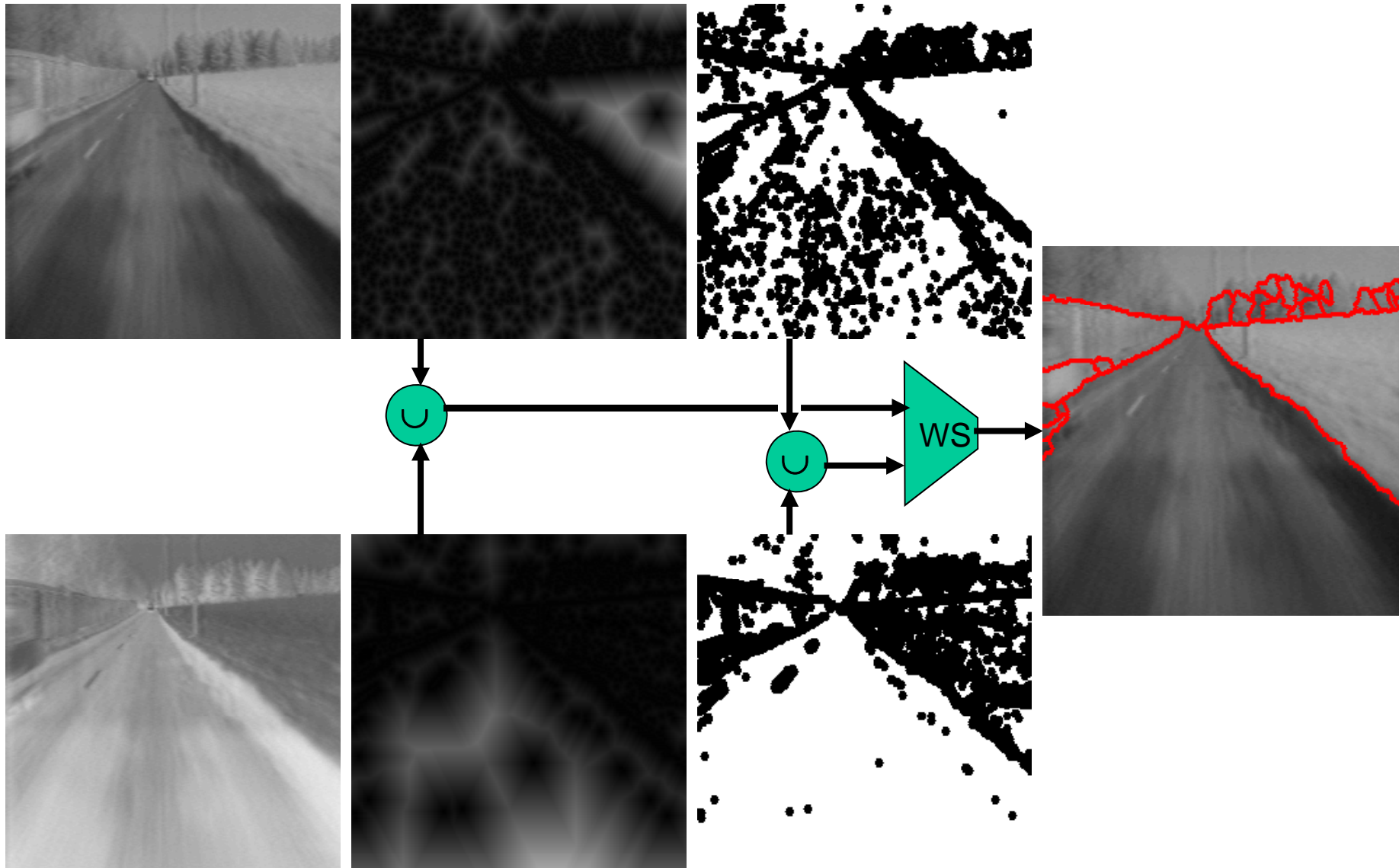


LPE du gradient de
l'ouvert ultime



Extraction des régions saillantes

SEGMENTATION AVEC DES QUASI-DISTANCES



AUTRE EXEMPLE



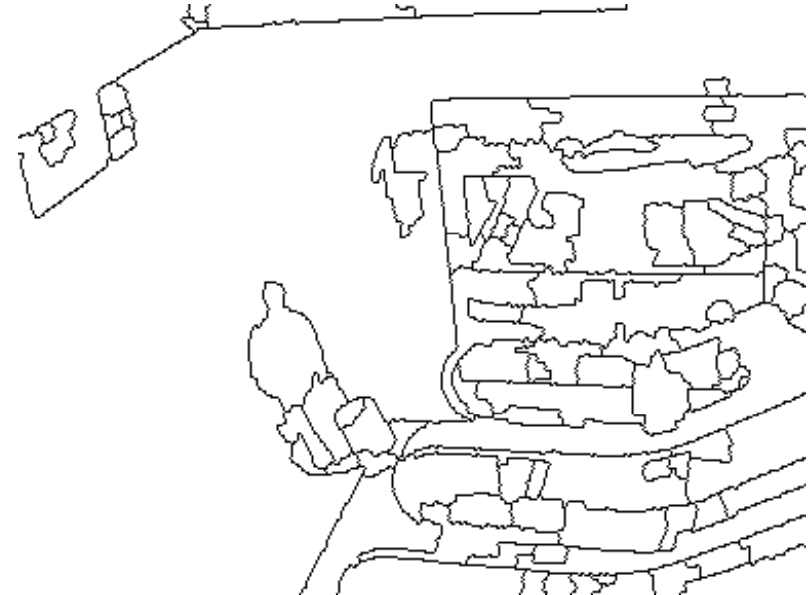
• Scène de video surveillance

• Quasi-distance

• Quasi-distance de l'image
inversée



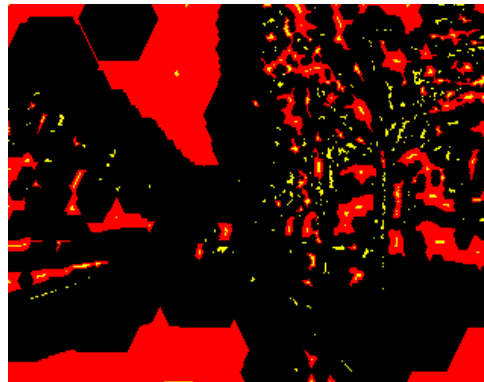
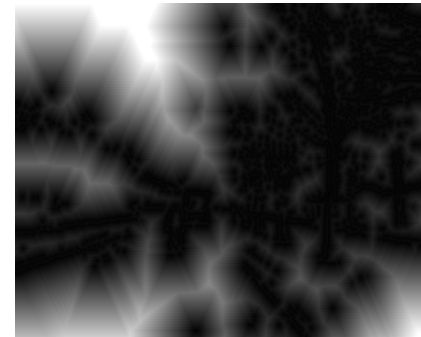
AUTRE EXEMPLE (2)



- Marqueurs des régions (gauche)
- LPE du sup des quasi-distances (en haut à droite)
- Les régions en mouvement sont détectées (en bas à droite)



GRADIENT ET QUASI-DISTANCE

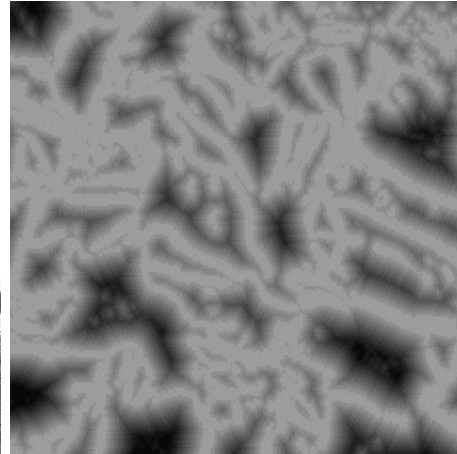
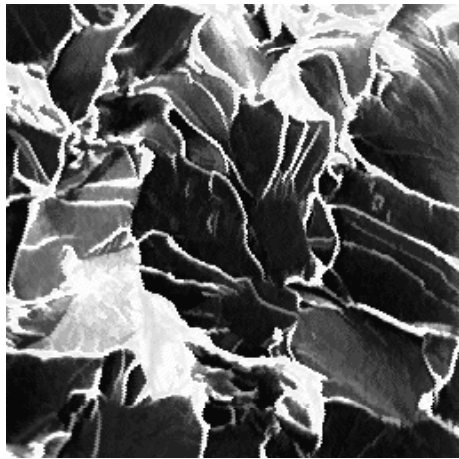


La quasi-distance peut être calculée sur le gradient inversé

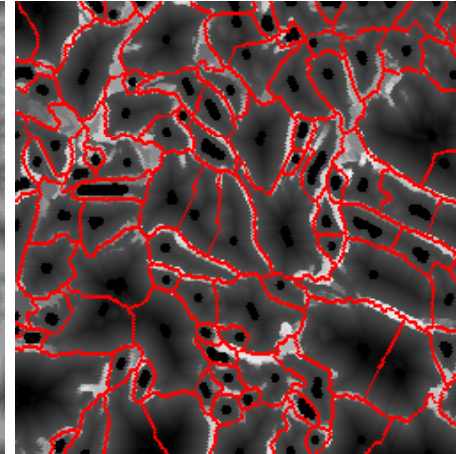
- Une seule quasi-distance est calculée
- Hiérarchie des régions basée sur leur contraste relatif (comme dans l'algorithme des cascades, voir plus loin)
- La forme des régions est prise en compte (fermeture des régions pas totalement fermées)

APPLICATIONS DETAILLEES

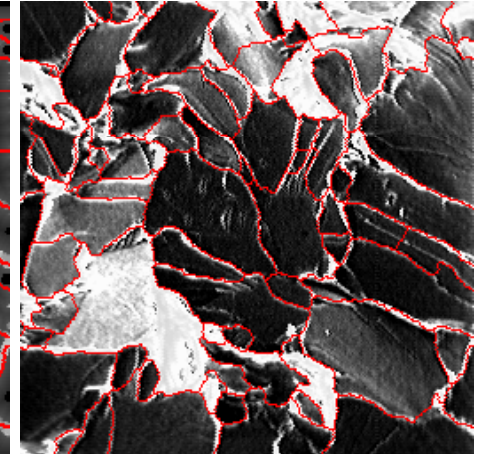
Fractures de clivage dans des images MEB d'acier



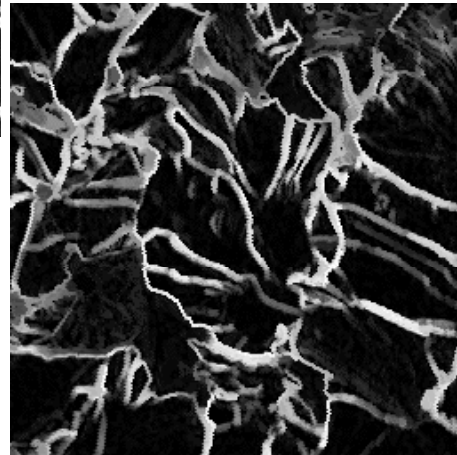
Fonction distance



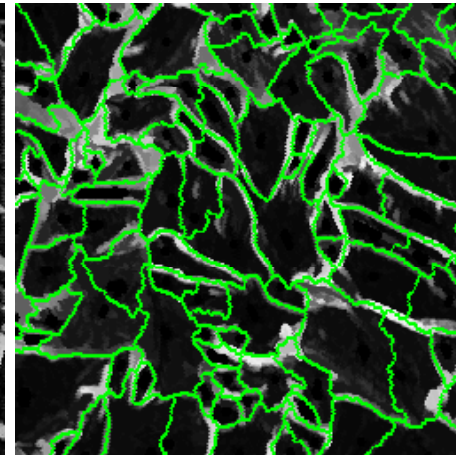
Première LPE



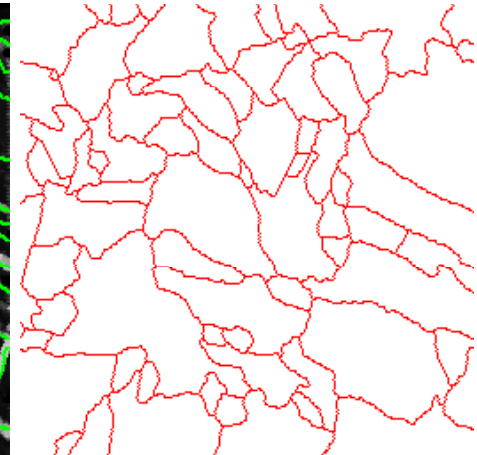
Barrages communs
aux deux LPE



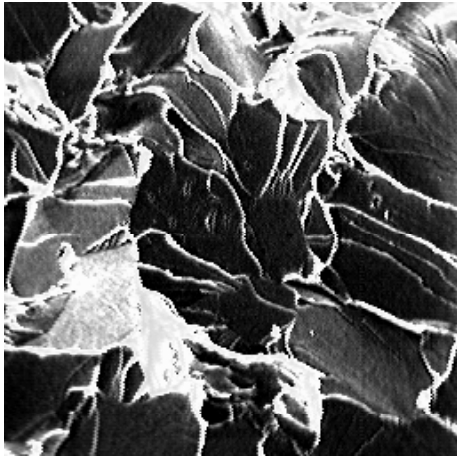
Fonction contraste



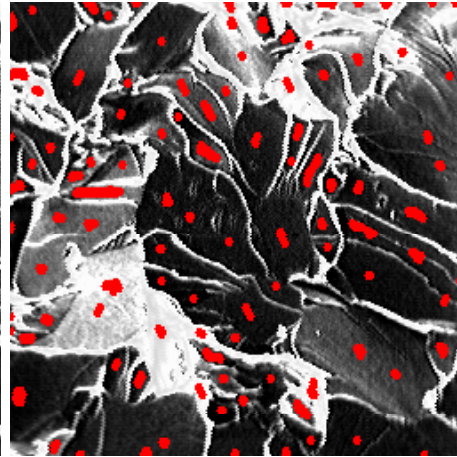
Seconde LPE



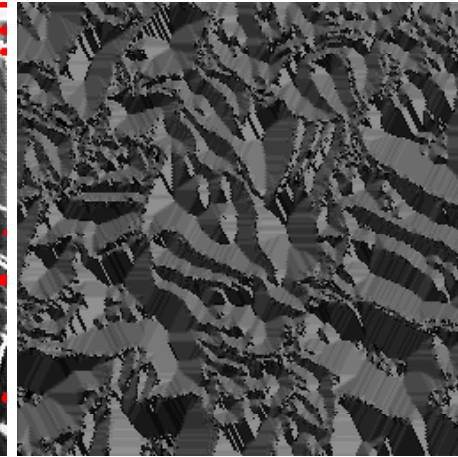
APPLICATIONS DETAILLES (2)



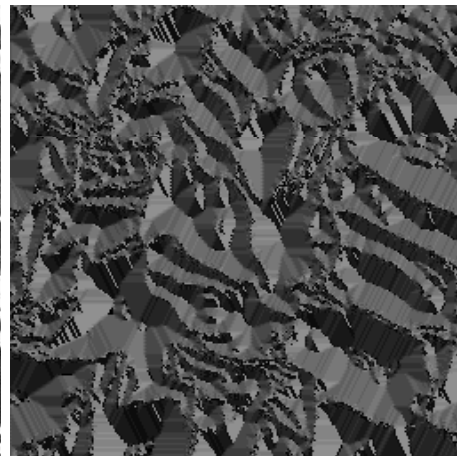
Paire stéréoscopique



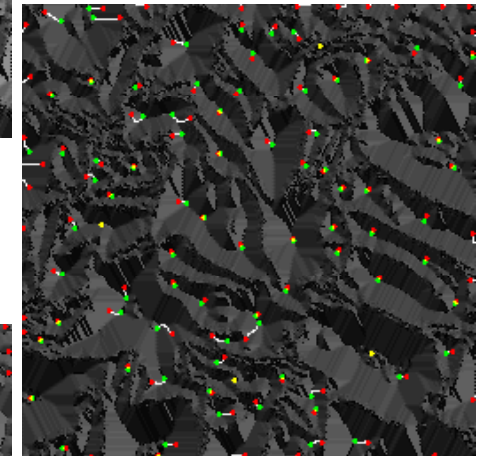
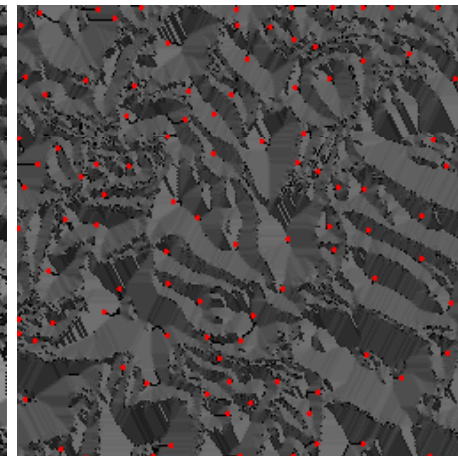
Marqueurs de la première image



Azimuts de la fonction distance

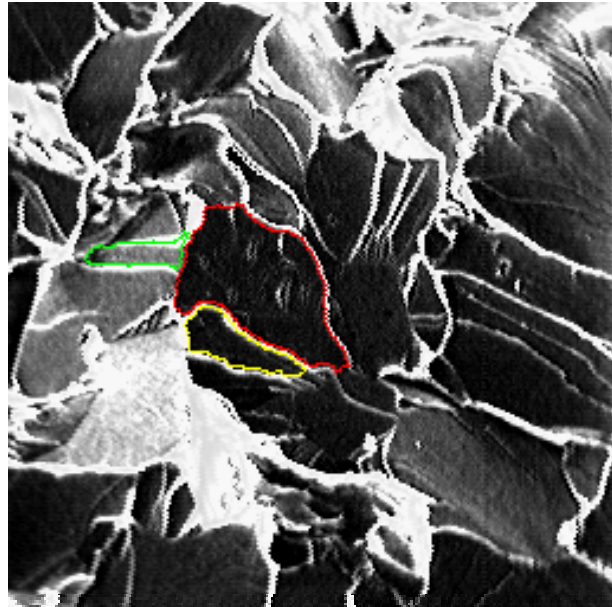


Azimuts (2ème image)



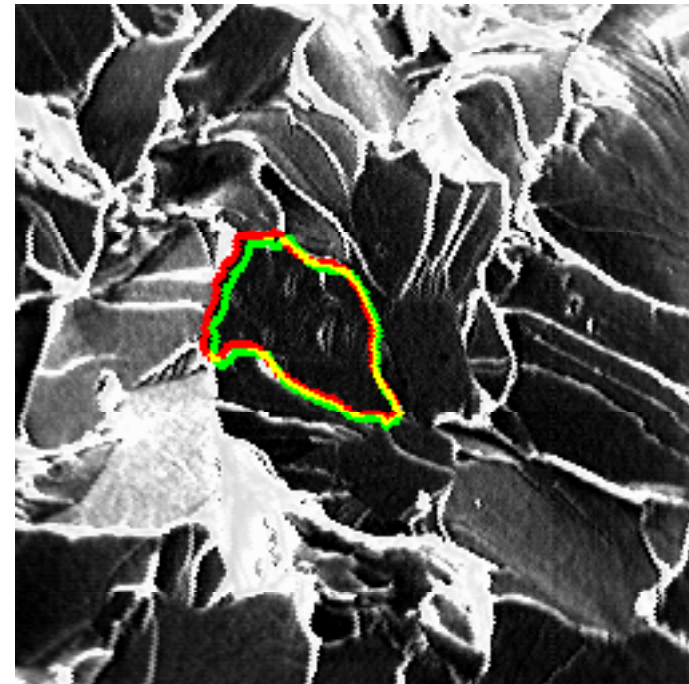
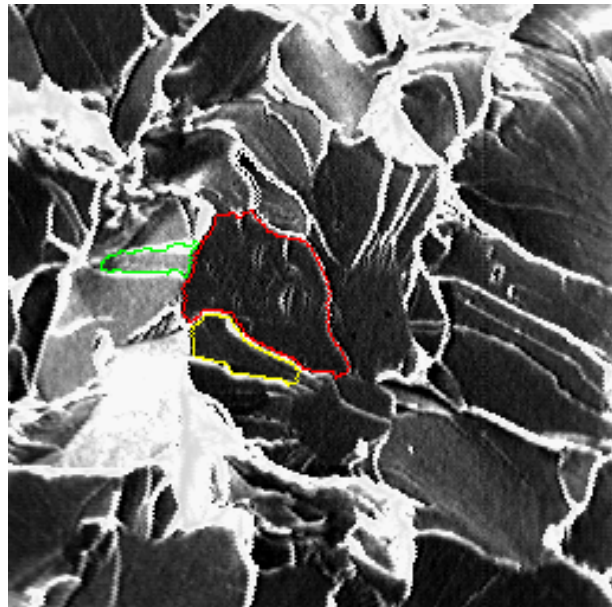
Les marqueurs de la première image sont jetés sur la seconde... et migrent selon la plus grande pente pour donner les nouveaux marqueurs (en vert).

APPLICATIONS DETAILLEES (3)



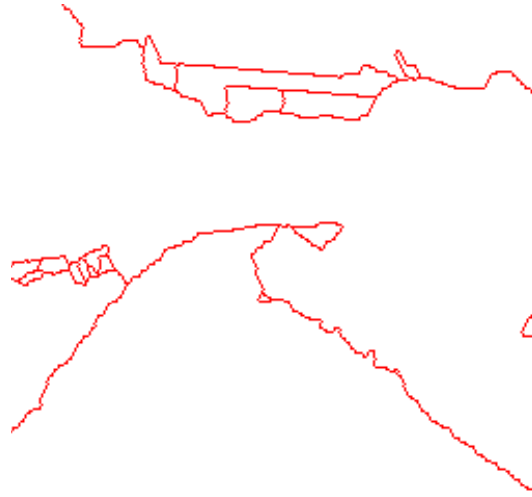
A droite, contours de facettes sur la première image et leurs homologues sur la seconde image.

Ci-dessous, le déplacement d'une facette qui peut être mesuré, permettant ainsi le calcul de son élévation.



APPLICATIONS DETAILLEES (4)

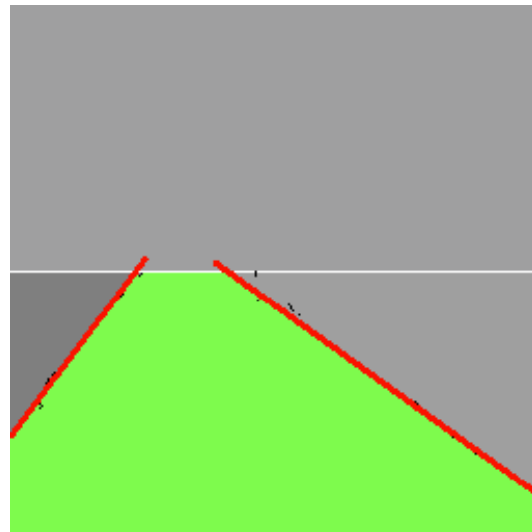
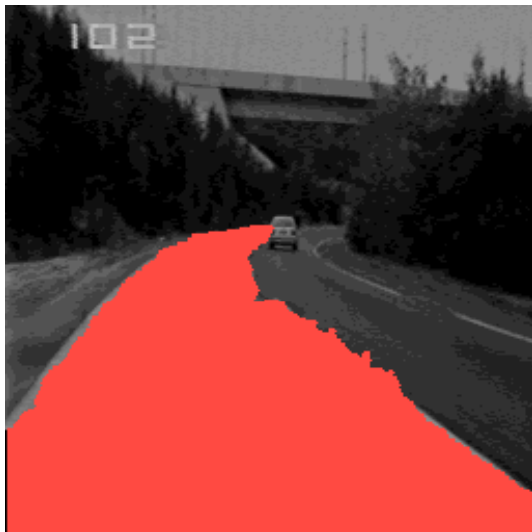
Le projet PROMETHEUS



Segmentation de route et détection d'obstacle

Deux phases:

- segmentation primaire de la route ou de la voie (LPE hiérarchique). Aucune information n'est partagée entre les images de la séquence
- Définition d'un modèle de route/voie (parfois très élémentaire) et utilisation de ce modèle pour construire des marqueurs utilisés dans la segmentation de l'image suivante.



APPLICATIONS DETAILLEES (5)

Première Phase

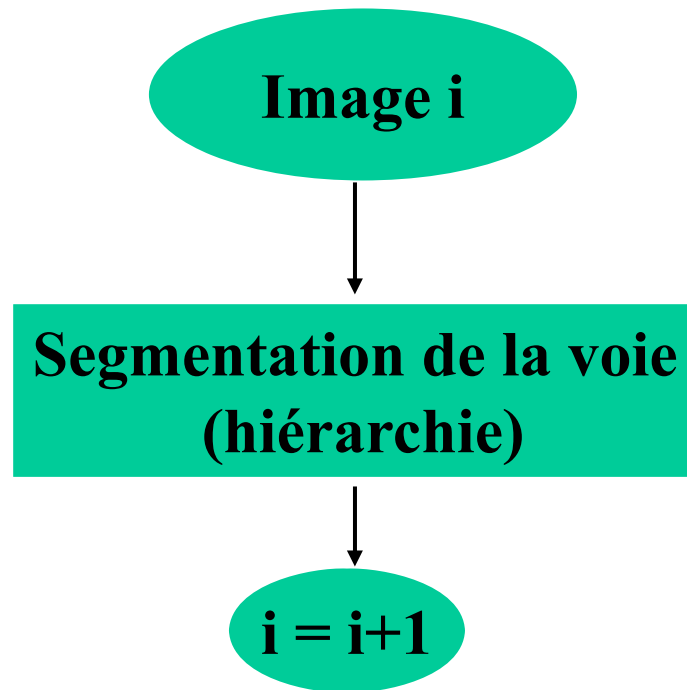
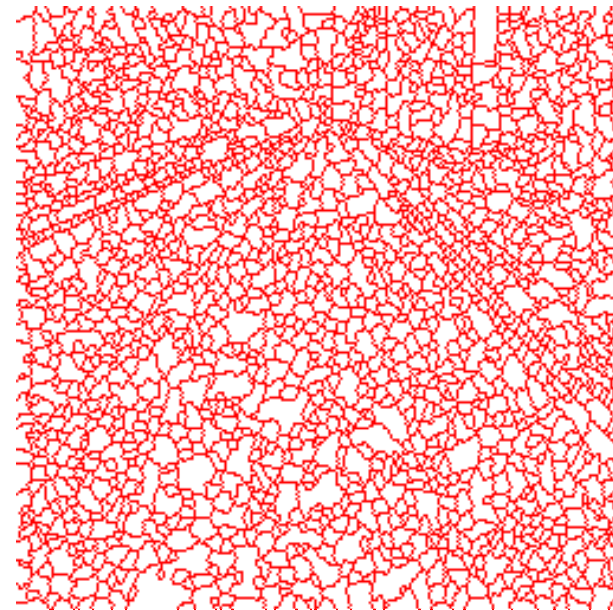
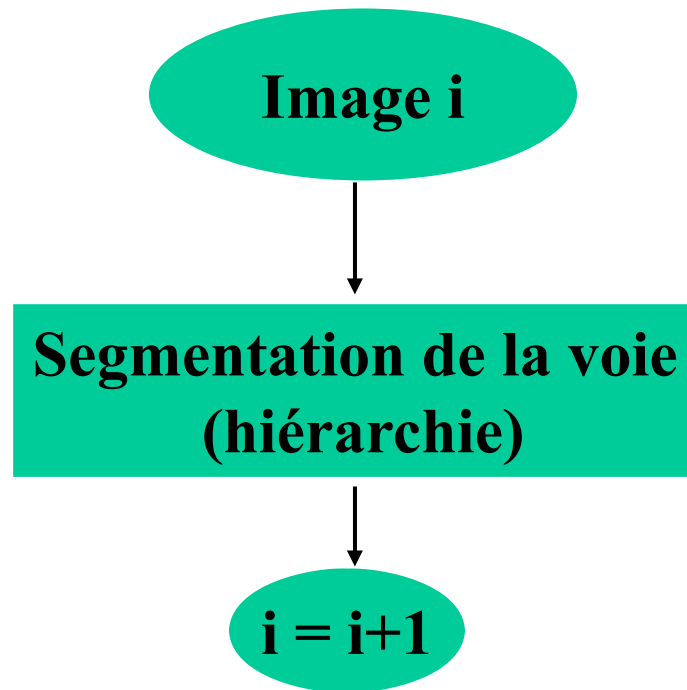


Image initiale

APPLICATIONS DETAILLEES (5)

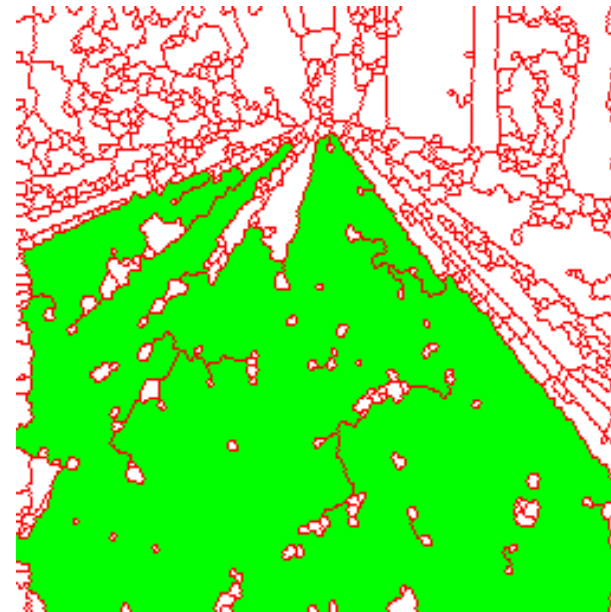
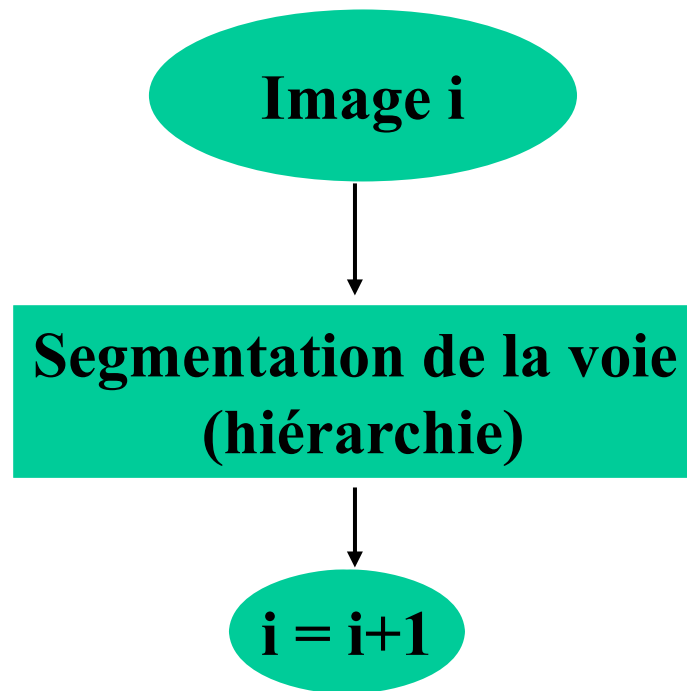
Première Phase



Première segmentation

APPLICATIONS DETAILLEES (5)

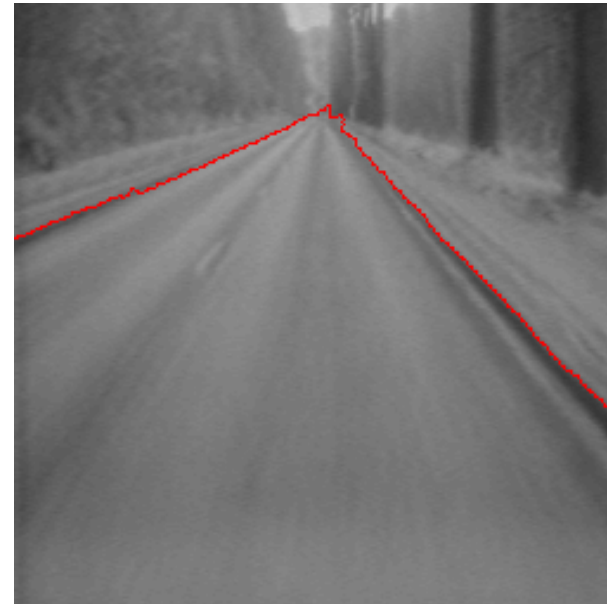
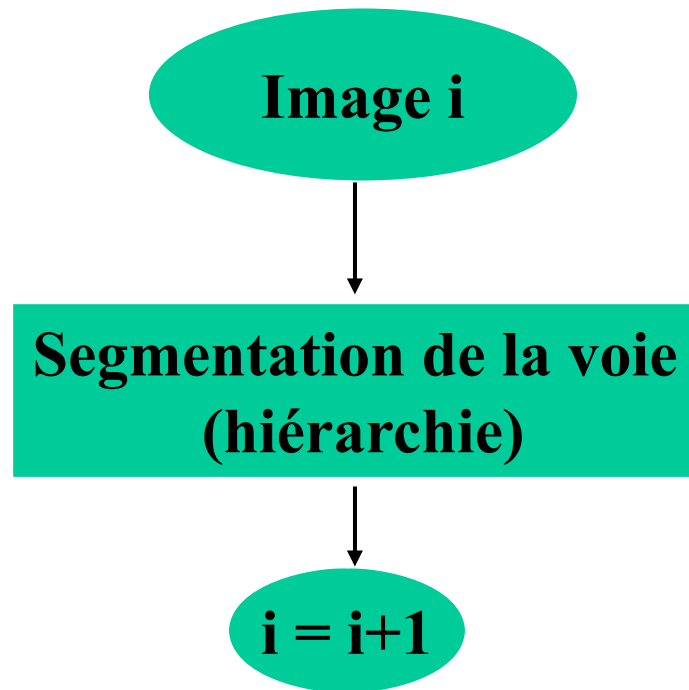
Première Phase



**Second niveau de hiérarchie
et extraction du marqueur**

APPLICATIONS DETAILLEES (5)

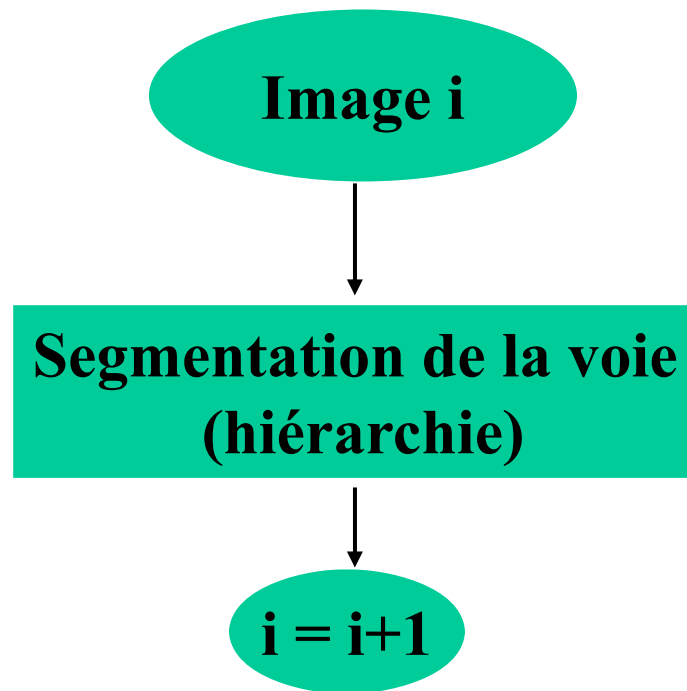
Première Phase



Segmentation finale

APPLICATIONS DETAILLEES (5)

Première Phase



**Exemple de détection
sur une séquence
complète**

APPLICATIONS DETAILLEES (6)

Phase II

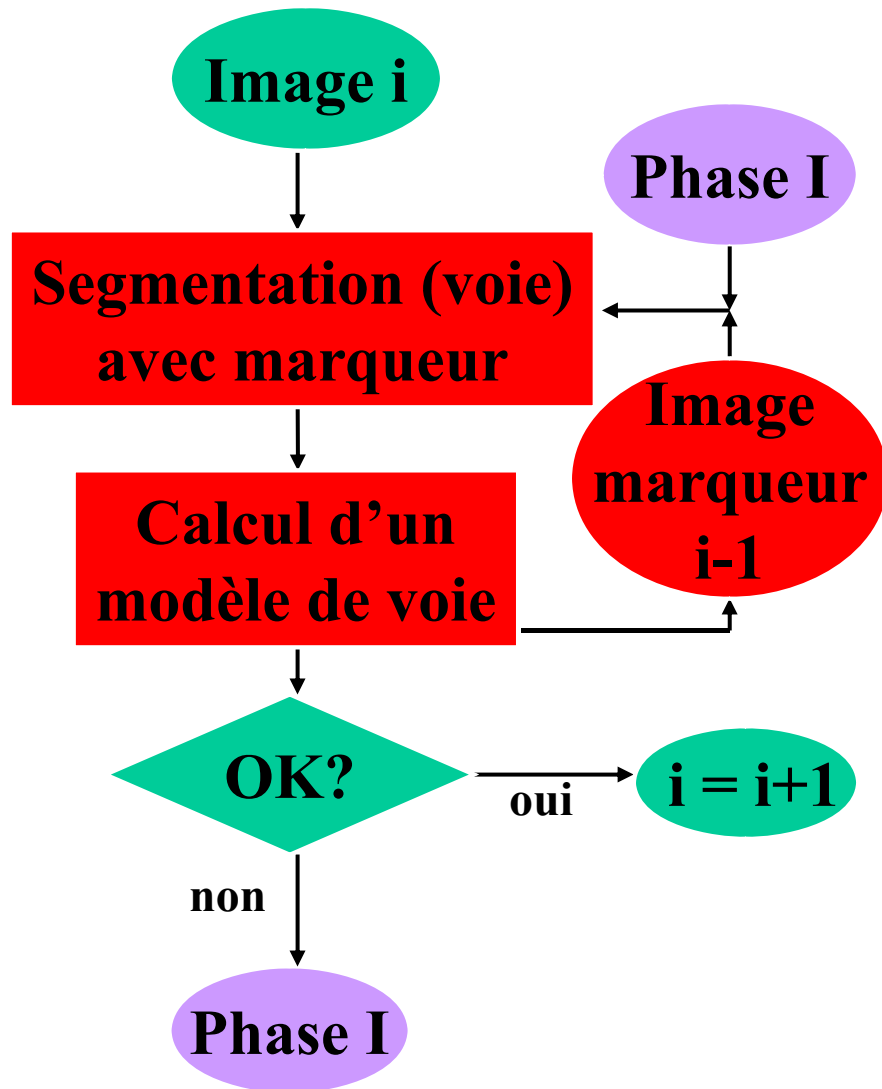
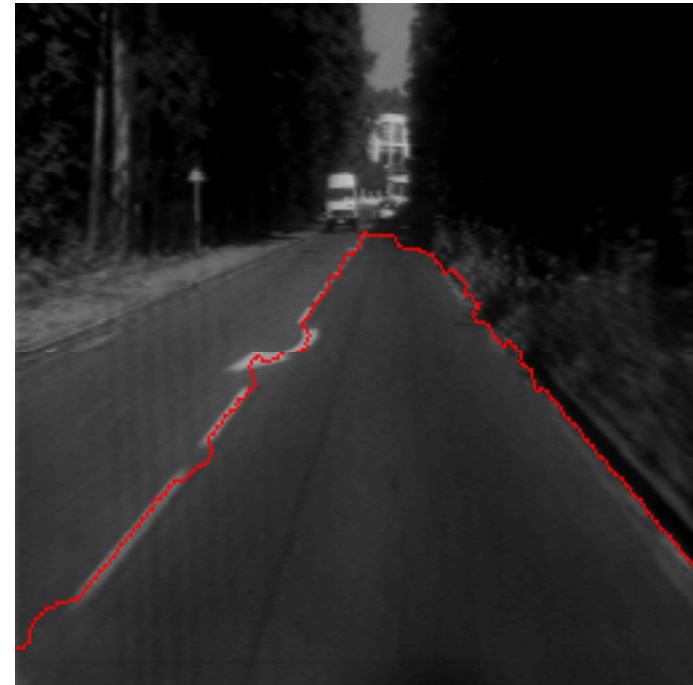
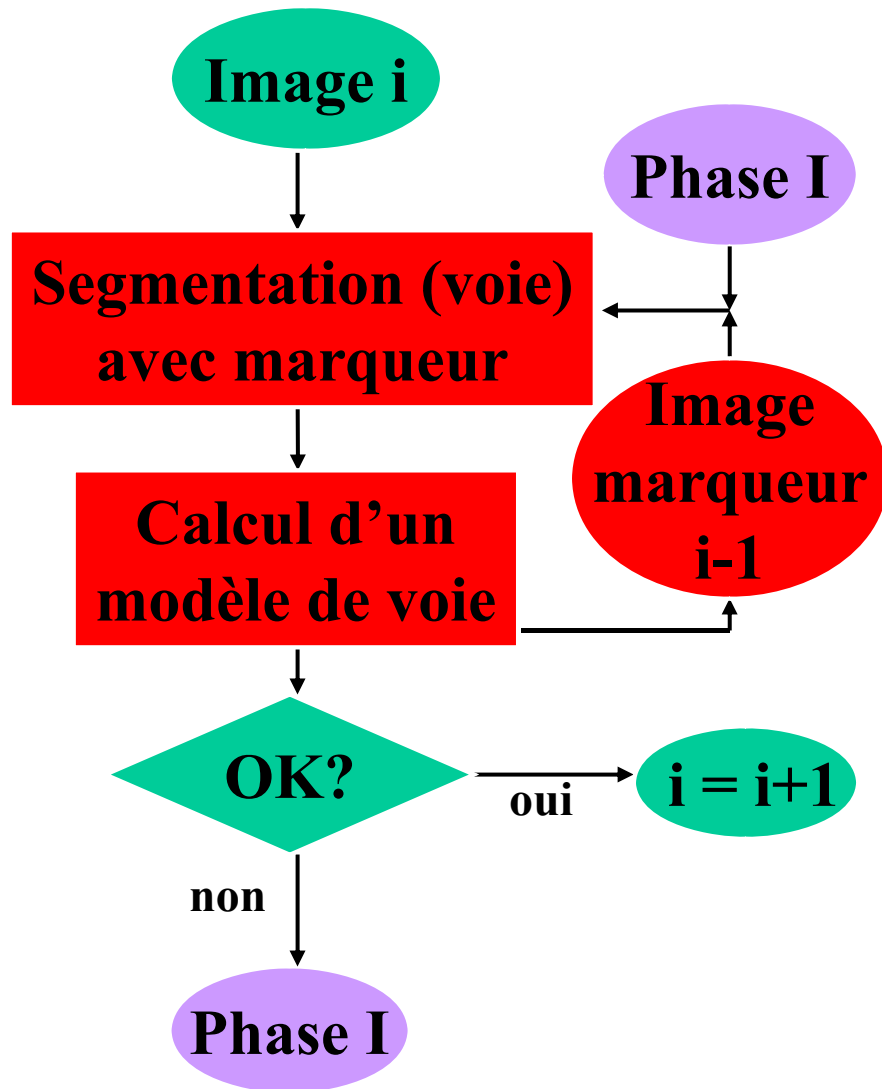


Image de la séquence à l'instant i

APPLICATIONS DETAILLEES (6)

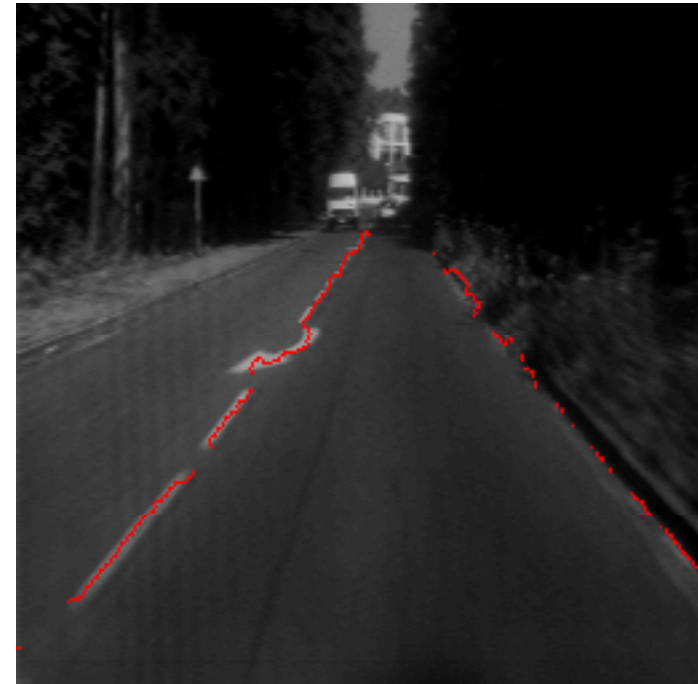
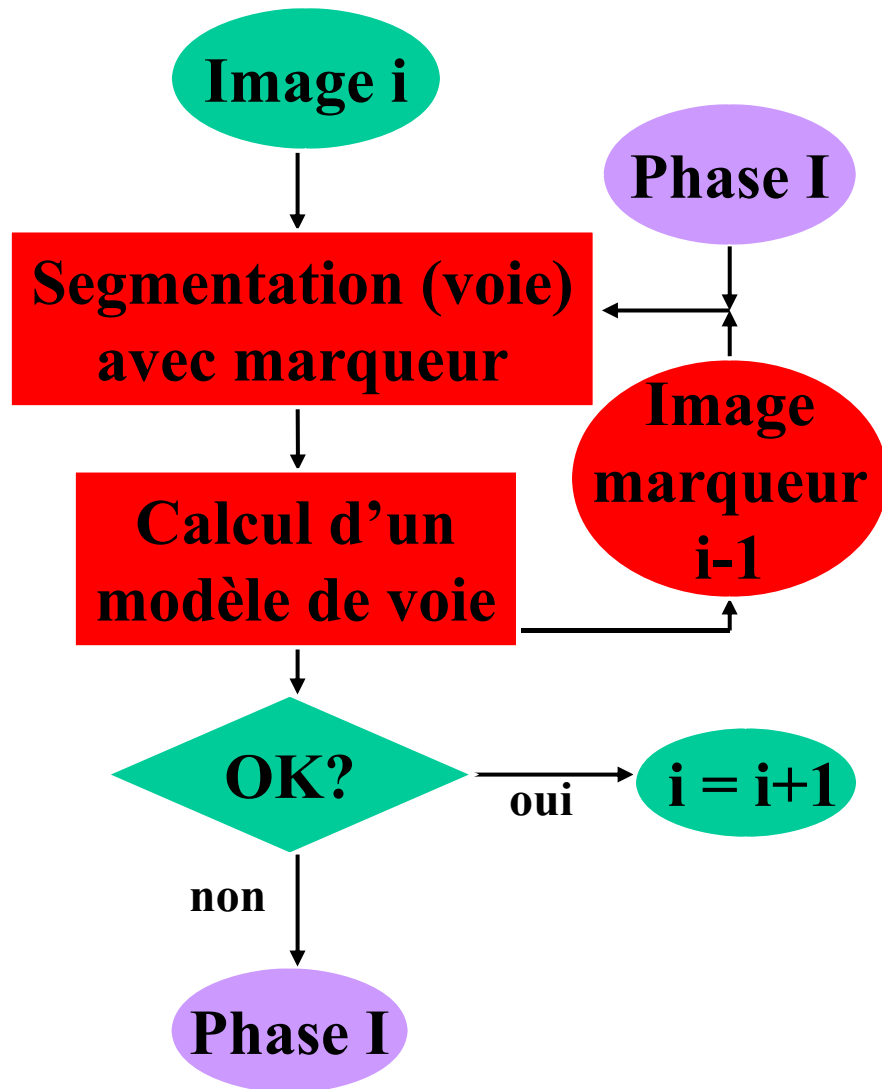
Phase II



Segmentation de la voie par LPE (marqueur généré par l'image précédente)

APPLICATIONS DETAILLEES (6)

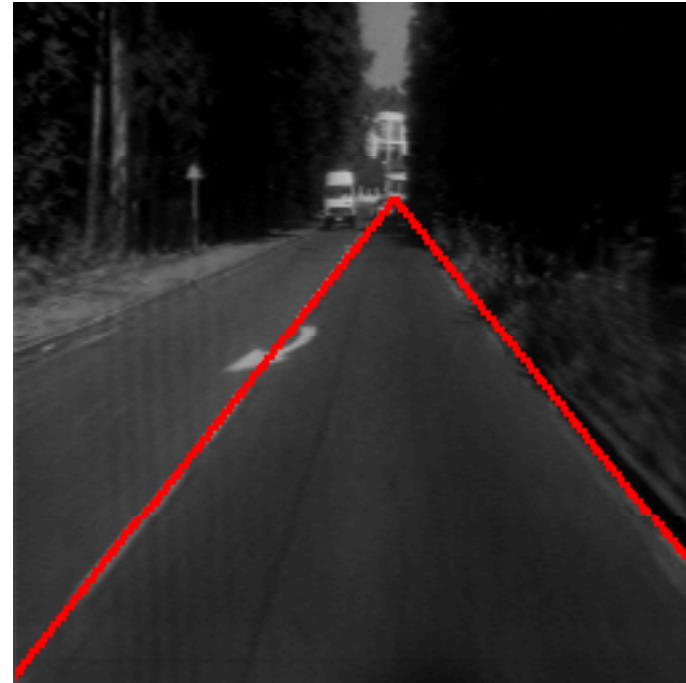
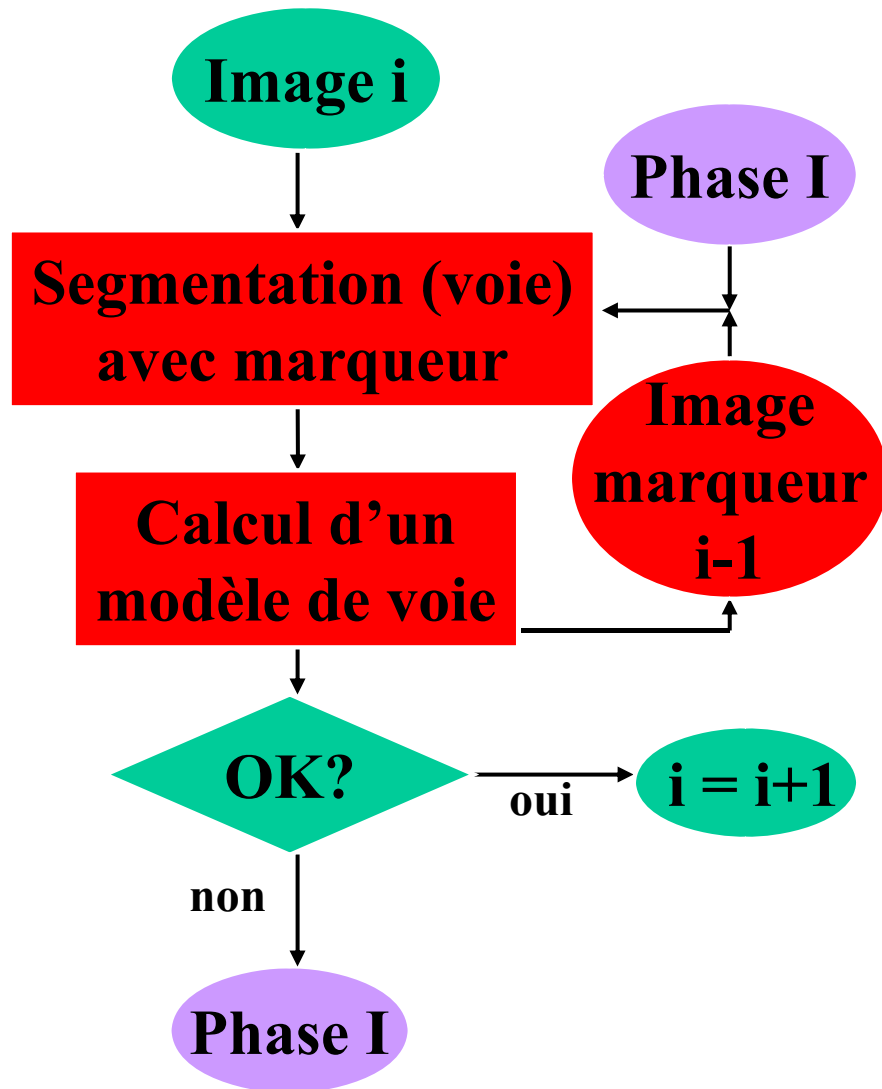
Phase II



Les pixels appartenant au contours de la voie sont sélectionnés...

APPLICATIONS DETAILLEES (6)

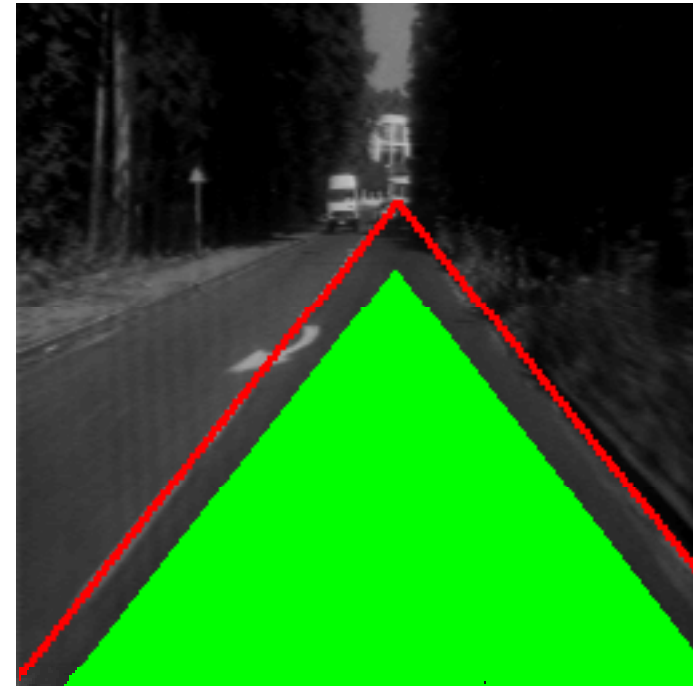
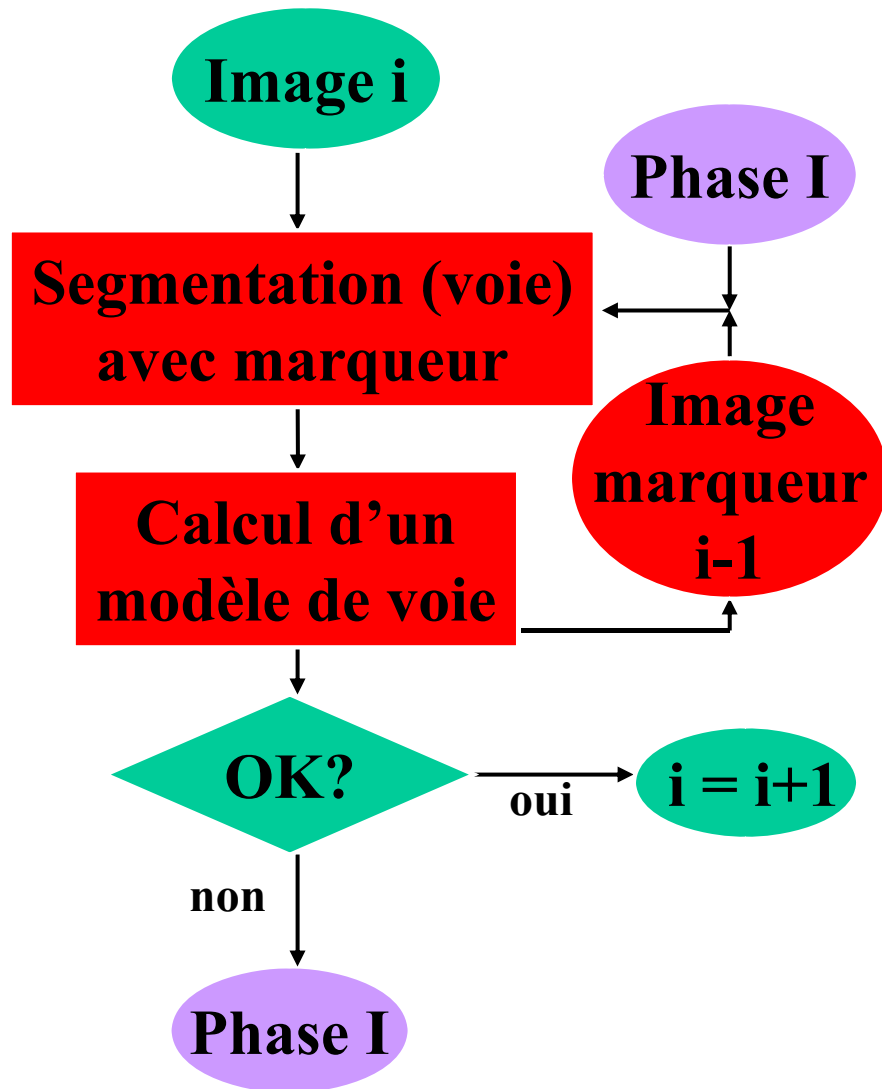
Phase II



...et utilisés pour ajuster un modèle de voie

APPLICATIONS DETAILLEES (6)

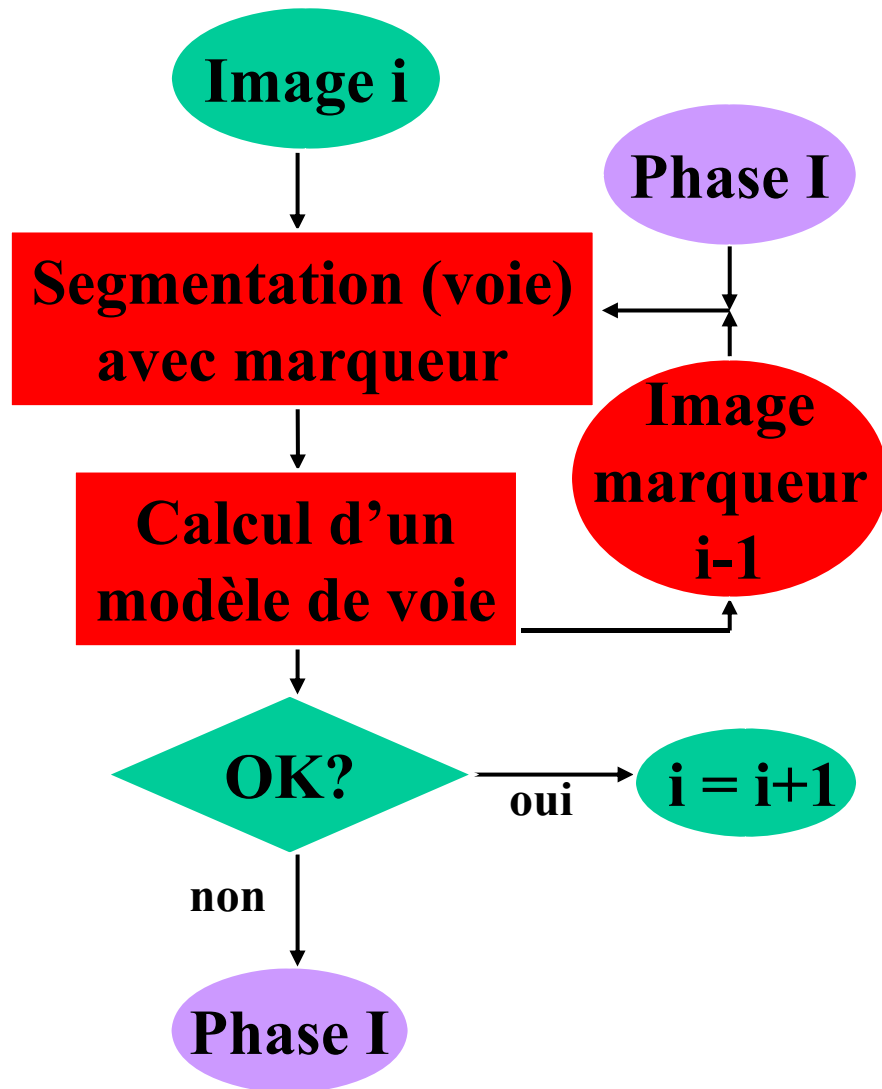
Phase II



Le modèle de voie permet de générer un nouveau marqueur

APPLICATIONS DETAILLEES (6)

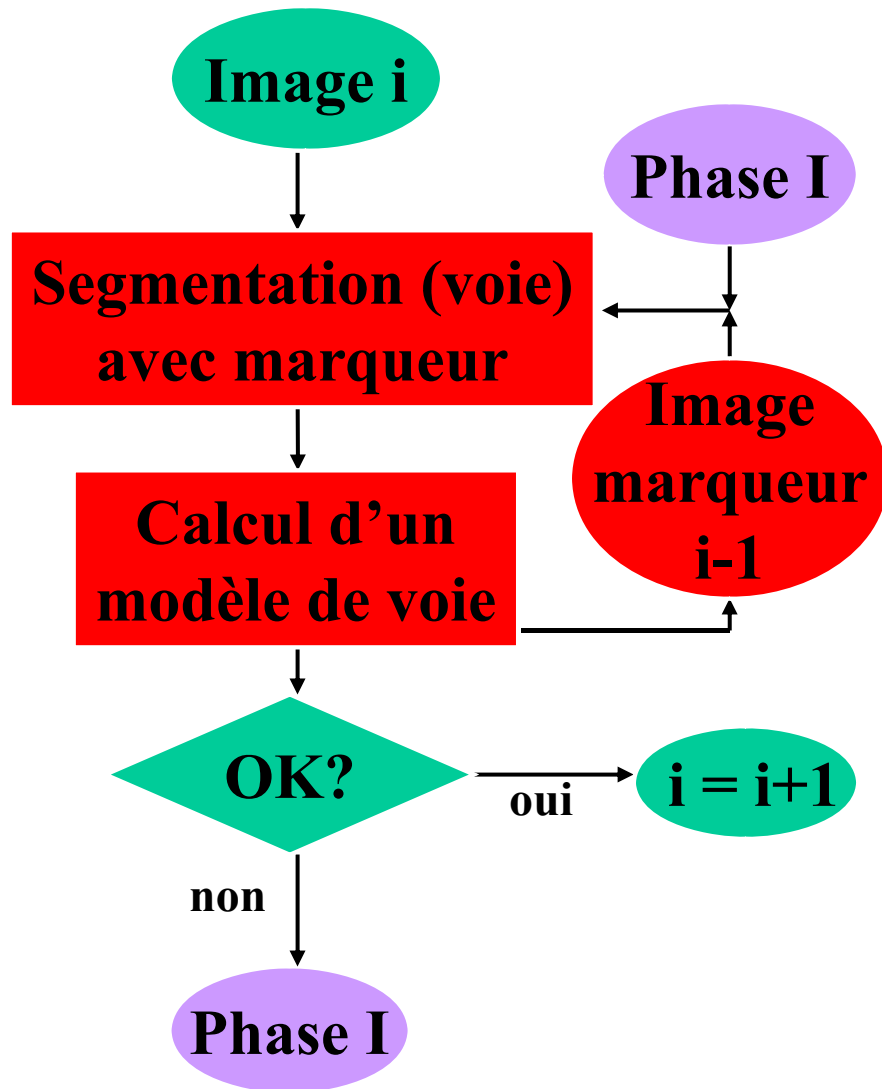
Phase II



Si aucune erreur n'est détectée, traitement de l'image suivante

APPLICATIONS DETAILLEES (6)

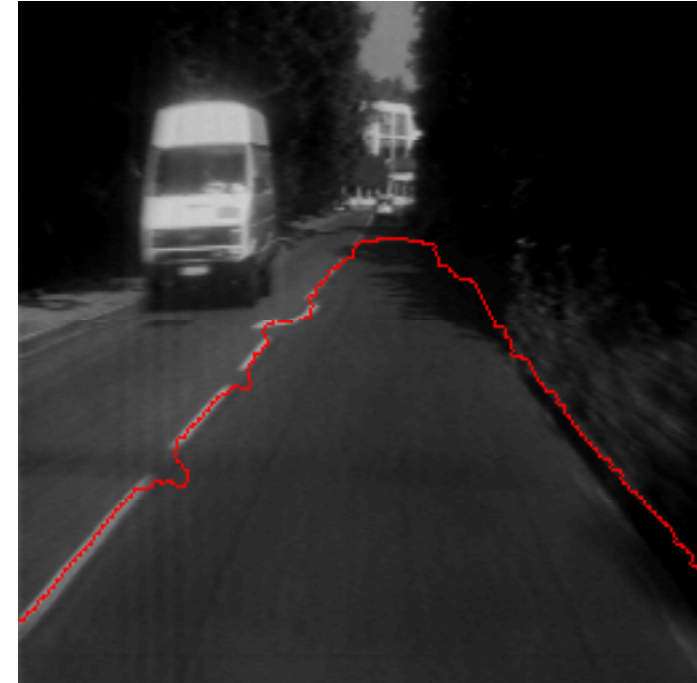
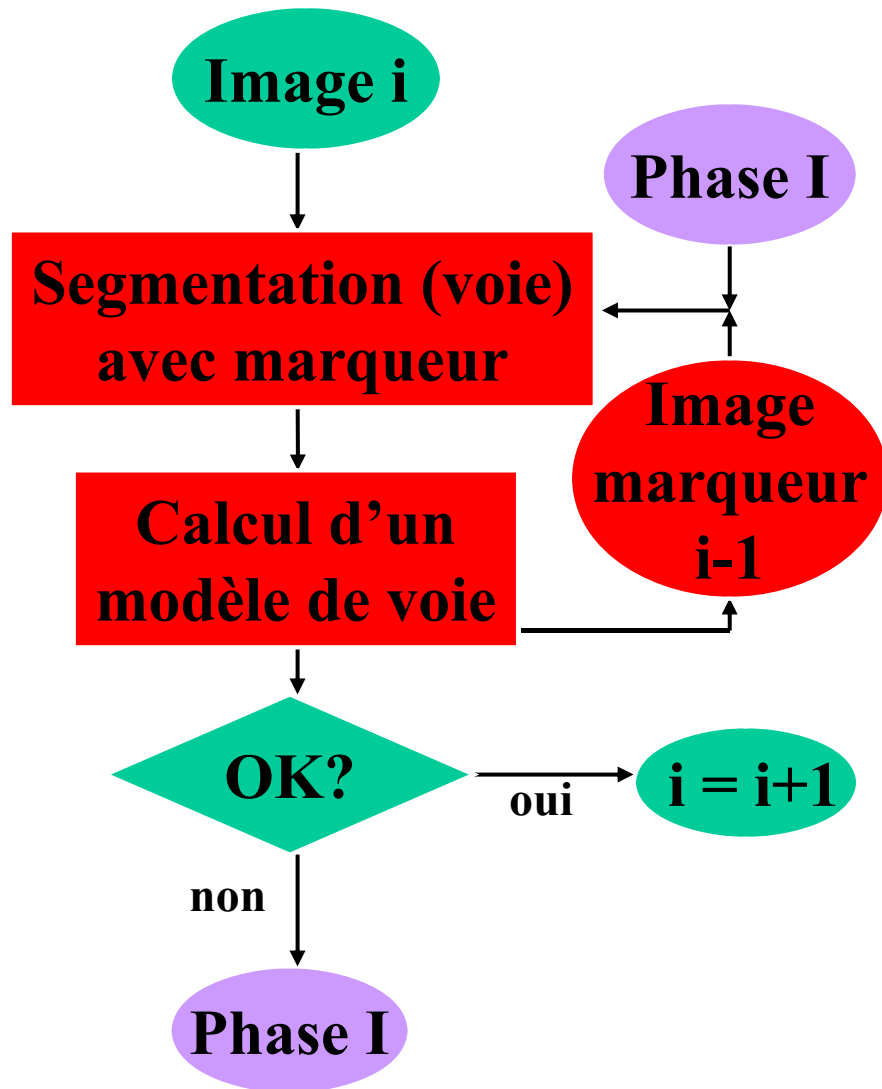
Phase II



Le marqueur précédent est utilisé pour segmenter l'image courante

APPLICATIONS DETAILLEES (6)

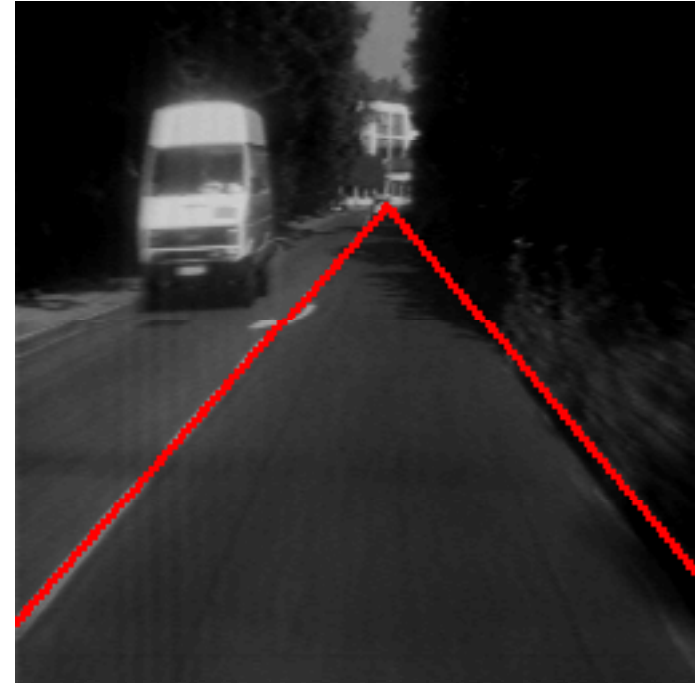
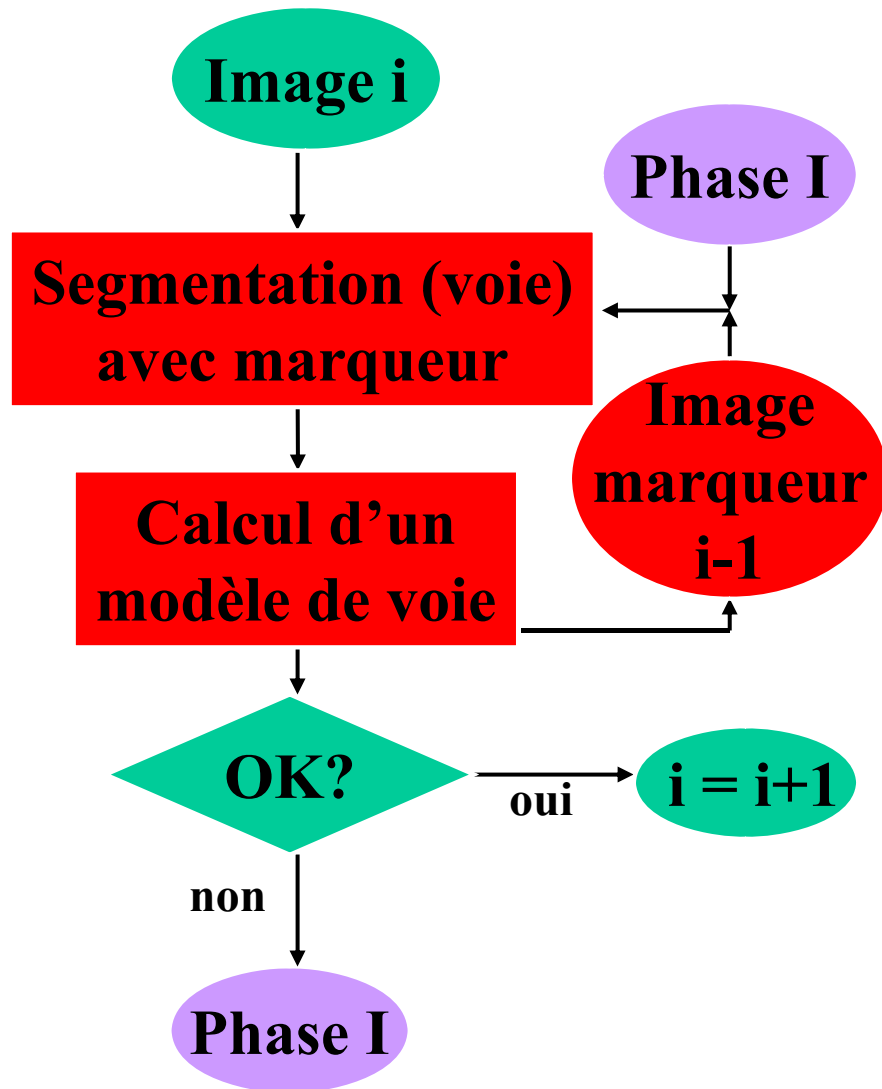
Phase II



Le marqueur précédent est utilisé pour segmenter l'image courante

APPLICATIONS DETAILLEES (6)

Phase II



Et un nouvel ajustement du modèle de voie est réalisé

APPLICATIONS DETAILLEES (6)

Phase II

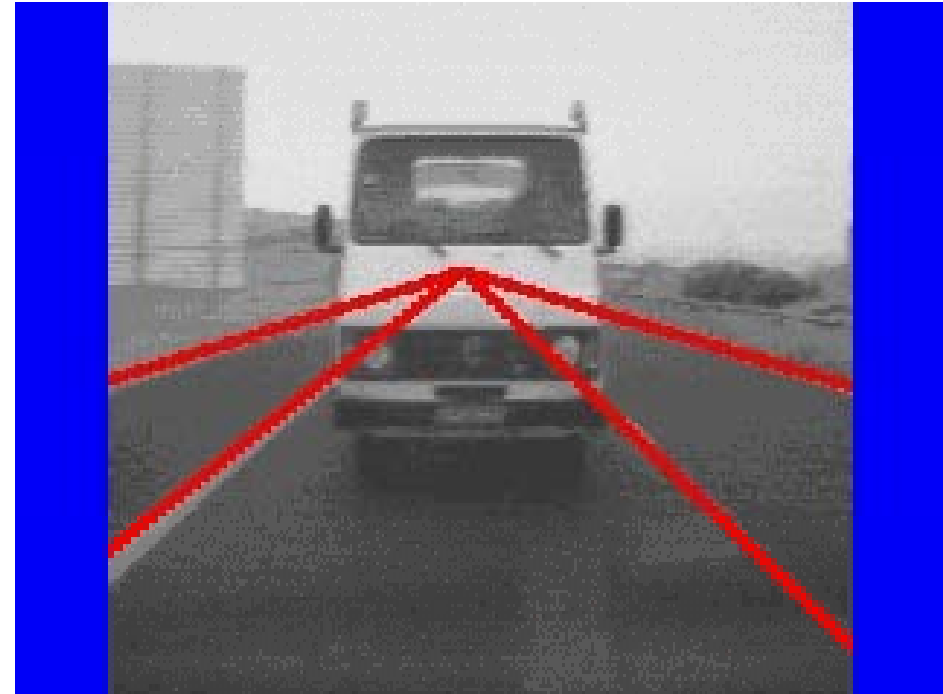
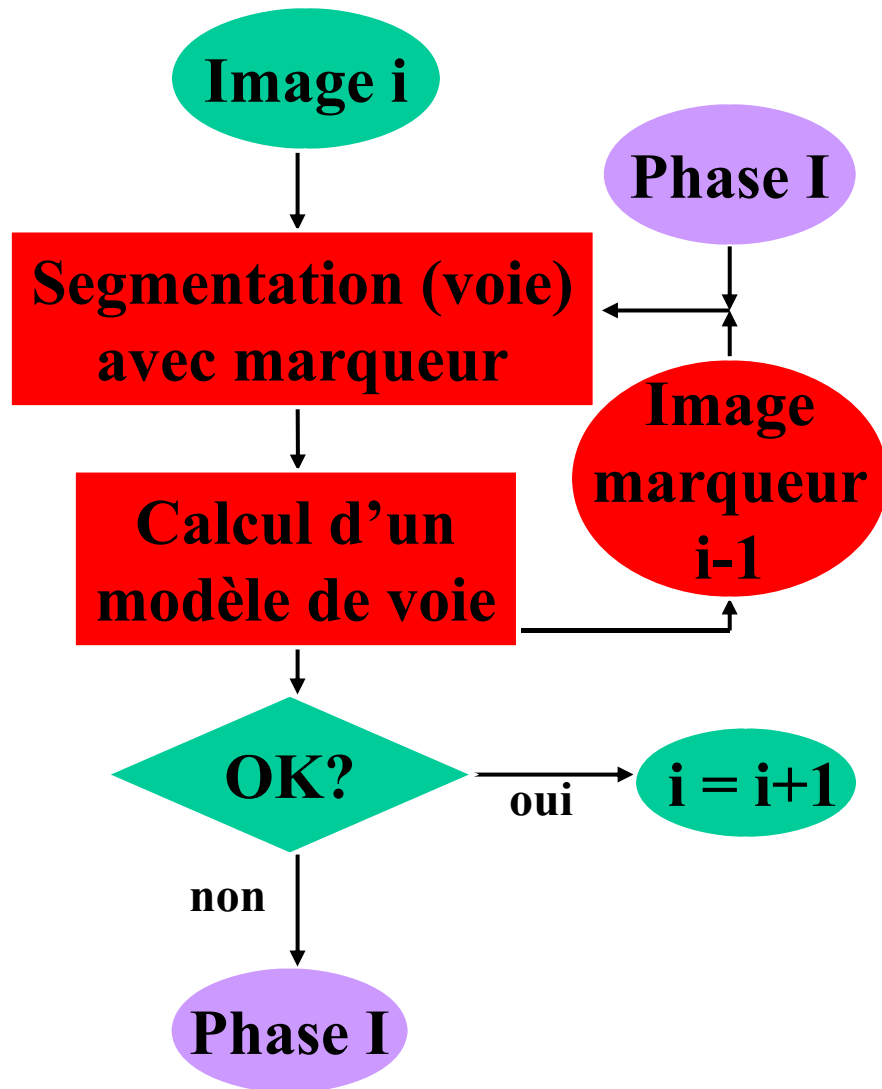


Illustration du processus sur une séquence complète (modèle de chaussée à trois voies)

Notons que, malgré son apparente complexité, cette phase est plus rapide que la phase I (pas de segmentation hiérarchique).

SEGMENTATION HIERARCHIQUE

SEGMENTATION HIERARCHIQUE, CASCADES

Problèmes non résolus

Il n'est pas toujours possible d'éviter la sur-segmentation à l'aide d'une LPE contrôlée par marqueurs car il n'est pas toujours possible de trouver de bons marqueurs et/ou de bons critères de segmentation.

D'autres approches de la segmentation qui ne sont pas basées sur une sélection a priori des marqueurs peuvent donc être utiles.

Différents algorithmes existent. Ils ont tous pour but de définir une hiérarchie de segmentations:

Hiérarchie basée sur des valeurs d'extinction

Hiérarchie basée sur les cascades

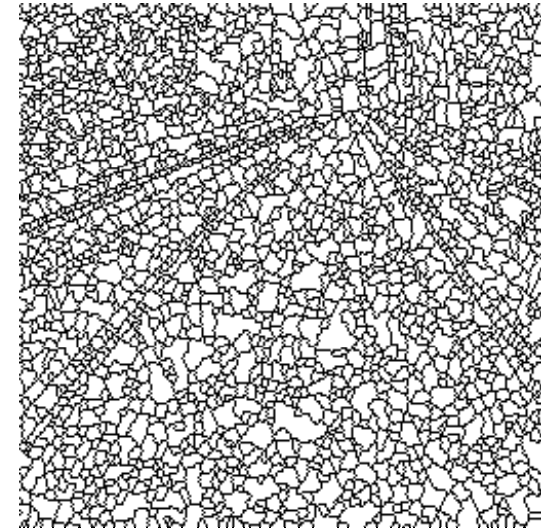
Hiérarchie basée sur des empilements

LIGNE DE PARTAGE DES EAUX VALUEE

LPE Valuée

La LPE d'une fonction g est un ensemble $W(g)$

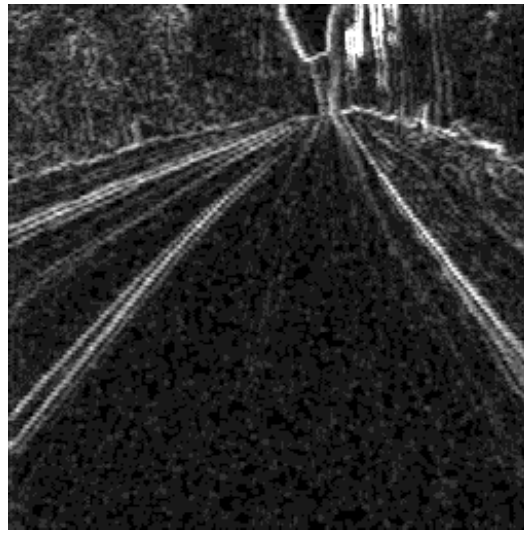
La LPE valuée est la fonction $w(g)$ définie sur W et égale à g en chaque point de W



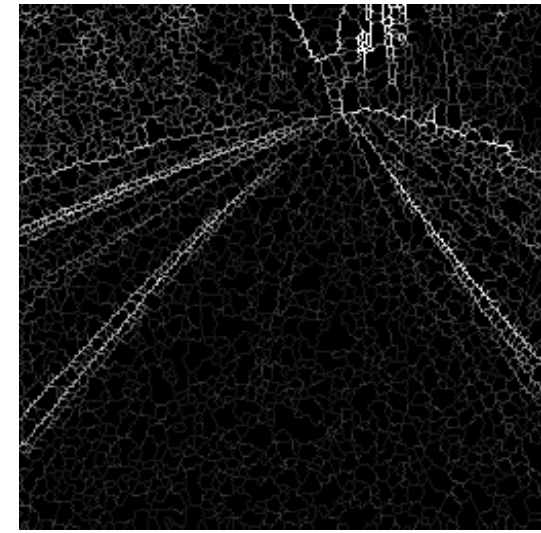
W



Initial image



Gradient g

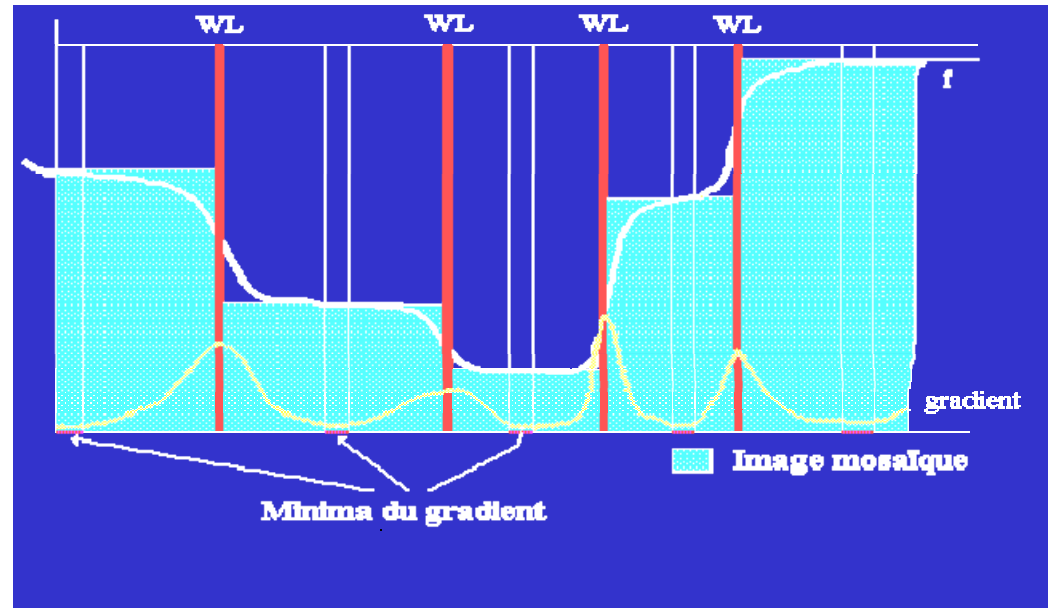


$w(g)$

IMAGE MOSAÏQUE ET SON GRADIENT

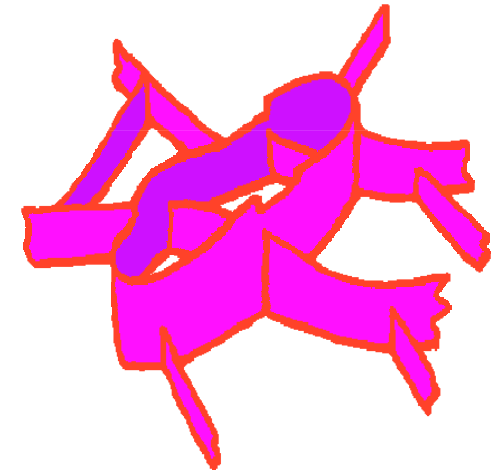
Construction de l'image mosaïque

- LPE du gradient
- Pour chaque minimum du gradient, déterminer la valeur de gris correspondante
- Remplir le bassin versant avec cette valeur



SUR-SEGMENTATION ET PERCEPTION DES IMAGES

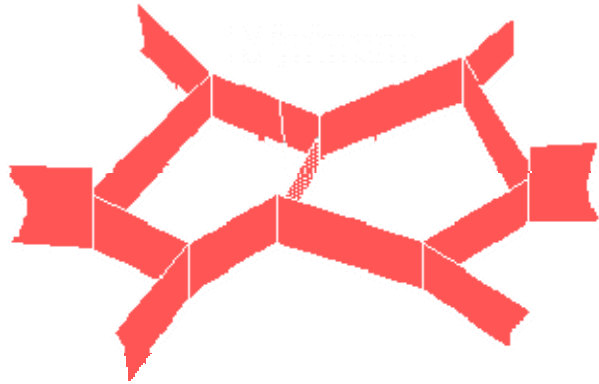
Une illustration simple utilisant une image mosaïque



En dépit du fait que l'image soit sur-segmentée, la tache blanche se détache aisément du fond parce que, simultanément, les frontières entre les régions à l'intérieur de la tache et les frontières à l'intérieur du fond sont moins contrastées que les frontières qui séparent la tache du fond. La tache comme le fond sont marqués par des frontières avec un contraste minimal.

DEFINITION D'UN GRAPHE

Arcs de hauteur minimale

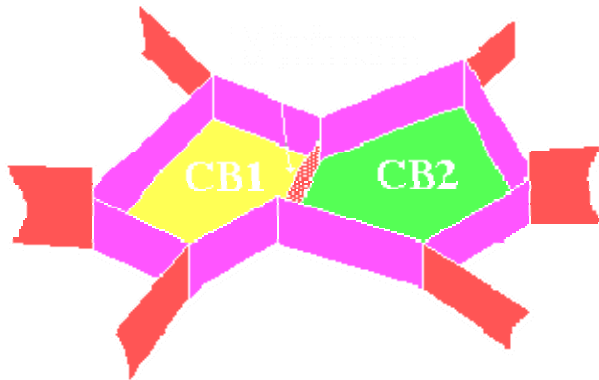


Dans l'image mosaïque, chaque arc c_{ij} sépare deux bassins versants CB_i et CB_j . La valuation v_{ij} de l'arc est donnée par:

$$v_{ij} = |g_i - g_j|$$

où g_i et g_j sont les valeurs de gris dans les bassins versants.

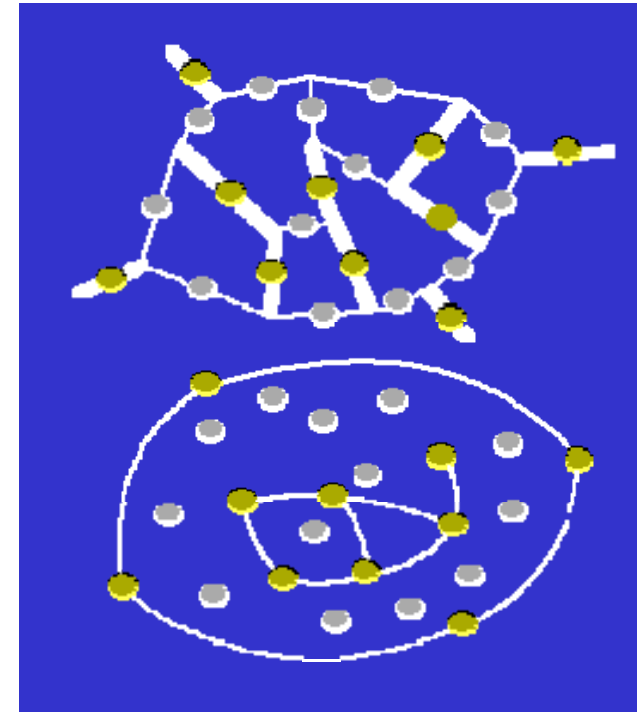
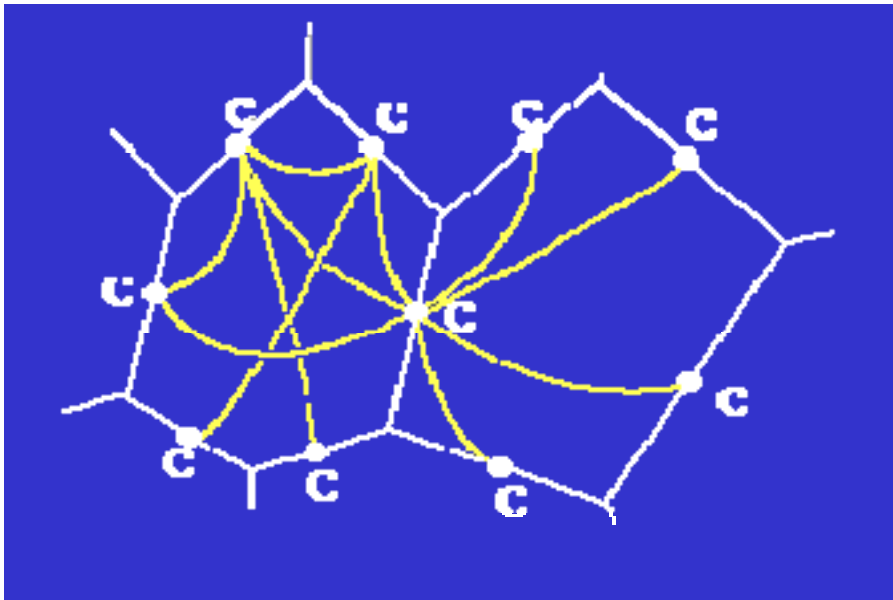
Un arc c_{ij} est dit minimal si sa valuation est inférieure à celles des autres arcs entourant CB_i et CB_j



DEFINITION D'UN GRAPHE ET LPE ASSOCIEE

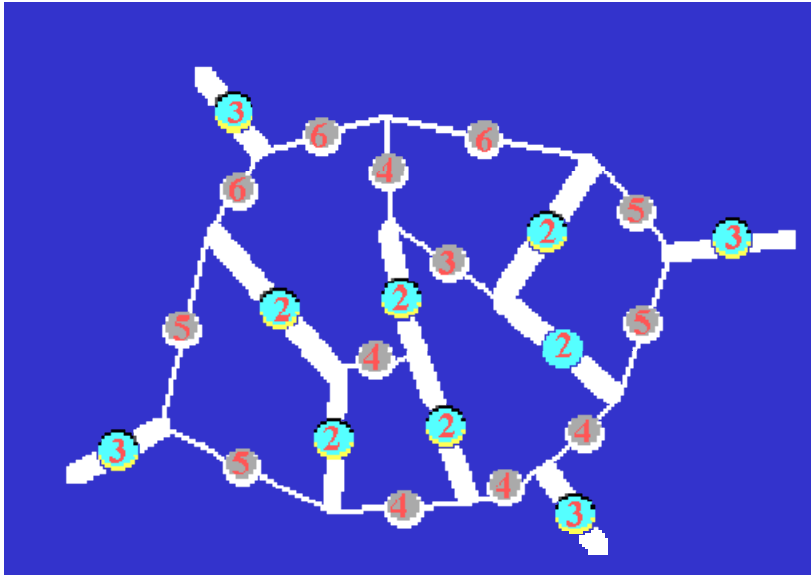
Définition d'un nouveau graphe

- ses sommets correspondent aux arcs du gradient mosaïque
- ses arêtes joignent tous les arcs entourant le même bassin versant
- chaque sommet est valué par la valuation de l'arc définie dans le gradient mosaïque

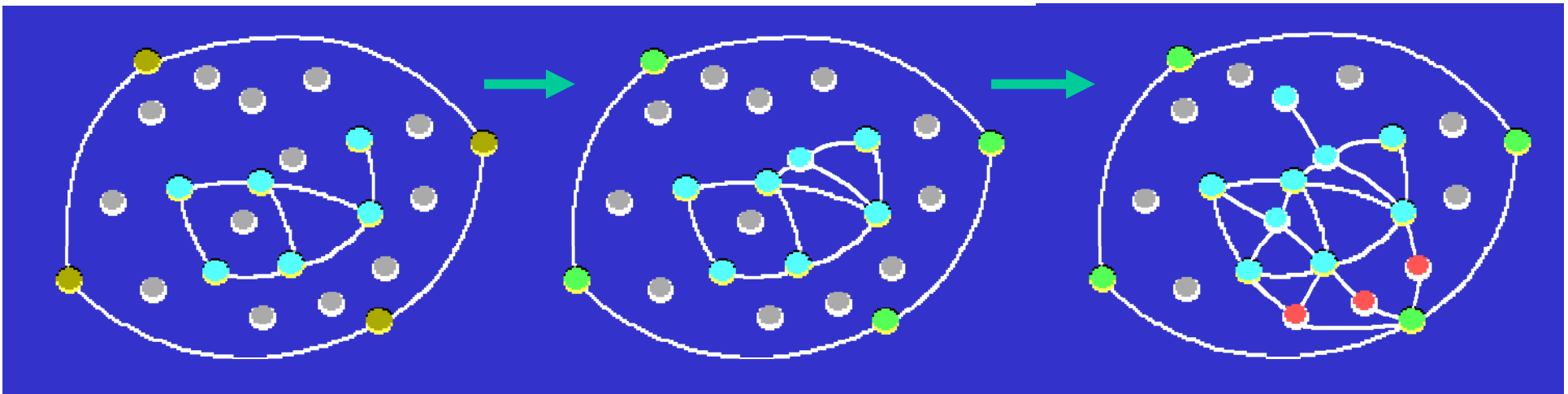


Dans cette représentation, les arcs entourant le même bassin versant sont adjacents. Des arcs minimaux peuvent donc être connectés bien que ce ne soit pas le cas dans le gradient mosaïque, comme illustré ci-dessus (les sommets en jaune correspondent à des arcs minimaux).

DEFINITION D'UN GRAPHE ET LPE ASSOCIEE (2)



Les contours les plus significatifs de l'image mosaïque correspondent à ceux séparant des régions marquées par des arcs minimaux. Ils sont les lignes de partage des eaux de la LPE définie sur le graphe précédent.

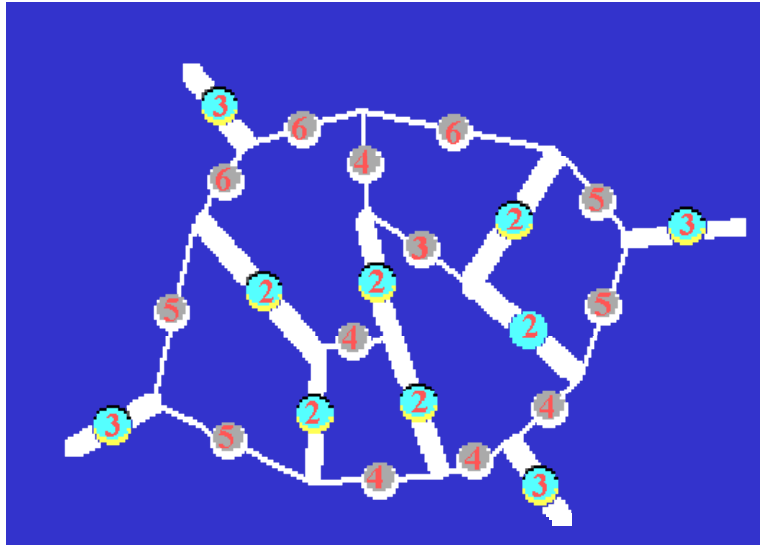


Inondation, 1ère étape
(en bleu)

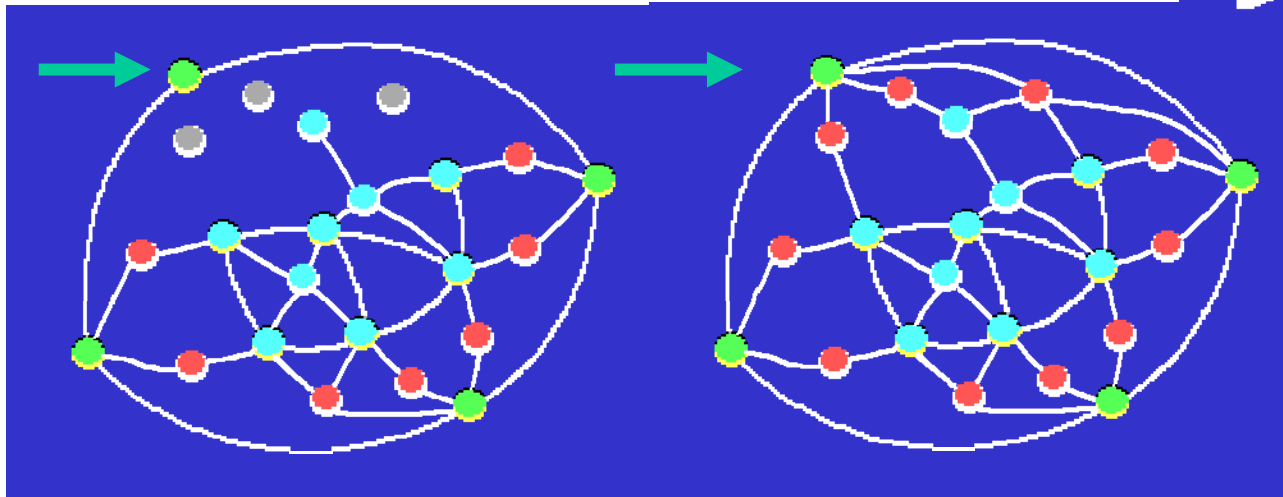
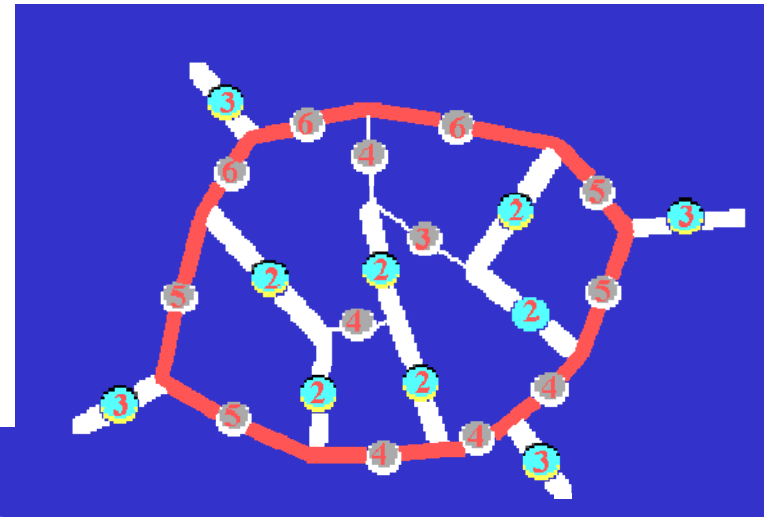
2ème étape, deux BV
(en bleu et vert)

3ème étape, premiers
Barrages en rouge

DEFINITION D'UN GRAPHE ET LPE ASSOCIEE (3)



Arcs du gradient mosaïque correspondant
aux lignes de partage des eaux.

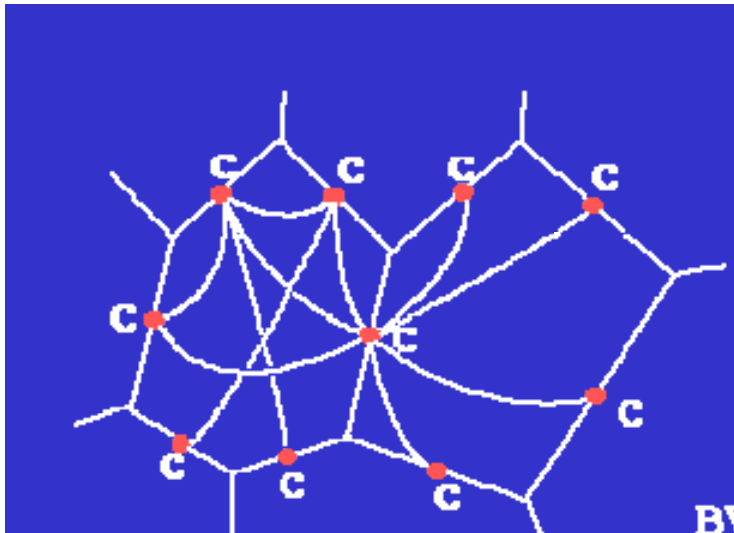


4ème étape

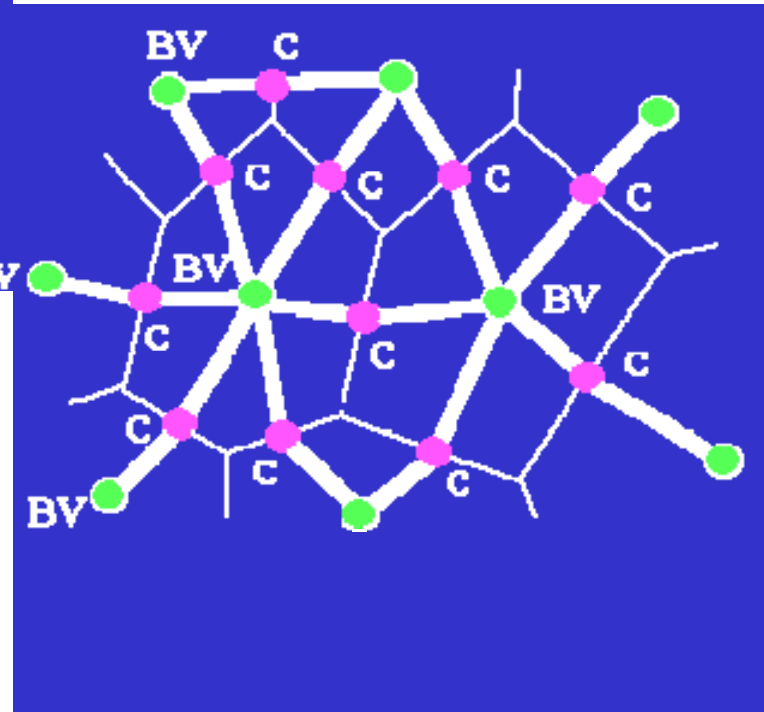
LPE finale



D'UN GRAPHE 3D A UN GRAPHE PLANAIRE



Le graphe défini précédemment est un graphe valué 3D, pas facile à manipuler.



Ce graphe peut être transformé en un graphe planaire grâce à la procédure suivante:

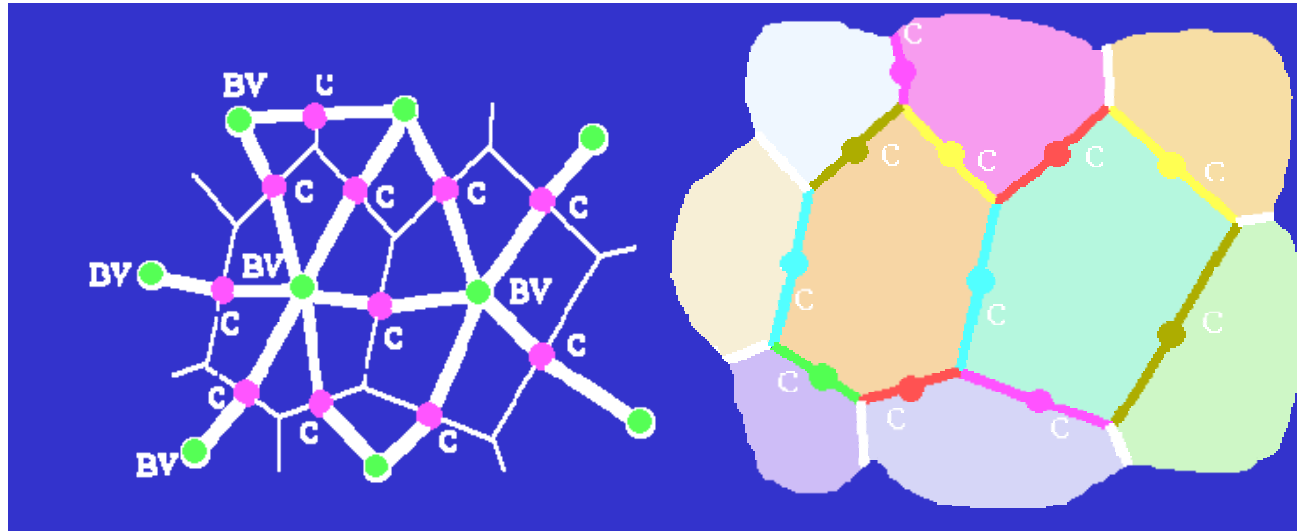
- Un nouveau sommet est ajouté à l'intérieur de chaque bassin versant.
- Les arêtes précédentes sont remplacées par deux arêtes successives reliant les sommets originaux en passant par le nouveau sommet.
- La valuation du nouveau sommet est donnée par:

$$\min (v_{ij})$$

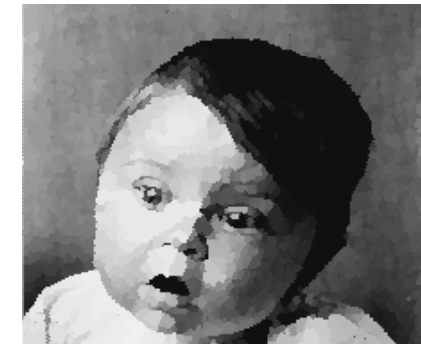
Où les v_{ij} sont les valuations des arcs entourant le bassin versant.

REPRESENTATION SOUS FORME D'IMAGE

L'image hiérarchique



Une image, nommée image hiérarchique peut être construite à partir du graphe planaire. Les bassins versants du gradient mosaïque sont remplis avec des valeurs de gris correspondant aux valuations des nouveaux sommets ajoutés. La LPE de l'image hiérarchique fournit le niveau de hiérarchie supérieur (avec quelques restrictions).



mosaïque



gradient mosaïque

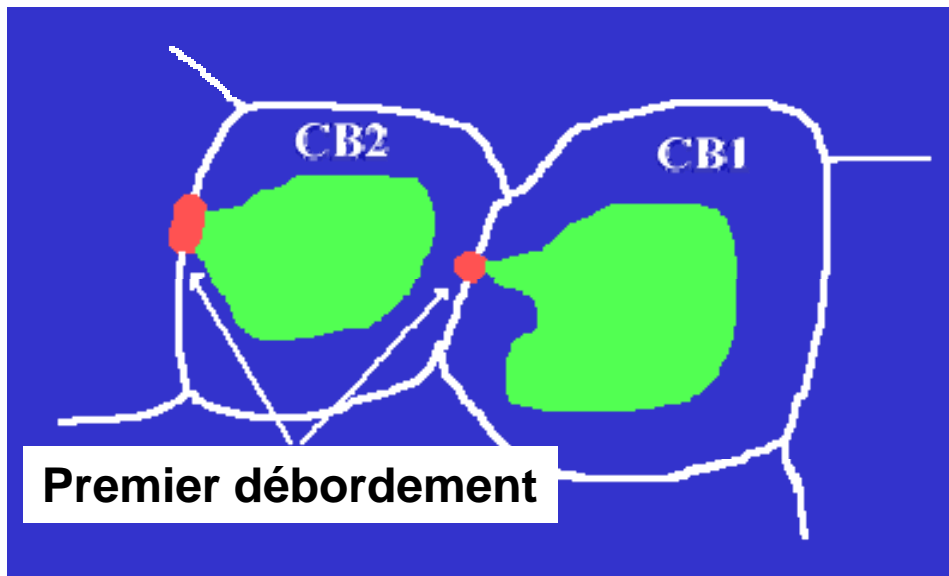


image hiérarchique

ZONES DE PREMIER DEBORDEMENT (ZPD)

Appelées aussi improprement zones-selles

(Les ZPD n'ont rien de commun avec les zones-selles classiques. Ce n'est pas une notion locale et, comme la LPE, il n'y a aucun moyen de savoir a priori si un point donné appartient ou non à une ZPD)



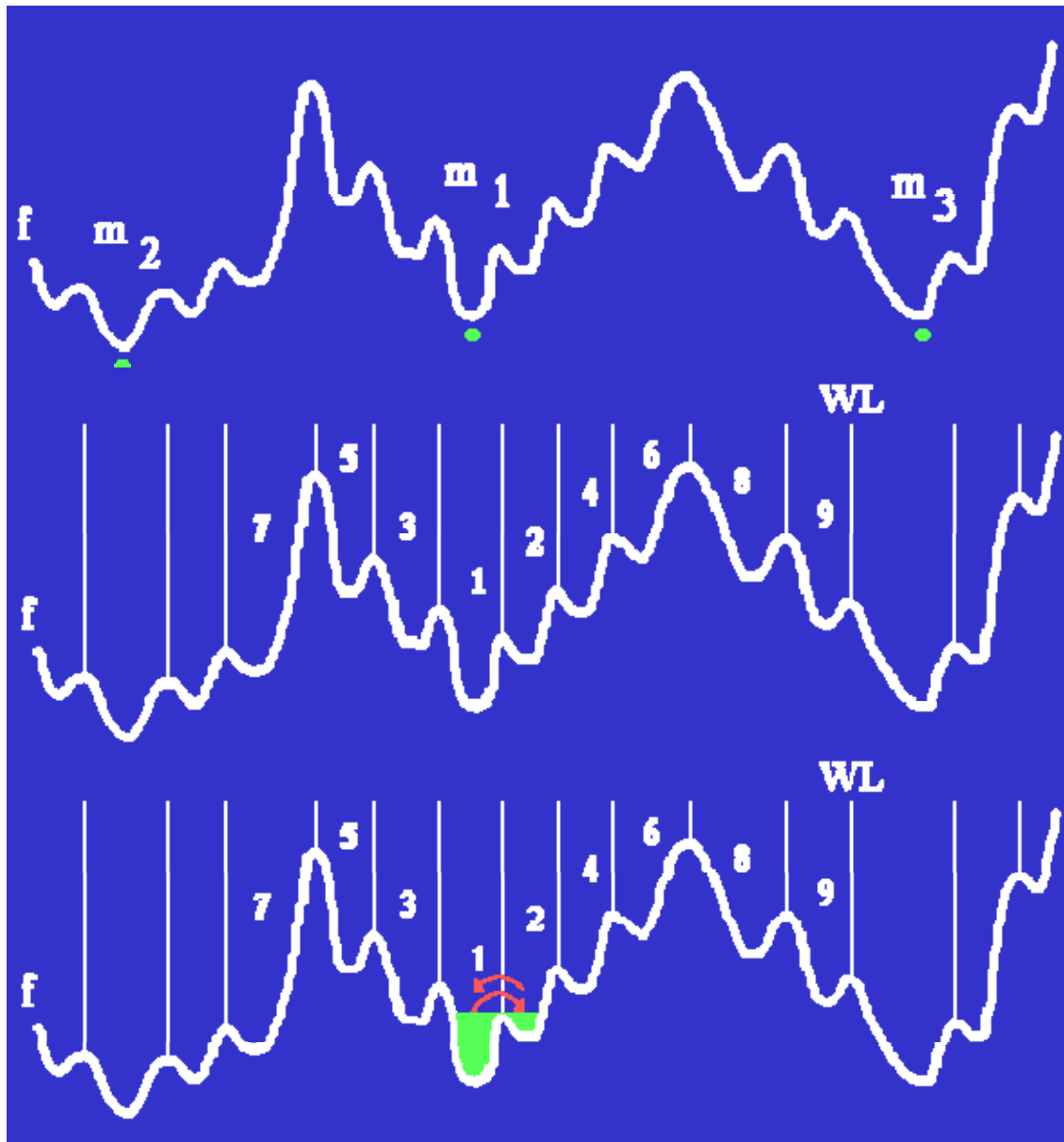
Notion de sous-bassin versant

C'est la partie du bassin versant inondée avant le premier débordement (par la ZPD la moins élevée)



CASCADES

Introduction



Considérons la fonction f et sa LPE. Les différents bassins versants sont numérotés de 1 à 9. Considérons l'inondation à partir du minimum m_1 .

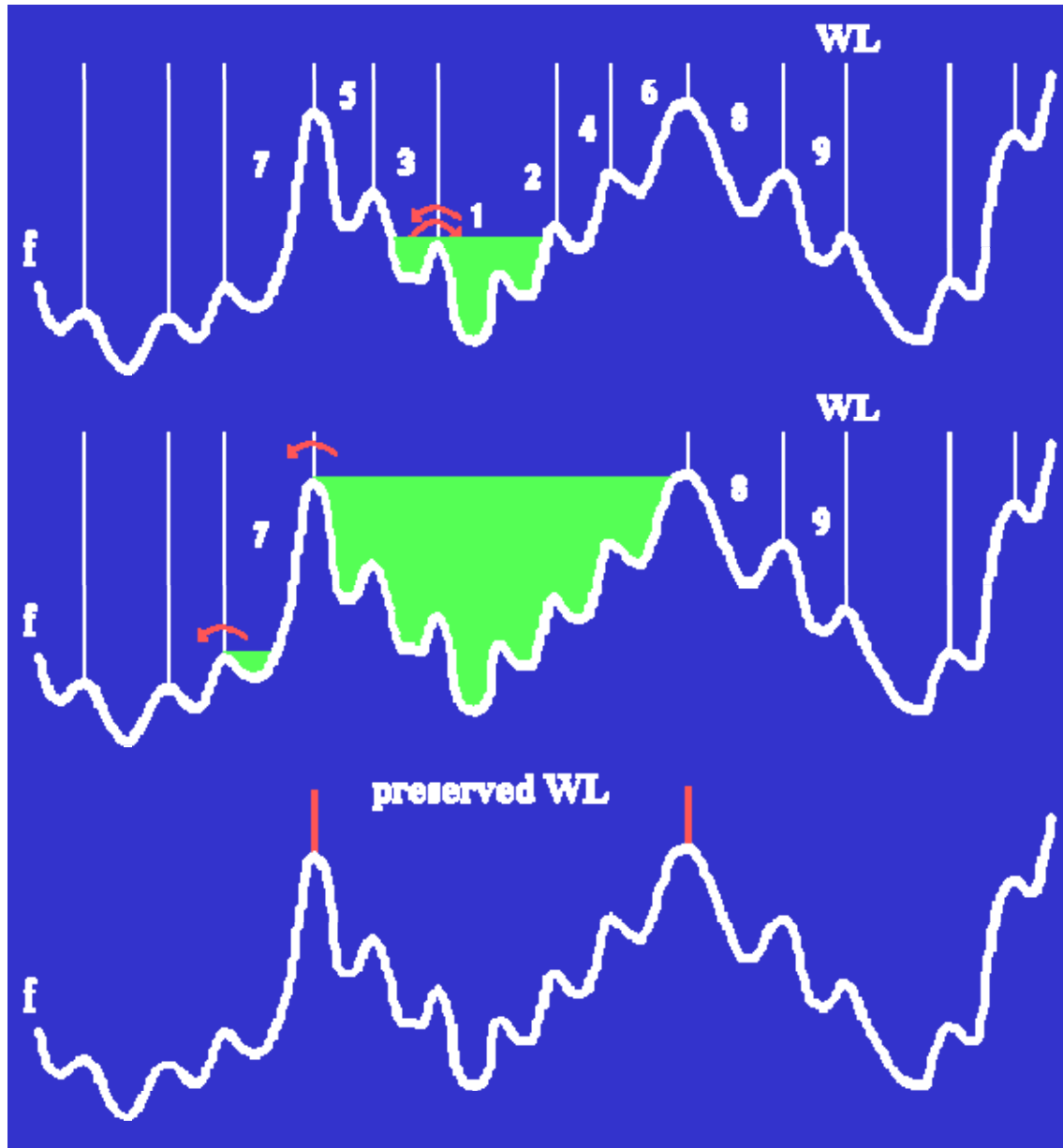
Au cours du remplissage de CB1, un débordement vers CB2 se produit.

Si maintenant nous remplissons CB2, le premier débordement s'effectue vers CB1.

Dans ce cas, les débordements (cascades) sont symétriques.

On peut donc supprimer la ligne de partage séparant CB1 et CB2 et réunir les lacs de CB1 et CB2.

CASCADES (2)



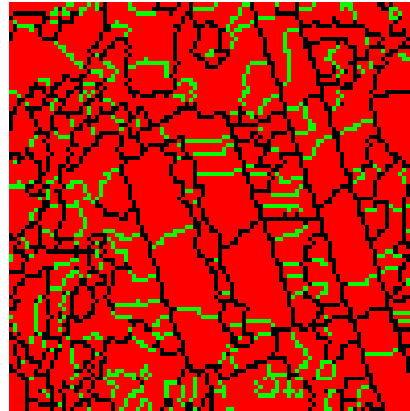
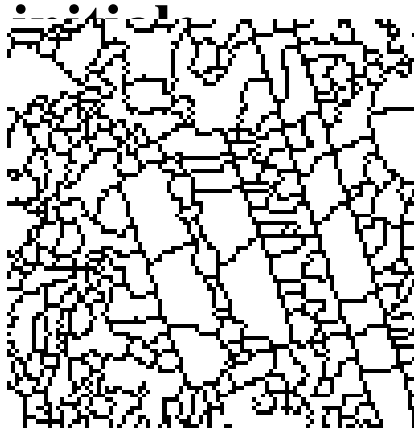
Si le processus d'inondation est itéré, le flot envahit CB3 qui en retour, lorsqu'il est inondé, se déverse dans la réunion des bassins CB1 et CB2. Ici encore les cascades sont symétriques et CB3 est rattaché à l'inondation.

Etape par étape, et parce que, à chaque fois, les cascades sont symétriques, tous les bassins versants numérotés de 1 à 6 sont réunis.

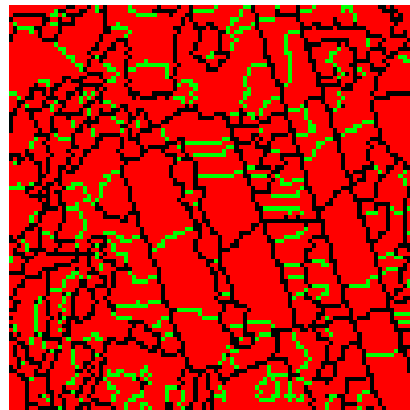
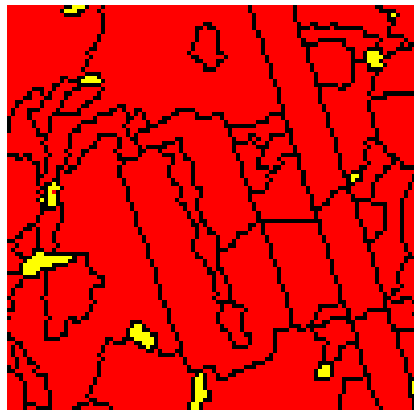
Mais quand l'inondation se déverse dans CB7, la situation change. Si maintenant nous inondons CB7, la cascade n'est plus symétrique. On doit donc conserver la ligne de partage des eaux séparant CB7 de la réunion des autres bassins versants.

UNE AUTRE INTERPRETATION (ERRONEE...)

La hiérarchie de niveau supérieure s'obtient simplement en éliminant les contours présentant une ZPD dans la segmentation

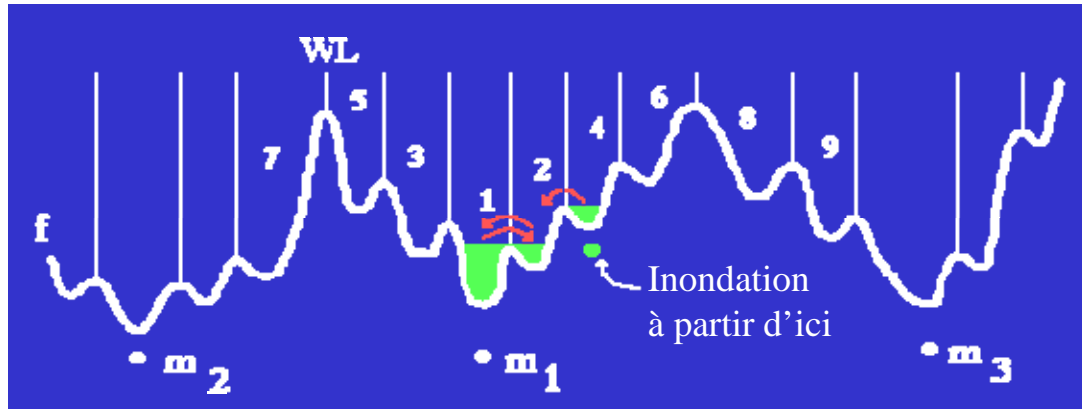


Simple...
Mais FAUX!



Les ZPD à la frontière des *zones de partage des eaux* doivent être gardées. Mais, trouver les zones de LPE nécessite... la construction de la hiérarchie!

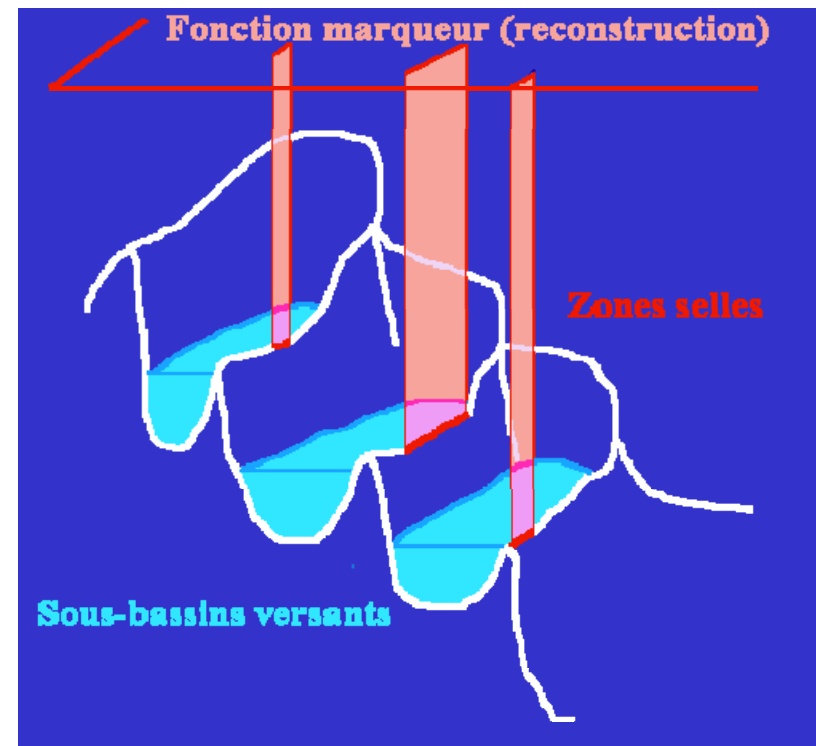
BV/ARCS SIGNIFICATIFS ET RECONSTRUCTION



Le processus précédent ne fonctionne pas si on part de n'importe quel bassin. Cependant on remarque que l'inondation finit par atteindre les BVs significatifs.

Les inondations successives génèrent les sous-bassins versants associés à chaque BV (inondation juste avant le débordement par la ZPD).

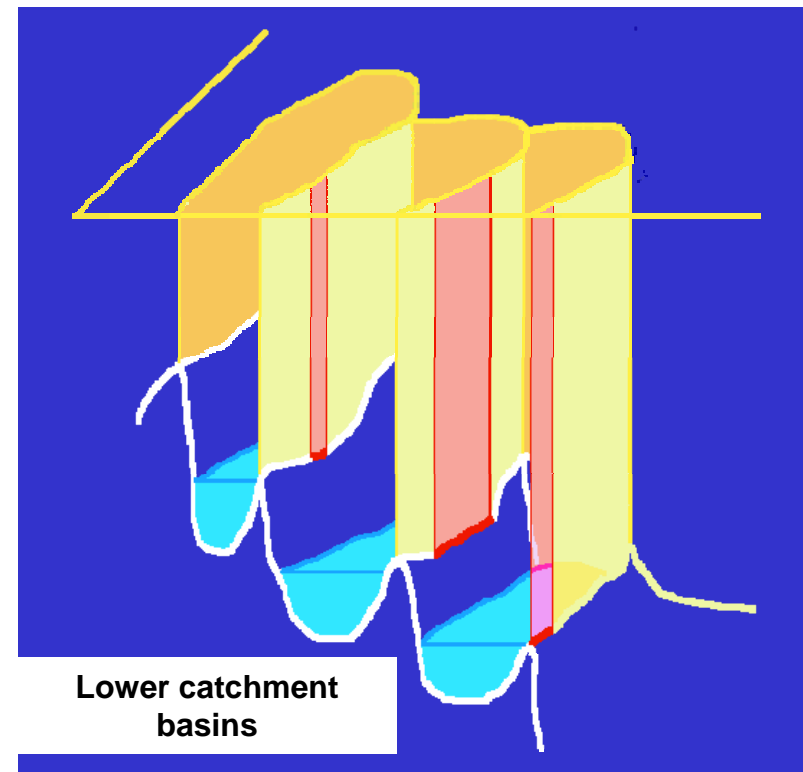
Cette construction peut être réalisée directement par une reconstruction duale de la fonction initiale par les ZPD.



RECONSTRUCTION ET IMAGE HIERARCHIQUE

Au lieu d'utiliser les ZPD (difficiles à mettre en évidence), l'ensemble des lignes de partage des eaux peut être utilisé. Le résultat sera identique car la ZPD est la région bordant le bassin versant à l'altitude la plus basse.

- f , fonction initiale
- définissons g :
 $g(x) = f(x)$ si et seulement si x appartient aux lignes de partage de f
 $g(x) = \max$ sinon
- $h = R_f^*(g)$, résultat de la reconstruction duale de f par g , encore appelée image hiérarchique
- $W(h)$, LPE de h , génère la segmentation hiérarchique de niveau supérieur



Quand f est une LPE évaluée, cette image hiérarchique est la même que celle définie précédemment.

CASCADES ET IMAGES MOSAÏQUES

Dans ce cas, l'approche hiérarchique et l'approche par les cascades sont identiques. L'algorithme des cascades est la généralisation à n'importe quelle fonction de l'approche hiérarchique.

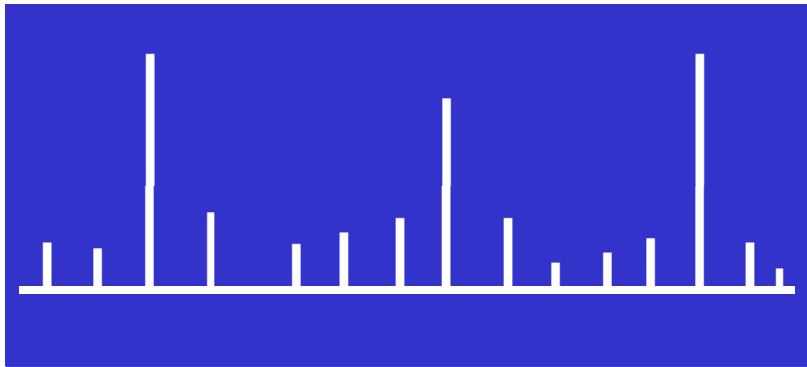


Image gradient mosaïque

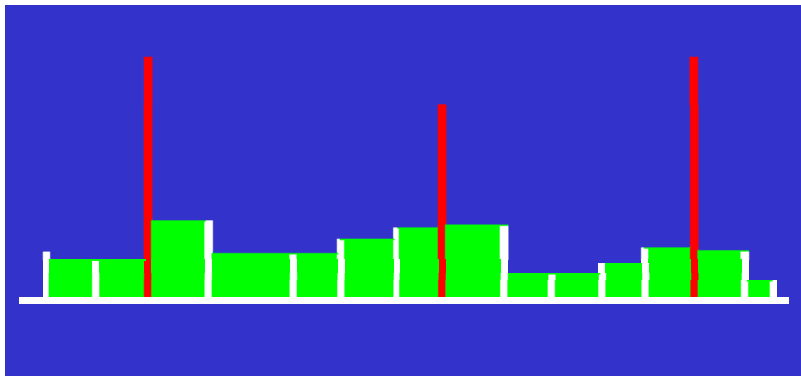


Image hiérarchique

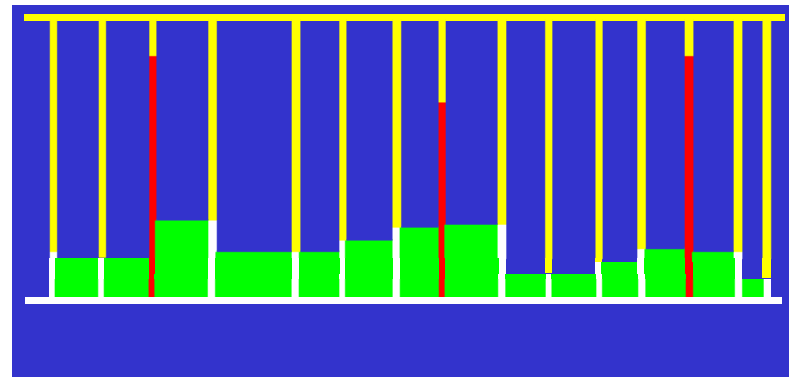


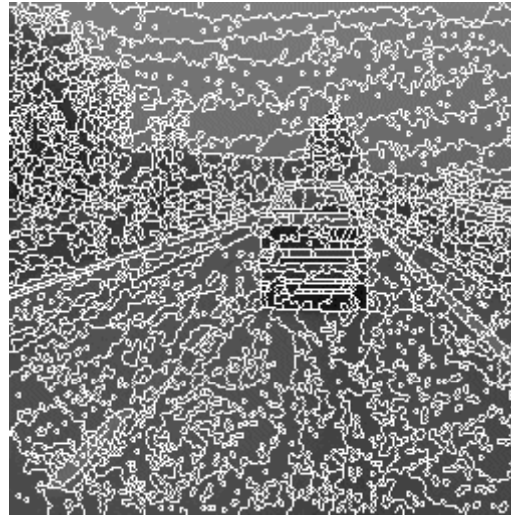
Image des cascades

La valuation minimale du bassin versant correspond à la hauteur de la ZPD minimale. La valuation produit un résultat identique à la reconstruction duale du gradient mosaïque par les ZPD minimales.

SEGMENTATION HIERARCHIQUE: EXEMPLE



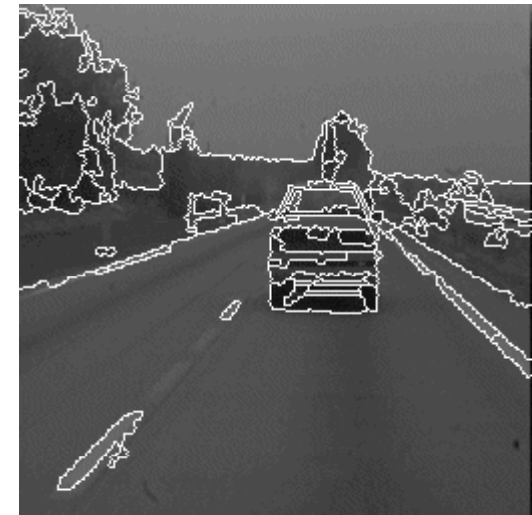
Image originale



LPE initiale



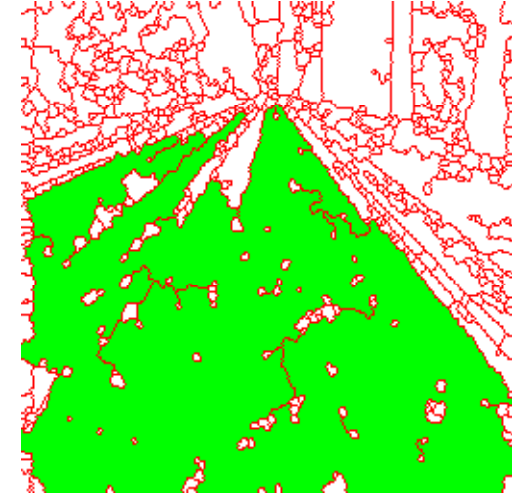
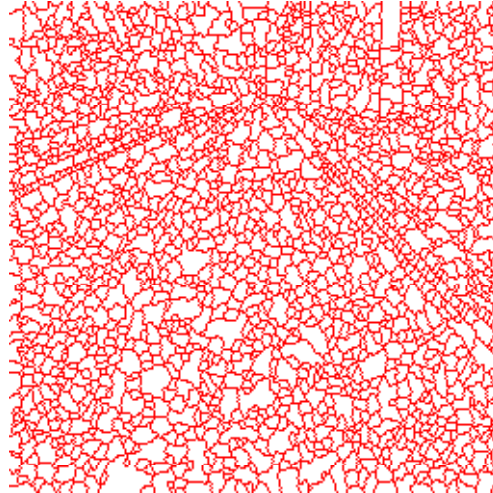
Image mosaïque



**Premier niveau
de hiérarchie**

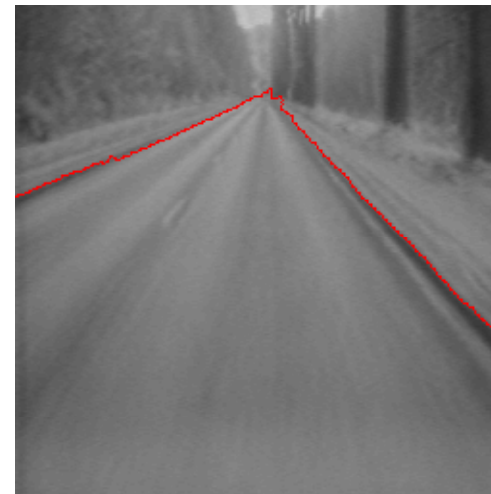
EXEMPLES D'APPLICATION

C'est juste une LPE au-dessus de la LPE...



La segmentation hiérarchique produit un nouveau bassin versant (en vert) qui peut être utilisé comme marqueur de la route.

Le marqueur extérieur peut alors être choisi parmi les autres bassins versants significatifs.

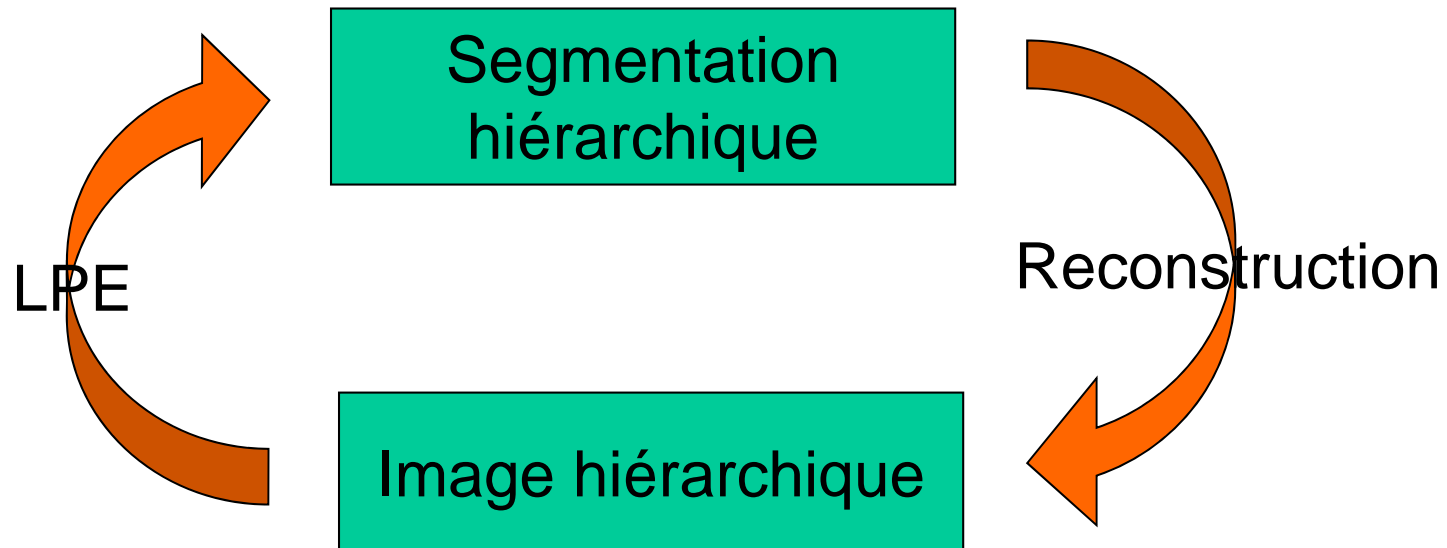


USAGE DES CASCADES

Protocole

- On part d'une LPE valuée initiale s_0
- Un processus itératif fournit les segmentations hiérarchiques successives s_i :

$s_i = w(h_{i-1})$ où h_{i-1} est l'image hiérarchique associée à la segmentation s_{i-1}



USAGE DES CASCADES (2)

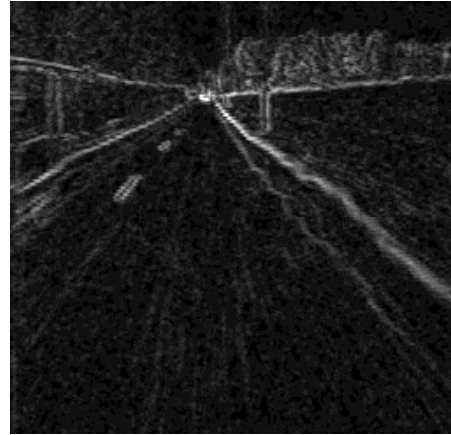
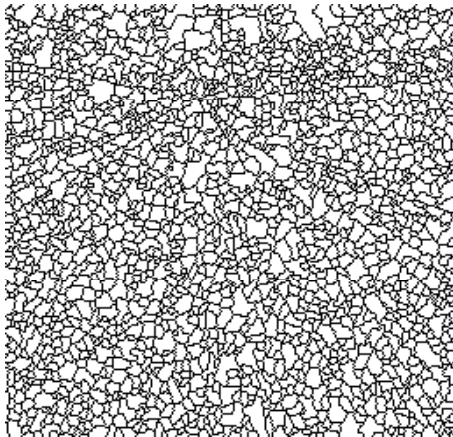


Image initiale f et
son gradient g

$$S_0 = W(g)$$



S_0



S_1



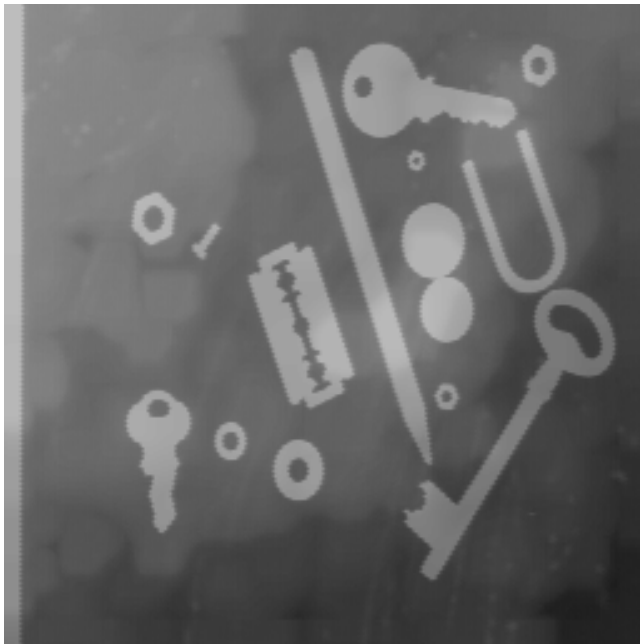
S_2

....

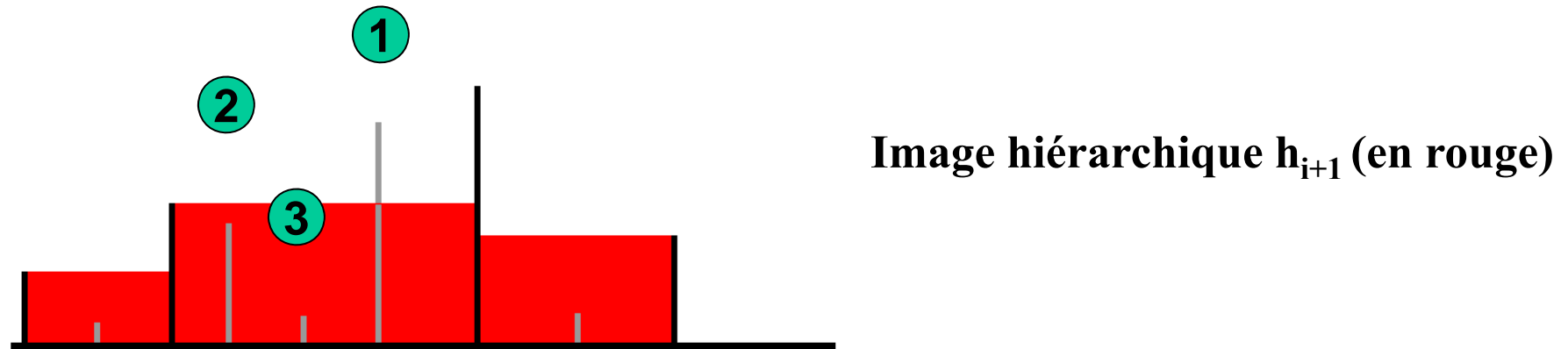
- **N niveaux hiérarchiques, avec $S_N = \emptyset$**
- **Il est difficile de choisir un « bon » niveau de hiérarchie**
- **D'autres problèmes cruciaux apparaissent...**

PROBLEMES AVEC LES CASCADES

- C'est une approche non paramétrique
 - L'algorithme des cascades peut être itéré, ce qui conduit à de possibles niveaux supérieurs de hiérarchie, mais...
 - Un critère d'arrêt n'est pas disponible
 - Les niveaux successifs de hiérarchie sont loin d'être pertinents.
- « Myopie » aux hiérarchies de niveaux différents (erreurs de classement)



MYOPIE DES CASCADES



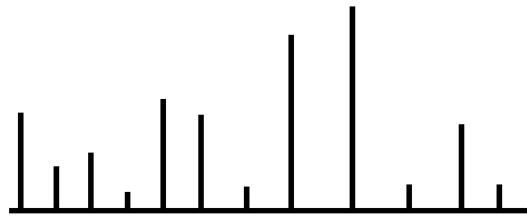
En gris, les contours qui sont éliminés par l'algorithme des cascades

Trois différents types de contours supprimés apparaissent:

- 1. Contours dont l'altitude est supérieure ou égale à h_{i+1}**
- 2. Contours dont l'altitude est inférieure à h_{i+1} mais plus proche de l'image hiérarchique h_{i+1} que de 0**
- 3. Contours dont l'altitude est proche de 0**

Seule la suppression du dernier type de contour se justifie

UN PREMIER ALGORITHME



LPE initiale s_0

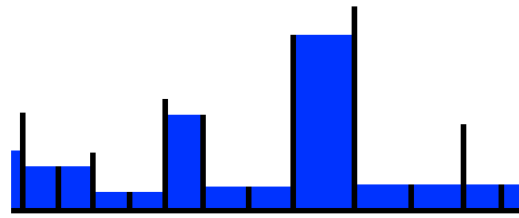
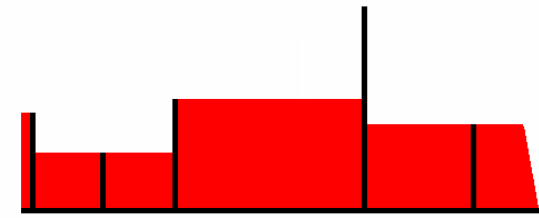
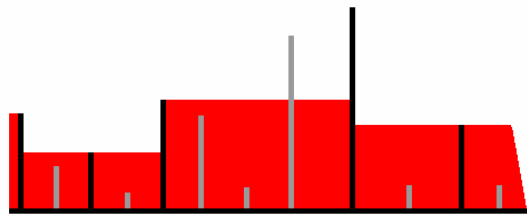


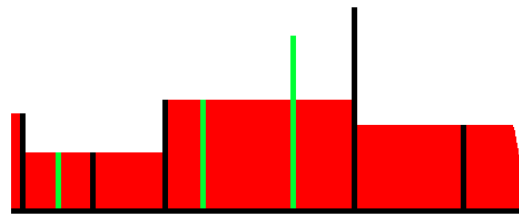
Image hiérarchique h_0



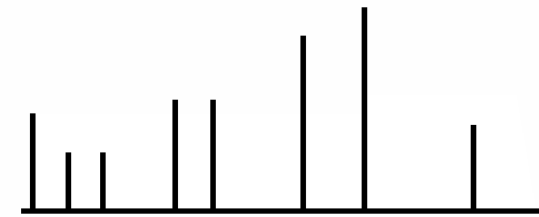
h_1 et $s_1 = w(h_0)$



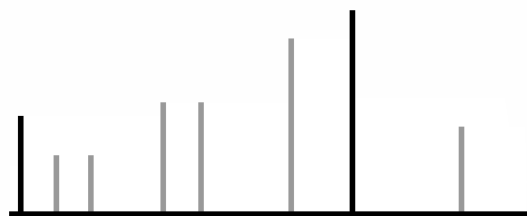
Contours à analyser



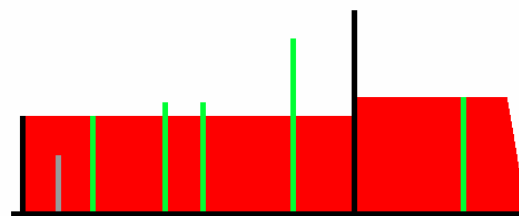
Contours restitués



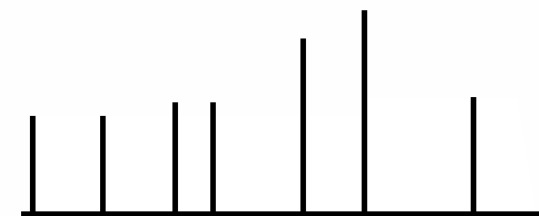
Segmentation finale s'_1



Segmentation s_2 initiale
et contours à analyser



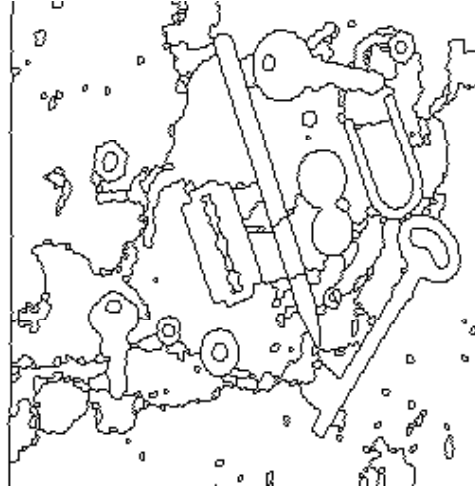
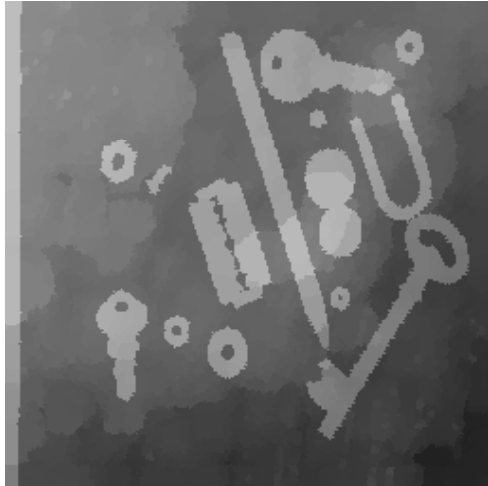
Contours restitués et
contour supprimé



Segmentation finale s'_2

LIMITATIONS ET ALGORITHME P

Dernier niveau JAMAIS vide. Procédure auto-bloquante



Lorsque des maxima de l'image hiérarchique apparaissent, la LPE les fait disparaître (transformée semi-homotopique). Ils ne contribuent plus à la genèse des hiérarchies

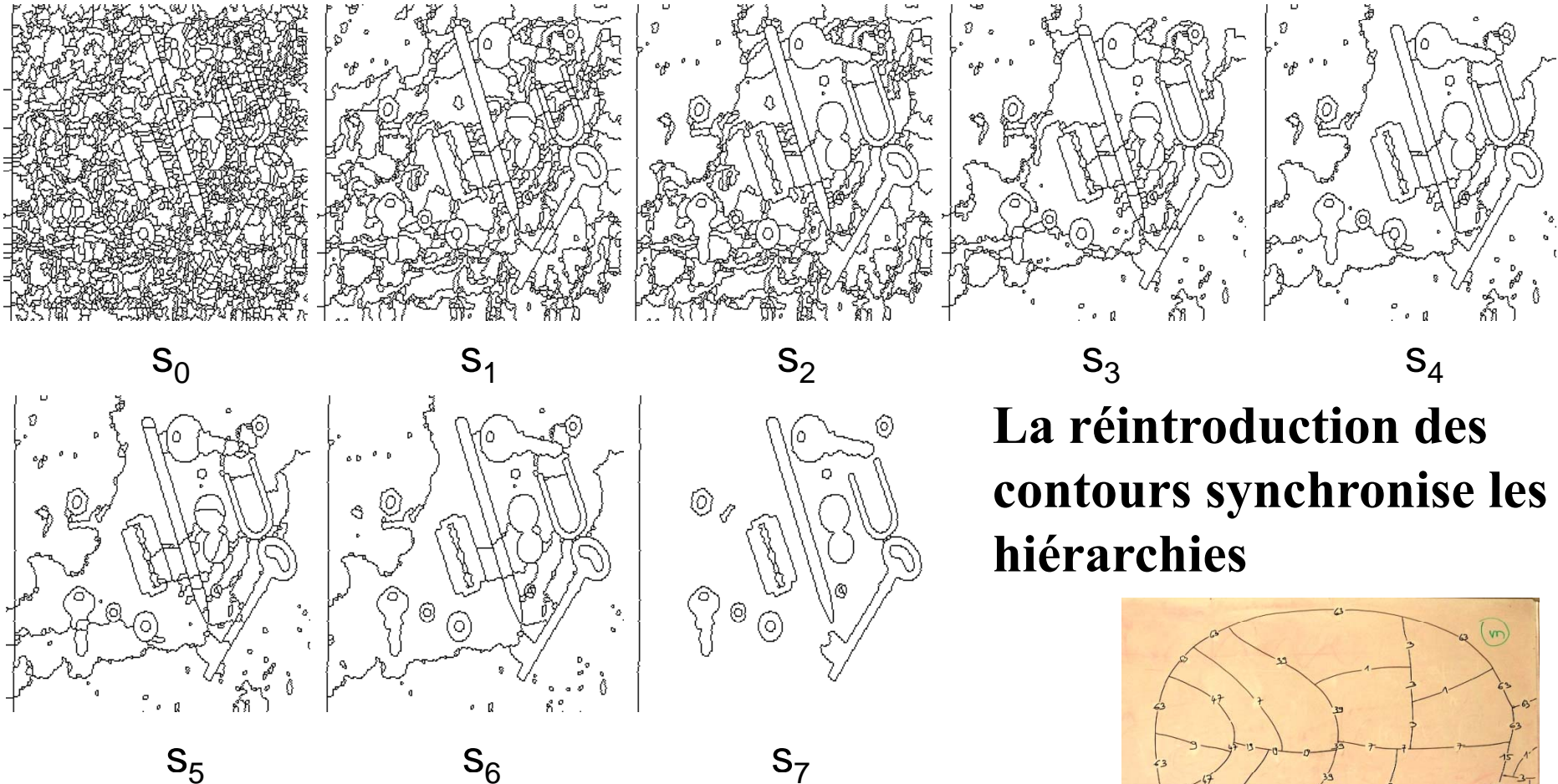
Résultat final de l'algorithme standard

L'algorithme P

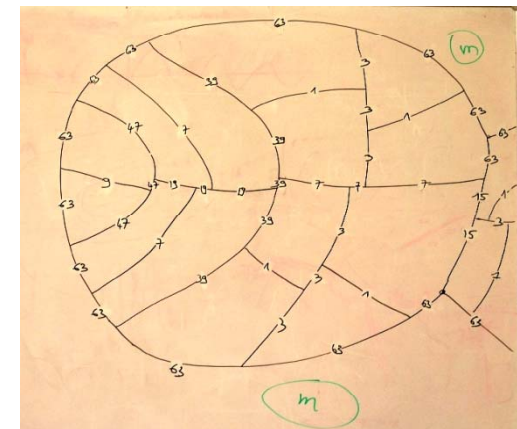
Une variante (un bogue...) de l'algorithme standard consiste à comparer la hauteur des contours *de s_0* [au lieu de s_i] à h_{i+1} ...

- **Réintroduction de contours déjà éliminés**
- **Ces contours sont à l'intérieur de maxima de l'image hiérarchique**
- **Ces maxima sont alors eux-même réintroduits**
- **Ils peuvent alors intervenir dans le classement des hiérarchies**

ALTERNANCE DE CONTOURS DANS L'ALGORITHME P



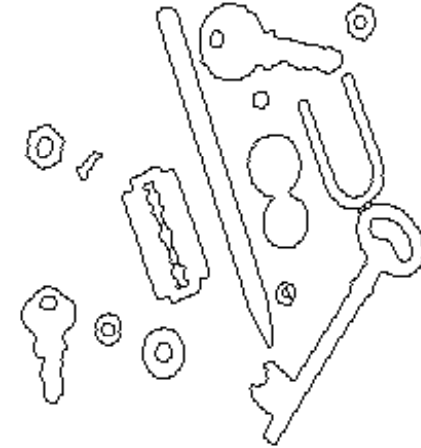
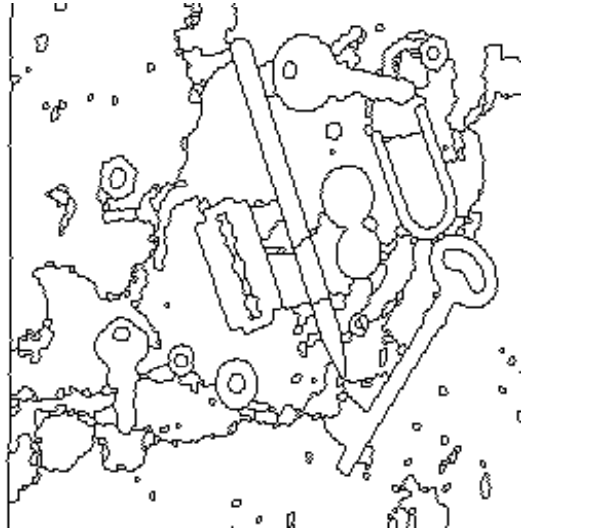
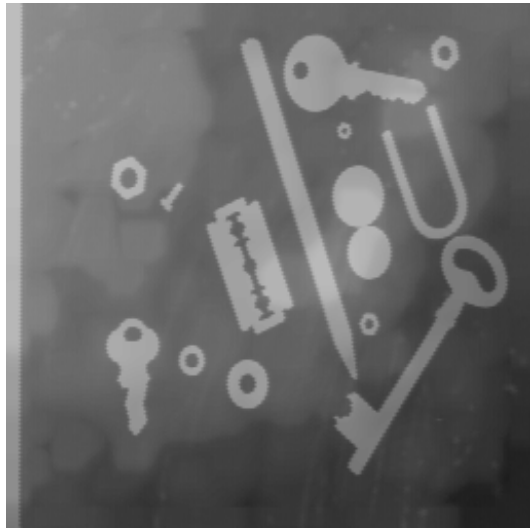
La réintroduction des contours synchronise les hiérarchies



Une configuration monstrueuse

- L'alternance peut être de période quelconque
- L'oscillation est toujours amortie (stabilité)

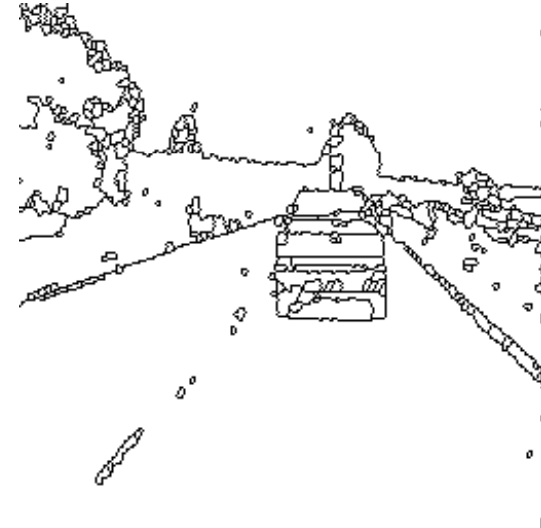
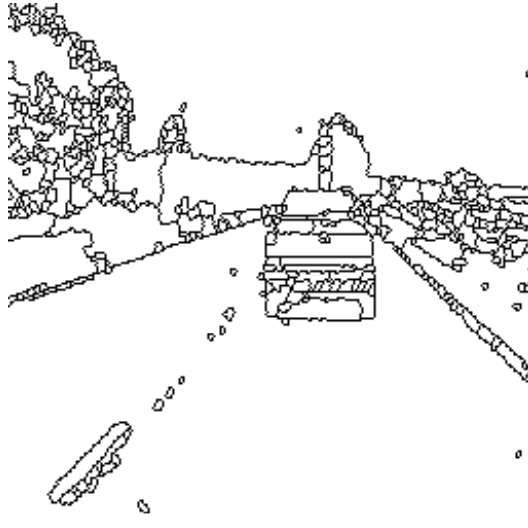
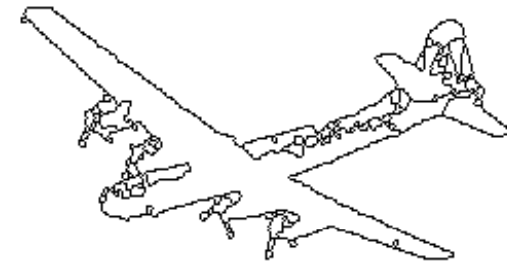
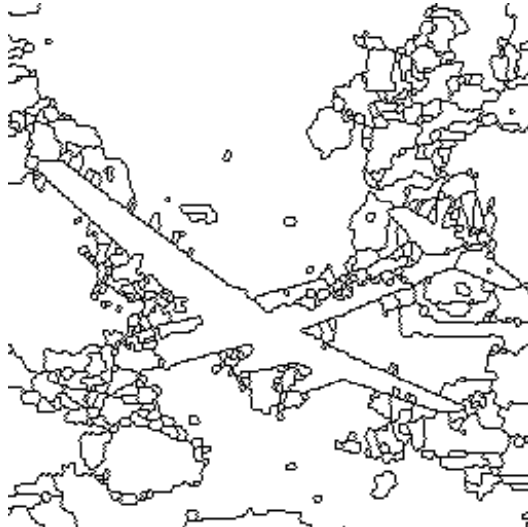
EXEMPLES COMPARATIFS



Algorithme standard

Algorithme P

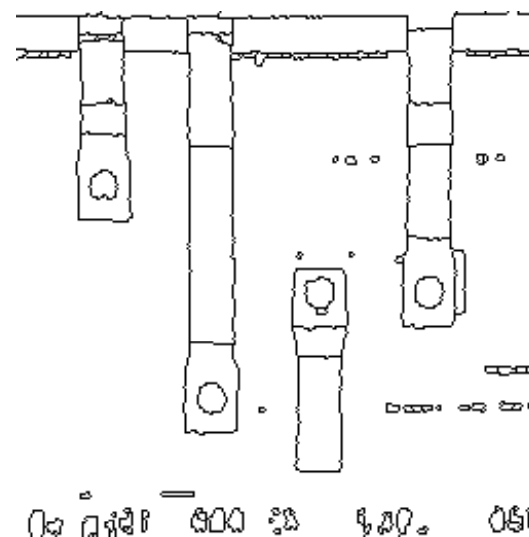
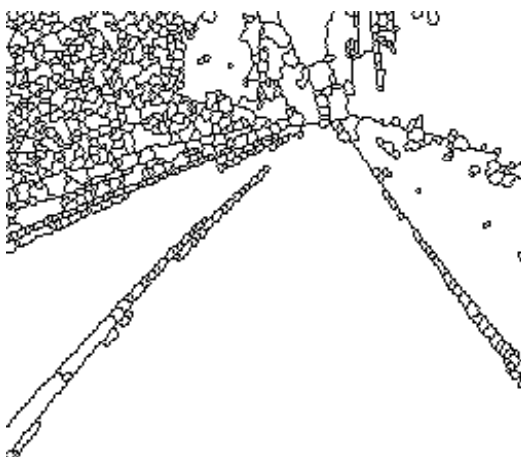
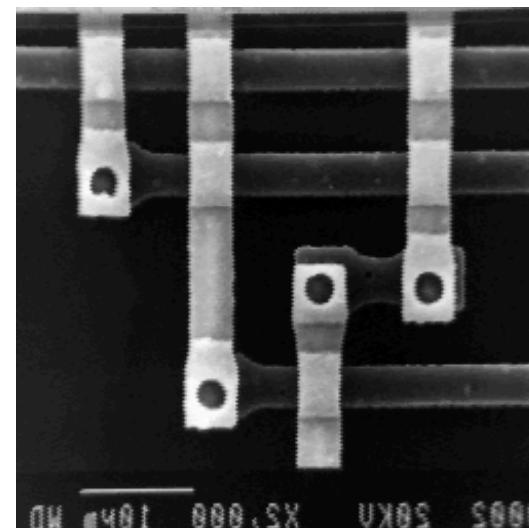
EXEMPLES COMPARATIFS (2)



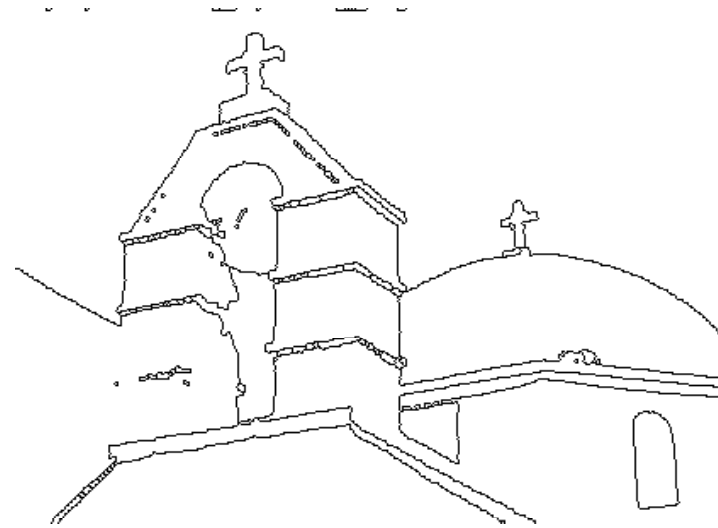
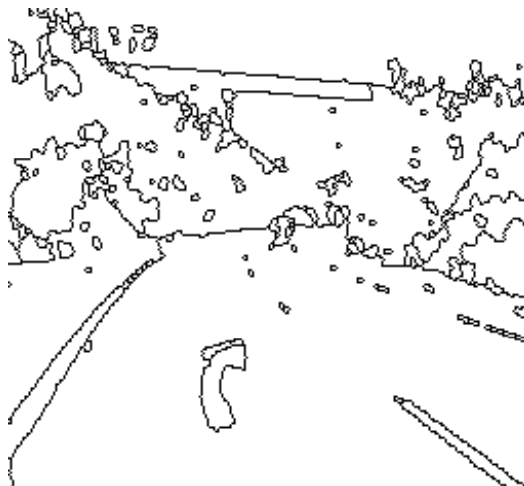
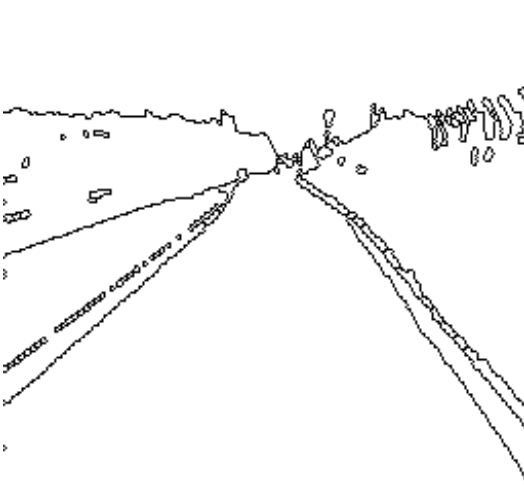
Algorithme standard

Algorithme P

AUTRES EXEMPLES

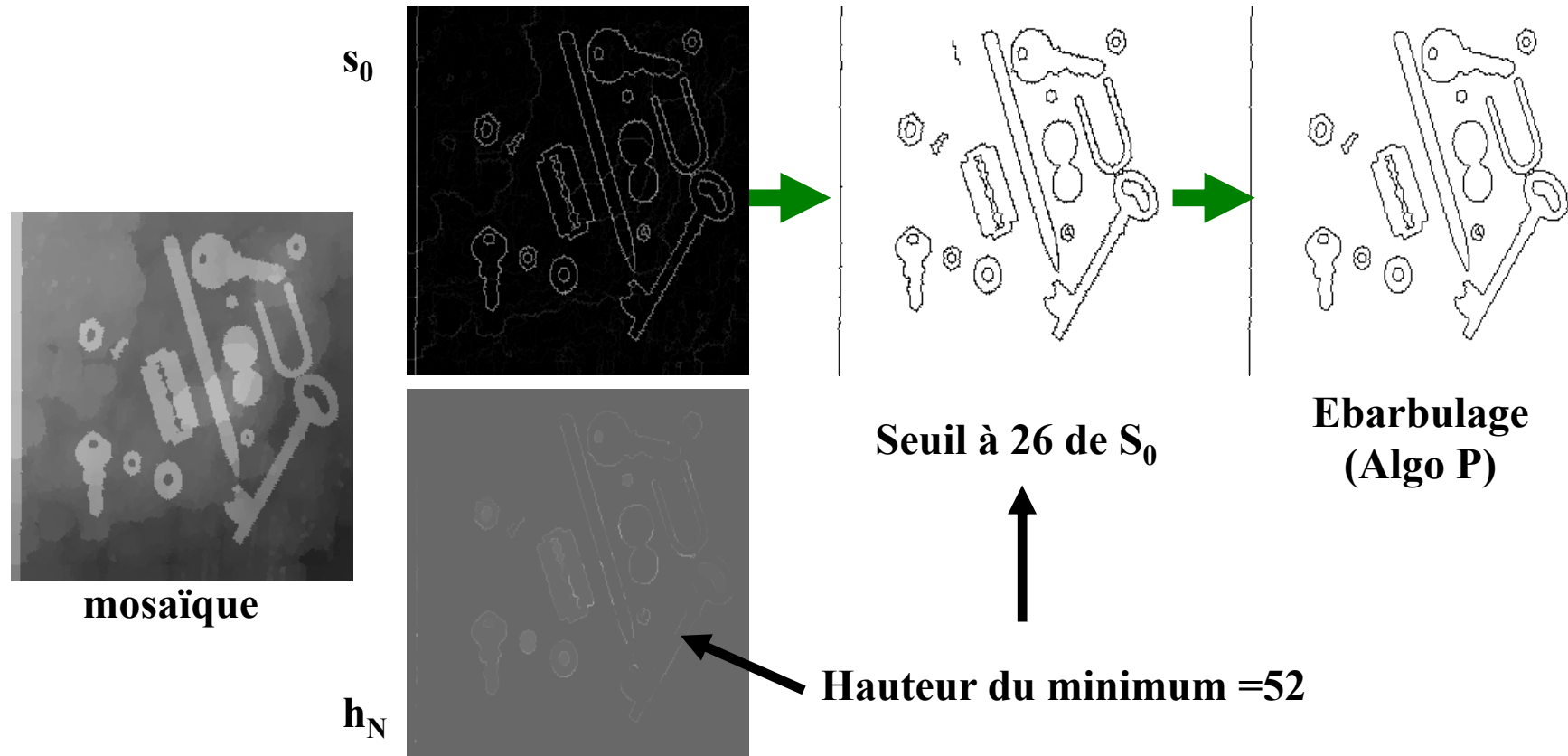


AUTRES EXEMPLES (2)



ALGORITHME P ET SEUILLAGE

L'algorithme P se réduit finalement à un seuillage (suivi d'un ébarbulage) de la LPE évaluée



La valeur de seuil est déterminée automatiquement selon des critères de saillance (pas complètement élucidés)...

Ce seuil est appliqué à toute l'image (et il ne peut en être autrement...)

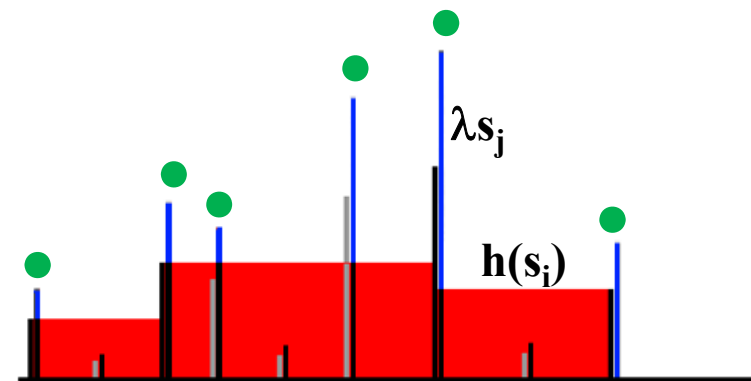
VERS UN ALGORITHME GENERAL DE SEGMENTATION HIERARCHIQUE

Notons qu'il est souvent plus efficace de comparer la segmentation courante s_i avec une plus ancienne s_j (avec $i > j$).

Définition d'un algorithme général dépendant de deux paramètres :

- Sélection du niveau de segmentation hiérarchique s_j à comparer avec l'image hiérarchique courante $h(s_i)$. $\text{Sup}(i - j, 0)$ est appelé "offset".
- Les hauteurs des contours de s_j sont multipliées par un facteur λ et comparées à la hiérarchie courante. Celles qui sont plus grandes définissent un masque m (points verts):

$$m = \left\{ x : \lambda (s_0 \wedge s_j) \geq h(s_i) \right\}$$



- Les contours marqués sont ré-introduits dans la segmentation courante s_i :

$$s'_i = m \wedge \left[h(s_i) \vee s_0 \right]$$

Offset maximum (la segmentation initiale s_0 est toujours somparée à la hiérarchie courante) et $\lambda = 2$ ➔ **Algorithme P**

PERSPECTIVES LIEES A L'ALGORITHME P

- **L'algorithme P est un algorithme auto-bloquant et non paramétrique**
- **Une caractéristique remarquable de l'algorithme P est sa capacité à séparer les formes du fond. Cette caractéristique fait de l'algorithme un outil puissant de perception de structures (« gestalt »)**

Travaux actuels (entre autres):

- **Explication du rôle de l'algorithme P en relation avec certains mécanismes de perception (ancrage, articulation)**
- **Problème de la comparaison des résultats (pour le moment, elle reste très subjective) → Utilisation de la base de segmentation d'images de Berkeley**

CONCLUSION : METHODOLOGIE EVOLUTIVE

Méthodologie fructueuse

- **Extension au monde 3D**
- **Extension aux graphes**
- **Nouveaux développements (résidus)**

Ces outils sont (presque) aisément compréhensibles et pratiques

- **Il n'y a usuellement pas de changement d'espace (espace image)**
- **La boîte à outils s'est enrichie de nouvelles transformations**

Les performances s'améliorent spectaculairement

- **Nouveaux algorithmes, en particulier pour les segmentations hiérarchiques**
- **Vitesse des algorithmes permettant du temps réel**

Nouveaux outils disponibles

BIBLIOGRAPHIE

- **S. BEUCHER, C. LANTUEJOUL, Use of watersheds in contour detection** . International Workshop on image processing, real-time edge and motion detection/estimation, Rennes, Sept. 1979. (*disponible en téléchargement*)
- **S. BEUCHER, Segmentation d'images et morphologie mathématique**. Doctorate thesis, Ecole des Mines de Paris, Cahiers du centre de Morphologie Mathématique, Fascicule n° 10, Juin 1990. (*disponible en téléchargement*)
- **F.MEYER, S. BEUCHER, Morphological segmentation**. Journal of Visual Communication and Image Representation, n° 1, Vol. 1, Oct. 1990.
- **S.BEUCHER, F. MEYER, The Morphological approach of segmentation: the watershed transformation**. In Dougherty E. (Editor), Mathematical Morphology in Image Processing, Marcel Dekker, New York, 1992. (*disponible en téléchargement*)
- **S. BEUCHER, Watershed, hierarchical segmentation and waterfall algorithm**. Proc. Mathematical Morphology and its Applications to Image Processing, Fontainebleau, Sept. 1994, Jean Serra and Pierre Soille (Eds.), Kluwer Ac. Publ., Nld, 1994, pp. 69-76.
- **S. BEUCHER, Transformations résiduelles en Morphologie Numérique**. Note interne CMM n° 04/04/MM, Mars 2004. (*disponible en téléchargement*)
- **S. BEUCHER, B. MARCOTEGUI, P algorithm, a dramatic enhancement of the waterfall transformation**. Web document, September 2009. (*disponible en téléchargement*)