

N-7/89/MM

SQUELETTES CONNEXES ET
NON CONNEXES

Serge BEUCHER

FONTAINEBLEAU

MARS 1989

SQUELETTES CONNEXES ET NON CONNEXES

Serge BEUCHER

AVANT-PROPOS

Cette note semblera un peu décousue au lecteur. Cela mérite quelques explications. Mon intention initiale était assez simple : établir un lien entre le squelette par ouverture et le squelette par amincissement, et en particulier cerner la "légitimité" du squelette par amincissement par rapport au squelette par ouverture. Il est en effet toujours un peu choquant en cours ou dans des exposés d'introduire la notion de squelette par le biais de boules maximales, puis brutalement sous prétexte que cette première version fournit un squelette digital non connexe, sortir de son chapeau le squelette par amincissement. Et quel squelette ! Il en existe en fait plusieurs types, et affirmer que le squelette utilisant les éléments structurants L ou M (en trame hexagonale) est apparenté au squelette par ouverture procède plus de l'acte de foi que de la démonstration mathématique. Le crédit que l'on accorde à ce squelette est tellement faible que la seule propriété du squelette connexe réellement utilisée est la propriété d'homotopie. Personne ne songerait sérieusement à utiliser certains points caractéristiques du squelette connexe (points multiples ou extrémités) comme descripteurs de forme de l'ensemble initial. C'est encore pire en morphologie numérique où le squelette utilise le plus souvent uniquement l'élément structurant M. Dans ce cas, seule la version édulcorée du squelette (SKIZ en binaire, ligne de partage des eaux en numérique) a quelque chance de nous satisfaire.

Le premier chapitre de cette note montre que le squelette par ouverture peut s'exprimer sous forme d'amincissement. Il était alors tout naturel de chercher une version connexe de ce squelette en triant les éléments structurants exhibés précédemment. C'est ce qui est entrepris au chapitre deux. C'est alors tout à fait par hasard que l'on aboutit à un

squelette dénommé par la suite squelette "lisse". Ses bonnes propriétés de régularité, la relative facilité avec laquelle on peut l'obtenir en font un outil extrêmement intéressant au point d'envisager de l'utiliser comme descripteur de forme car ses points caractéristiques ont alors une signification géométrique évidente. Il devenait alors indispensable (sous la pression d'un grand nombre d'utilisateurs éventuels !) de rechercher l'équivalent de ce squelette lisse sur la trame carrée ce qui fut fait au chapitre trois. Enfin le dernier chapitre traite du cas numérique et tente de trouver un équivalent en numérique au squelette par ouverture binaire. On montre alors que les deux squelettes (par ouverture et par amincissement) ne sont pas équivalents. Il pourrait être intéressant d'étudier plus en profondeur le squelette par ouverture numérique car il permet une description des fonctions en termes de cylindres ou de cônes maximaux, description assez éclairante sur le fonctionnement de certaines transformées numériques. Enfin dans ce dernier chapitre, on étend la notion de squelette lisse au numérique. On remarquera dans ce cas que l'algorithme décrit est relativement plus complexe que dans le cas binaire.

1) SQUELETTE ET AMINCISSEMENT

1-1) Introduction

Il existe classiquement en morphologie mathématique deux types d'algorithmes de squelettes : le premier basé sur des ouvertures est encore appelé squelette non connexe, mettant ainsi en évidence sa principale caractéristique. Pourtant ce squelette est celui qui correspond à la définition générale d'un squelette à savoir le lieu des centres des boules maximales inscrites dans l'ensemble initial. Le deuxième type d'algorithme utilise l'amincissement par des séquences d'éléments structurants dits homotopiques. Ce type de squelette présente l'avantage d'être connexe mais c'est bien là son seul intérêt. En effet, ses autres caractéristiques sont autant d'inconvénients : plusieurs choix d'éléments structurants sont possibles (éléments de type L ou de type M en hexagonal, combinaisons encore plus complexes en carré), l'ordre de chaînage de ces éléments n'est pas indifférent, si bien qu'il y a finalement autant de squelettes connexes

que de façon de les produire. Mais ce deuxième type d'algorithme soulève une question bien plus fondamentale : rien ne prouve en effet que l'ensemble produit par la suite d'amincissements réalisés est une quelconque parenté avec le squelette vrai c'est-à-dire avec le lieu des centres des boules maximales. On pourrait même fortement en douter si on examine les ensembles produits par l'élément D, élément qui présente pourtant des propriétés topologiques identiques à celles exhibées par les éléments L et M.

Ce chapitre a pour but de tenter d'établir un pont entre ces deux types d'algorithmes, pour savoir s'ils recouvrent réellement différents avatars d'une même notion.

1-2) La démarche méthodologique

La démarche utilisée sera la suivante :

- Rappeler la définition classique du squelette non connexe ainsi que ses principales propriétés.
- Démontrer que cet algorithme peut s'exprimer en termes d'amincissement et donc en déduire le ou les éléments structurants utilisés.

Cette analyse permettra alors (cf chapitre 2) d'étudier ces différents éléments structurants afin de voir comment ils interviennent dans la rupture ou la conservation de la connexité. On tentera alors d'en extraire un sous-ensemble contribuant à la préservation de la connexité et on comparera alors les éléments structurants ainsi obtenus avec les classiques éléments de l'algorithme connexe carré ou hexagonal.

1-3) Le squelette non connexe. Rappel

La définition du squelette non connexe d'un ensemble X encore appelé squelette par ouverture est dans le cas discret la suivante :

$$S(X) = \bigcup_i (X \ominus iB / (X \ominus iB)_B)$$

Le squelette est donc constitué de tous les points de l'ensemble X qui n'appartiennent pas à l'ouvert par une boule B de ses érodés successifs. Ces points, encore appelés résidus de l'ouvert, sont les centres des boules

iB maximales inscriptibles dans X . Rappelons-en rapidement la démonstration dans le cas discret :

Soit un point x appartenant à l'érodé $X \ominus iB$, sans appartenir à l'ouvert $(X \ominus iB)_B$. Ce point x est donc par définition le centre d'une boule iB incluse dans X . Supposons que le point x appartienne à l'ouvert de $X \ominus iB$. X est donc inclus dans une boule B elle-même incluse dans l'érodé $X \ominus iB$. La dilatation de taille i de cette boule fournit une boule de taille $i+1$ incluse dans X . Donc la boule iB centrée au point x est recouverte par une boule de taille $i+1$. Elle ne peut donc être maximale. Inversement, supposons que le point x , bien que n'appartenant pas à l'ouvert $(X \ominus iB)_B$, ne soit pas centre d'une boule maximale de taille i . Alors il est nécessairement inclus dans une boule de taille $j > i$ recouvrant la boule de taille i dont il est le centre. L'érosion de cette boule de taille j par une boule de taille i fournit une boule de taille $j-i \geq 1$ contenant x . Donc x appartient à l'ouvert $(X \ominus iB)_B$ ce qui contredit l'hypothèse initiale. Une condition nécessaire et suffisante pour que le point x appartenant à l'érodé par une boule iB soit le centre d'une boule maximale de taille i est donc qu'il n'appartienne pas à l'ouvert par la boule élémentaire B . Le squelette de X s'obtient donc en effectuant cette différence ensembliste pour toutes les tailles possibles d'érodés d'où la formule précédemment énoncée.

Pratiquement, on utilise pour B un hexagone en trame hexagonale, ou un carré en trame carrée. On peut bien sûr utiliser des éléments structurants plus proche du disque (dodécagones, octogones, etc...) mais il est illusoire de penser qu'une telle pratique peut d'une manière quelconque améliorer la connexité de ce type de squelette. On remarquera également que cette définition est tout-à-fait valable dans le cas continu : la taille de la boule élémentaire peut être choisie aussi petite que l'on veut de même que l'incrément i . De la même façon, on peut constater que B peut être n'importe quel convexe sans que la définition soit modifiée : il suffit en effet de pouvoir obtenir les homothétiques iB de l'élément structurant élémentaire par des dilatations successives selon la formule :

$$iB = B \odot B \odot \dots \odot B \quad (i \text{ fois})$$

On obtiendrait alors le lieu des centres des convexes iB maximaux

inscriptibles dans X. Cette transformation pourrait être intéressante à réaliser pour résoudre en particulier certains problèmes de segmentation en analyse d'images.

1-4) Squelette non connexe et amincissement

Avant d'établir que le squelette par ouverture peut aussi s'exprimer sous forme d'amincissement, nous allons redonner la définition d'un amincissement et en particulier la définition d'un amincissement par un ensemble d'éléments structurants. Il s'agit bien d'un ensemble et non pas d'une séquence, en ce sens que la transformée ainsi obtenue ne dépend pas de l'ordre dans lequel ont été pris les divers éléments structurants utilisés.

Soit $\mathcal{T} = \{T_a, T_b, \dots\}$ un ensemble d'éléments structurants. Chaque élément T_i est la combinaison de deux éléments T_i^1 et T_i^2 .

La transformation par tout ou rien d'un ensemble X par cet ensemble d'éléments est définie par :

$$X * \mathcal{T} = \bigcup_i (X * T_i)$$

De même, on définit l'épaississement et l'amincissement de X par \mathcal{T} :

$$\begin{aligned} X \circ \mathcal{T} &= X / (X * \mathcal{T}) = X / \bigcup_i (X * T_i) \\ &= X \cap \left[\bigcap_i (X * T_i)^c \right] = \bigcap_i (X \circ T_i) \end{aligned}$$

$$X \odot \mathcal{T} = X \cup (X * \mathcal{T}) = \bigcup_i (X \odot T_i)$$

Pour exprimer l'algorithme de squelette sous forme d'une séquence d'amincissement, il suffit de pouvoir l'écrire comme suit :

$$S(X) = (((X \circ \mathcal{T}) \circ \mathcal{T}) \circ \dots) \circ \mathcal{T}$$

où \mathcal{T} représente un ensemble d'éléments structurants biphasés.

Posons alors :

$$Z_o = X$$

et effectuons l'opération suivante :

$$Z_1 = (Z_0 \otimes B) \cup (Z_0 / (Z_0)_B)$$

On définit ainsi une opération itérative, en posant :

$$Z_n = (Z_{n-1} \otimes B) \cup (Z_{n-1} / (Z_{n-1})_B)$$

Développons Z_n et montrons que l'on peut écrire :

$$Z_n = (X \otimes nB) \cup \left[\bigcup_{i=0}^{n-1} (X \otimes iB) / (X \otimes iB)_B \right]$$

Supposons la relation vraie à l'ordre $n-1$:

$$Z_{n-1} = (X \otimes (n-1)B) \cup \left[\bigcup_{i=0}^{n-2} (X \otimes iB) / (X \otimes iB)_B \right]$$

Calculons $Z_{n-1} \otimes B$. Pour cela, démontrons le lemme suivant :

Lemme

Soient X et Y deux ensembles disjoints. Alors si $X \otimes B$ et Y sont disjoints, on peut écrire :

$$(X \cup Y) \otimes B = (X \otimes B) \cup (Y \otimes B)$$

Soit à démontrer que :

$$(X \cup Y) \otimes B = (X \otimes B) \cup (Y \otimes B) \text{ quand } (X \otimes B) \cap Y = \emptyset.$$

Démontrons l'inégalité suivante :

$$(X \cup Y) \otimes B \subset (X \otimes B) \cup (Y \otimes B)$$

Soit $x \in (X \cup Y) \otimes B$. $B_x \subset (X \cup Y)$. Supposons que $x \in X$. Alors $x \notin Y$. Supposons qu'il existe $y \in B_x$, $y \neq x$ et $y \in Y$. Comme B_y contient x , y appartient à $X \otimes B$. Mais y en vertu de l'hypothèse ne peut appartenir à Y . Donc pour tout $x \in (X \cup Y) \otimes B$, B_x est totalement inclus dans X , donc $x \in X \otimes B$.

Inversement supposons $x \in Y$, et qu'il existe $y \in B_x$, $y \neq x$ et $y \in X$; comme B_y contient x , $y \in X \otimes B$, donc x n'appartient pas à Y .

C.Q.F.D.

Montrons que pour tout ensemble Y , $Y \otimes B$ et Y/Y_B répondent aux

conditions du lemme. En effet :

$$\begin{aligned} Y/Y_B \cap (Y \ominus B) &= Y \cap (Y \ominus B)^c \ominus B \cap Y \ominus B \\ &= (Y \ominus B) \cap [Y \ominus B]^c \ominus B = \emptyset \end{aligned}$$

D'autre part, Y/Y_B et $(Y \ominus B) \ominus B = Y_B$ sont évidemment disjoints.

De la même façon, les ensembles :

$$\begin{aligned} X \ominus (n-1) B \\ (X \ominus iB)/(X \ominus iB)_B, \forall i \in [\emptyset, n-2] \\ (X \ominus jB)/(X \ominus jB)_B, \forall j \in [\emptyset, n-2], j \neq i \end{aligned}$$

remplissent deux à deux les conditions du lemme.

On a donc :

$$\begin{aligned} Z_{n-1} \ominus B &= (X \ominus nB) \cup \left[\bigcup_{i=0}^{n-2} [(X \ominus (i+1)B) \cap [(X \ominus (i+1)B)^c \ominus 2B]] \right] \\ &= X \ominus nB \end{aligned}$$

De la même façon :

$$Z_{n-1}/(Z_{n-1})_B = Z_{n-1} \cap [X \ominus (n-1)B]_B^c$$

Soit :

$$\begin{aligned} Z_{n-1}/(Z_{n-1})_B &= [X \ominus (n-1)B]/[X \ominus (n-1)B]_B \cup \left[\bigcup_{i=0}^{n-2} (X \ominus iB)/(X \ominus iB)_B \right] \\ &= \bigcup_{i=0}^{n-1} [(X \ominus iB)/(X \ominus iB)_B] \end{aligned}$$

On a donc :

$$Z_n = (X \ominus nB) \cup \left[\bigcup_{i=0}^{n-1} (X \ominus iB)/(X \ominus iB)_B \right]$$

On peut écrire :

$$Z_n = (X \ominus nB) \cup S_{n-1}(X)$$

ou encore :

$$Z_\infty = S(X)$$

L'opération itérative précédemment définie conduit donc au squelette de X.

Montrons que l'opération $(Z \ominus B) \cup (Z/Z_B)$ est un amincissement.

On peut écrire :

$$(Z \ominus B) \cup [Z \cap (Z_B)^c] = Z \cap [(Z \ominus B) \cup (Z_B)^c] = Z \cap [(Z \ominus B)^c \cap (Z_B)]^c$$

ce qui amène à montrer que $(Z \ominus B)^c \cap Z_B$ est une transformée en tout ou rien.

On a :

$$Z_B = (Z \ominus B) \ominus B = \bigcup_{a \in B} (Z \ominus B)_a = \bigcup_{a \in B} \bigcap_{b \in B} Z_{a+b}$$

$$Z_B = \bigcup_{a \in B} (Z \ominus B)_a$$

De la même façon :

$$(Z \ominus B)^c = Z^c \ominus B = \bigcup_{b \in B} (Z^c)_b = \bigcup_{b \in B} (Z_b)^c = \bigcup_{b \in B} (Z^c \ominus L_b)$$

où L_b est le translaté d'un point dans la direction b.

On a alors :

$$(Z \ominus B)^c \cap Z_B = \bigcup_{a \in B, b \in B} [(Z \ominus B)_a \cap (Z^c \ominus L_b)]$$

$$= \bigcup_{a, b} (Z * T_{a,b}) \quad \text{avec } T_{a,b} = (B_a, L_b)$$

L'opération de squelettisation est donc un amincissement par un ensemble \mathcal{T} d'éléments structurants :

$$\mathcal{T} = \{T_{a,b} = (B_a, L_b), \forall a, b \in B\}$$

Examinons le cas de la trame hexagonale. Les résultats obtenus seront transposés ultérieurement à la trame carrée. Parmi tous ces éléments, seuls les suivants sont susceptibles de produire une transformée en tout ou rien différente de l'ensemble vide :

.	0	0	.
1	1	.	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1		1	1		1	1

et toutes leurs rotations.

Nous sommes donc parvenus au terme de la deuxième étape de notre démarche : le squelette d'un ensemble par ouverture est un amincissement, et les éléments structurants utilisés sont ceux décrits plus haut. Deux remarques s'imposent :

- les éléments structurants sont utilisés en union et non direction par direction. Cette façon de faire aura des conséquences intéressantes dans la suite de l'exposé.
- chaque élément structurant est défini sur un voisinage de taille 2 de l'origine. L'utilisation de voisinage de taille 2 est la conséquence du fait que l'amincissement doit éliminer des points de l'ouvert.

2) DU SQUELETTE NON CONNEXE AU SQUELETTE CONNEXE

2-1) Principe

Pour élaborer un squelette connexe à partir de l'amincissement précédent, la méthode la plus simple consiste certainement à analyser les différents éléments structurants exhibés plus haut de façon à ne conserver que ceux qui préservent l'homotopie.

Cette procédure d'analyse est la suivante : pour chaque point origine de l'élément structurant, on vérifie que l'élimination de ce point ne brise pas la connexité. Cette procédure doit être hiérarchisée, car le fait de travailler avec toutes les rotations des éléments structurants oblige pour certaines configurations à analyser le comportement du point origine, mais aussi de ses points adjacents qui, du fait qu'ils sont susceptibles d'être points origine d'éléments structurants peuvent, s'ils sont éliminés simultanément, briser la connexité.

2-2) Analyse des configurations

Analysons le premier niveau de la hiérarchie. L'écriture exhaustive des éléments structurants dans une direction donnée est la suivante (à une symétrie près) :

0 0	1 0	0 1
1 1 0	1 1 0	1 1 0
1 1 1	1 1 1	1 1 1
1 1	1 1	1 1
(a)	(b)	(c)

1 1	1 0
1 1 0	1 1 1
1 1 1	1 1 1
1 1	1 1
(d)	(e)

Seuls les éléments (a) et (c) peuvent être classés à ce premier niveau : (a) est à l'évidence homotopique (l'élimination du point origine, ne modifie pas la connexité, quelque soit le sort réservé à ses points adjacents), (c) est par contre non homotopique : l'élimination du point origine brise la connexité, puisque le point au-dessus de l'origine est déconnecté du reste de l'élément structurant. Ce point lui-même pourrait bien sûr être origine d'élément structurant. La seule configuration possible est alors :

1 1
1 1 1
0 1 1
1 1 0
1 1 1
1 1

Cette configuration brise également la connexité.

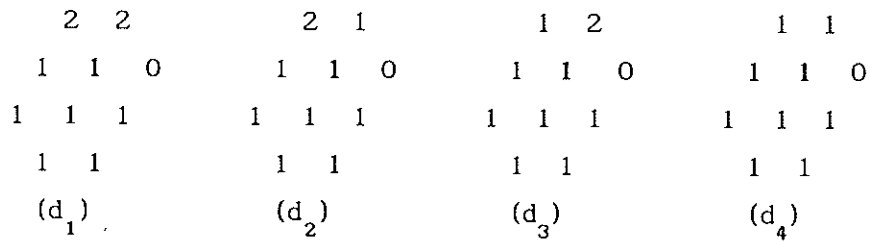
Analysons les autres configurations. On a constaté que le comportement

des points entourant le point origine est fondamental. Or ce comportement dépend de l'appartenance ou non du point à l'ouvert. En effet dans ce cas, il sera éliminé, sinon il sera toujours conservé. Nous allons donc analyser les différentes autres configurations en observant l'effet de l'amincissement selon que les points adjacents au point origine appartiennent ou non à l'ouvert de X .

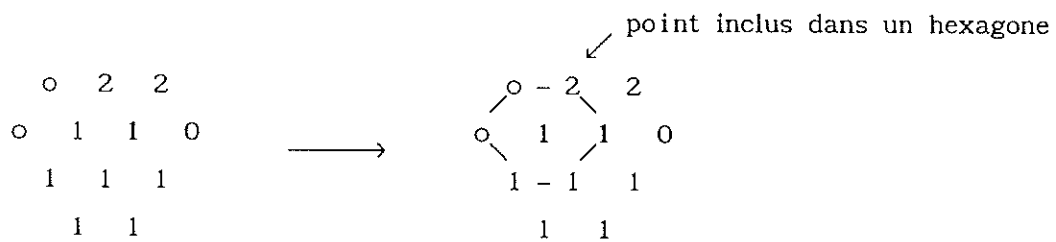
Pour simplifier l'écriture, on notera :

- 0, les points de X^c
- 1, les points de $(X)_B$
- 2, les points du résidu $X/(X)_B$.

Analysons la configuration (d). Si on la subdivise selon l'appartenance des différents points aux ensembles ci-dessus, on peut écrire :



Analysons (d₁) et (d₂). Le point à gauche du point origine doit nécessairement être adjacent à un point de X^c . En effet, dans le cas contraire, il serait entouré de points de X et du même coup, le point marqué 2 qui lui est adjacent serait un point de l'ouvert, ce qui ne peut être le cas :



Donc le point adjacent au point origine est supprimé (il appartient à l'ouvert et est un point frontière) en même temps que le point origine. La connexité est donc brisée lorsqu'on amincit les configurations (d₁) ou (d₂).

configurations de type (d) puisque soit elles déconnectent, soit l'analyse de leur comportement peut se ramener à l'analyse des configurations de type (e).

Analysons les configurations de type (b). Elles se décomposent en :

$$\begin{array}{ccc}
 2 & 0 & \\
 1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & \\
 (b_1) & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 1 & 0 & \\
 1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & \\
 (b_2) & &
 \end{array}$$

En se référant à ce qui a été dit précédemment concernant les configurations (d_1) et (d_2) , (b_1) doit être éliminé.

Les configurations (b_2) se subdivisent en :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 \circ & - & 1 & 0 \\
 \circ & 1 & 1 & 0 \\
 1 & - & 1 & 1 \\
 1 & 1 & & \\
 (b_{21}) & & &
 \end{array}
 &
 \begin{array}{ccc}
 \circ & - & \circ & \\
 \circ & \circ & 1 & 0 \\
 \circ & - & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & \\
 1 & 1 & & \\
 (b_{22}) & & &
 \end{array}
 &
 \begin{array}{ccc}
 \circ & - & \circ & \\
 \circ & \circ & \circ & \\
 \circ & - & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & \\
 1 & 1 & & \\
 (b_{23}) & & &
 \end{array}
 \end{array}$$

(b_{21}) et (b_{22}) préservent la connexité, mais ce ne semble pas être le cas pour (b_{23}) . Cependant le point à gauche du point origine étant un point origine d'une configuration (d), il n'est pas éliminé. L'élément (b_{23}) est donc valable. La configuration (b_2) préserve donc la connexité.

On peut alors résumer les configurations (b_2) et (a) préservant la connexité par :

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{2} & 0 & \\
 1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 &
 \end{array}$$

Analysons l'élément (e). On peut écrire :

$$\begin{array}{ccc}
 2 & 0 & \\
 1 & 1 & 2 \\
 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & \\
 (e_1) & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 2 & 0 & \\
 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & \\
 (e_2) & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 1 & 0 & \\
 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & \\
 (e_3) & &
 \end{array}$$

(e_1) et (e_2) ne préservent pas la connexité (voir l'analyse de (d_1) et (d_2)). Quant-à (e_3), l'analyse effectuée pour (b_2) montre que cette configuration préserve également la connexité.

De toutes les configurations analysées, seules les configurations du type :

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{2} & 0 & \\
 1 & 1 & \bar{2} \\
 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 &
 \end{array}$$

ainsi que toutes leurs rotations préservent la connexité du squelette par ouvertures.

Cet élément structurant est toujours un élément défini sur un voisinage de taille 2. Pour se restreindre à un voisinage de taille 1, deux possibilités nous sont offertes.

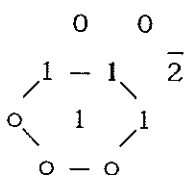
La première possibilité consiste à décomposer l'élément de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc}
 0 & 0 & \\
 1 & 1 & \bar{2} \\
 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 &
 \end{array}
 \qquad
 \text{ou}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 1 & 0 & \\
 1 & 1 & \bar{2} \\
 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 &
 \end{array}$$

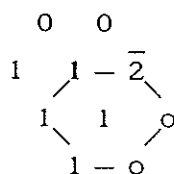
Si on se restreint alors au voisinage de taille 1 du point-origine, les deux configurations possibles sont :

$$\begin{array}{ccc}
 0 & 0 & \\
 1 & 1 & \bar{2} \\
 1 & 1 & \\
 \end{array}
 \quad \text{ou} \quad
 \begin{array}{ccc}
 1 & 0 & \\
 1 & 1 & \bar{2} \\
 1 & 1 & \\
 \end{array}$$

Or le point-origine devant appartenir à l'ouvert, seule la première configuration assure qu'il existe un hexagone contenant le point-origine implanté de la façon suivante :



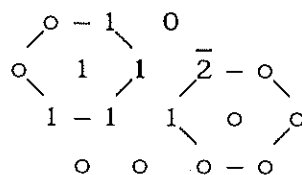
Cette configuration correspond à la configuration de taille 2 initiale. Remarquons que l'hexagone contenant le point-origine pourrait être implanté de la façon suivante :



Mais on voit immédiatement que cette configuration est équivalente à une rotation près à :

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{2} & 0 & \\
 1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & \\
 \end{array}$$

La deuxième configuration peut par contre correspondre à :



Ce qui l'élimine de facto (les points en bas à gauche peuvent être à zéro, ce qui fait que cette configuration sur le voisinage de taille 2 n'est pas valable).

On peut donc écrire :

L'amincissement d'un ensemble X par l'union de l'élément structurant

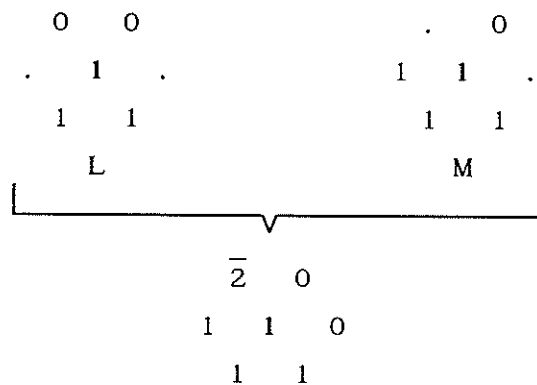
$$\begin{array}{ccc} \bar{2} & 0 & \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

et de ses diverses rotations et symétries produit un squelette connexe de X .

- (1) sont les points de X_B
- (2) sont les points de $(X/X_B)^c$
- (0) sont les points de X^c .

Malheureusement, il n'y a aucune raison pour que ce squelette contienne les points du squelette par ouverture. Cette assertion peut paraître paradoxale. En effet, partant d'un ensemble d'éléments structurants \mathcal{T} dont on a démontré qu'il fournissait par amincissement les points du squelette par ouverture, on peut s'attendre à ce que l'utilisation d'un sous-ensemble réduit \mathcal{T}' de ces mêmes éléments structurants produisent une transformée contenant le squelette par ouverture original (voir définition de l'amincissement par une union d'éléments structurants). Cependant, il faut se rappeler que le squelette est obtenu par itérations d'amincissements. Or l'amincissement à l'itération n d'un ensemble par un ensemble d'éléments structurants $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ enlèvera certes moins de points, mais laissera pour l'itération $n+1$ des configurations pouvant être amincies et qui ne seraient jamais apparues autrement.

On remarquera que cet élément structurant triphasé contient les configurations L et M.



Ceci justifie a *posteriori* l'usage de ces configurations dans l'obtention du squelette, l'absence de définition plus précise des points non pris en compte étant compensée par l'utilisation de ces éléments structurants, direction par direction. On voit également pourquoi une configuration de type D ne peut pas produire un squelette.

Enfin, notons que le squelette obtenu par cette transformation se réduit à un point lorsque l'ensemble X de départ est un hexagone, mais également un dodécagone, un polygone régulier à 18 côtés, etc... (Figure 1).

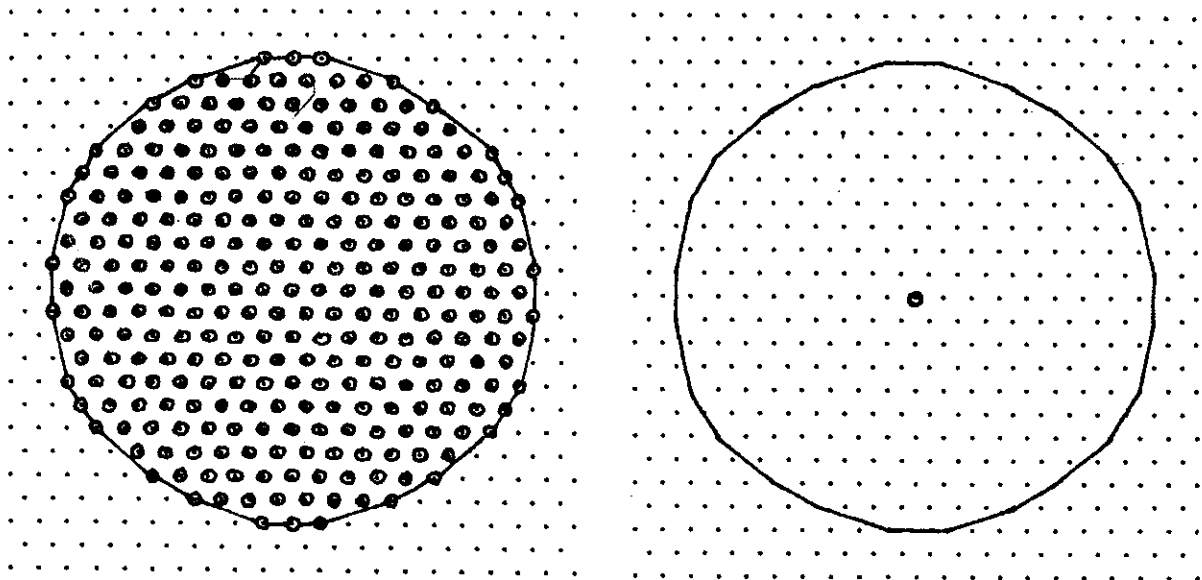


Figure 1 : Le squelette lisse est réduit à un point lorsque X est un polygone régulier à $6n$ côtés

Ce comportement remarquable semble vrai (cela n'a pas été démontré) pour tout polygone régulier à $6n$ côtés. Si cette conjecture était vérifiée, ce squelette serait "plus lisse" que le squelette par des disques. C'est ce comportement remarquable qui a conduit à dénommer ce squelette, squelette connexe lisse pour le distinguer de celui décrit ci-dessous.

La deuxième solution pour passer d'une configuration de taille 2 à une configuration de taille 1 consiste à remarquer que la configuration :

$$\begin{array}{ccc} \bar{2} & 0 & \\ 1 & 1 & \bar{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

où 1 désigne les points de l'ouvert peut s'écrire :

$$\begin{array}{ccc} \bar{2} & 0 & \\ . & . & \bar{2} \\ 3 & . & \end{array}$$

où 3 désigne les points de l'érodé $X \ominus B$. En effet si le point indiqué appartient à l'érodé, il est centre d'un hexagone inclus dans X , donc par définition tous ses voisins appartiennent à l'ouvert.

2-3) Exemples

Les figures 2 à 4 illustrent ces deux types de squelette. On remarquera que le squelette du premier type est particulièrement lisse si l'ensemble X de départ est un ouvert, $X = (X)_B$ (Figure 3). On comparera ces squelettes avec les squelettes classiques L et M (squelettes situés en bas des illustrations). Ces deux types de squelettes peuvent être amincis à l'aide du squelette L sans générer de barbules supplémentaires. Cela est notamment utile pour mettre en évidence les points multiples et les extrémités de ces squelettes (Figure 4).

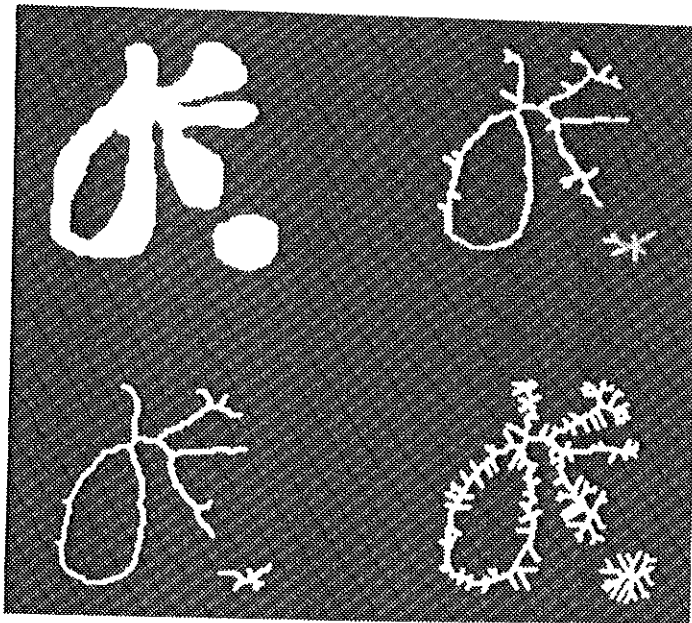


Figure 2 : Squelette connexe de type 2

En haut, à gauche image originale, à droite squelette connexe
En bas, squelettes L et M

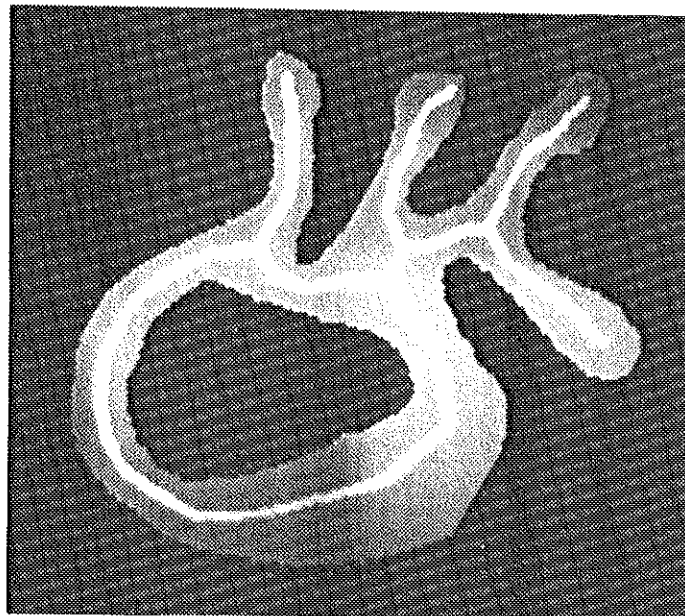


Figure 3 : Squelette connexe lisse

L'ensemble de départ est un ouvert

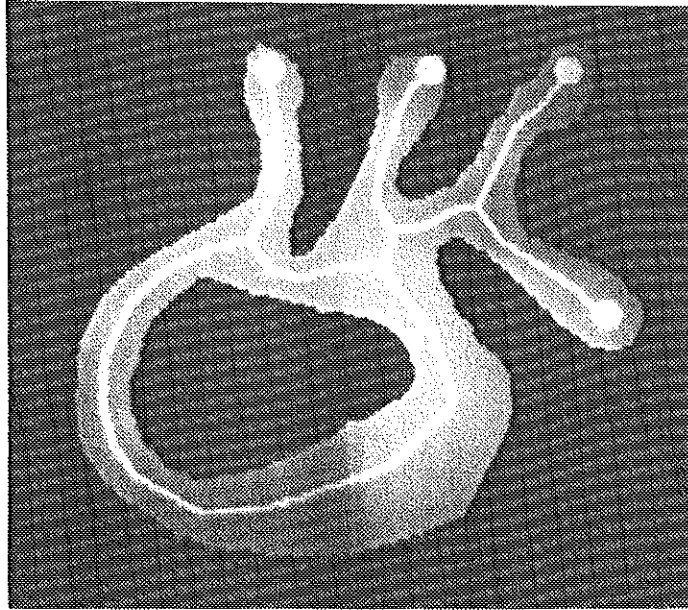


Figure 4 : Amincissement final du squelette lisse
et détection des points caractéristiques

3) LES SQUELETES EN TRAME CARREE

En trame carrée, la même approche peut être utilisée. Partant de la boule élémentaire B (ici un carré), on trouve immédiatement que le squelette par ouverture peut s'obtenir par des amincissements par les éléments structurants suivants (à une rotation où symétrie près) :

```

0 . . . 0 . . . 0 . . . . . 0 . . . 0
1 1 1 1 1 1 1 1 1 . 1 1 1 . 1 1 1 .
1 1 1 1 1 1 1 1 1 . 1 1 1 . 1 1 1 .
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

```

A partir de ces configurations, on peut tenter d'extraire celles qui préservent la connexité. Mais, en trame carrée, deux types de graphes peuvent être utilisés : le graphe 4-connexe et le graphe 8-connexe. Nous

appellerons par la suite les deux premières configurations ci-dessus configurations de côté (parce que le centre de l'élément structurant est sur un côté du carré), les trois dernières configurations de coin.

3-1) Le squelette 4-connex

3-1-1) Configurations de côté

Ces configurations sont au nombre de cinq :

0 0 0	0 0 1	0 1 0	0 1 1	1 0 1
1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1
1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1
1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1
(a)	(b)	(c)	(d)	(e)

Nous allons coder les points comme pour la trame hexagonale. Les points appartenant à l'ouvert X_B seront représentés par la valeur 1, ceux appartenant aux résidus X/X_B par la valeur 2.

La configuration (a) préserve la connexité. Etudions (b). Elle se décompose en :

0 0 2	0 0 1
1 1 1	1 1 1
1 1 1	1 1 1
1 1 1	1 1 1
(b ₁)	(b ₂)

(b₁) ne peut pas être aminci : en effet, pour préserver la connexité, le chemin suivant doit être conservé :

7

$$\begin{array}{ccc}
 0 & 0 & 2 \\
 1 & 1 & \overset{|}{-}1 \\
 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1
 \end{array}$$

(b₂) est dans le même cas. En effet, on peut avoir :

$$\begin{array}{cccc}
 & & 1 & 1 & 1 \\
 & & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & \overset{|}{-}1 & 1 \\
 1 & 1 & \overset{|}{-}1 & 0 & \\
 1 & 1 & 1 & & \\
 1 & 1 & 1 & &
 \end{array}$$

ce qui implique que le chemin ci-dessus (entre autres) soit conservé.

La configuration (e) est alors dans le même cas.

La configuration (c) s'écrit en fait :

$$\begin{array}{ccc}
 0 & 2 & 0 \\
 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1
 \end{array}$$

ce qui implique qu'elle ne préserve pas la connexité.

(d) peut se décomposer en :

$$\begin{array}{ccc}
 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 (d_1) & & & (d_2) & & & (d_3) & &
 \end{array}$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, (d₁) ne peut être aminci, pas plus que (d₂).

(d₃) peut être inclus dans une configuration similaire à la suivante :

```

      1 1 1
      1 1 1
0     1 1 1
      1 1 1 0
      1 1 1
      1 1 1

```

```

      1 1 1
      1 1 1
0     1—1 1
      1 1 1 0
      1 1 1
      1 1 1

```

ce qui implique que le chemin ci-dessus soit conservé.

En résumé, seule parmi les éléments de côté la configuration (a) préserve la connexité.

3-1-2) Configurations de coin

Parmi les configurations de coin, rappelons que la suivante est particulière :

```

      . 0 1
      1 1 1 0
      1 1 1 .
      1 1 1

```

En effet, le point en haut à droite n'est pas connecté au point central de la configuration dans un graphe 4-connexe.

Parmi les autres configurations, on peut noter que celles qui présentent autour du point central plusieurs composantes connexes de points appartenant au complémentaire de X ne préservent pas la connexité. Par exemple :

```

      0 1 0
      1 1 1 1
      1 1 1 1
      1 1 1

```

Cette configuration présente deux points à 0 (appartenant à X^c) séparés par un point de X . Dans ce cas, l'amincissement est impossible car il romprait la connexité entre le point supérieur et le centre du carré.

Ces configurations éliminées, il reste (aux rotations et symétries près) neuf configurations :

$\begin{matrix} 0 & 0 & . \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & . \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \end{matrix}$
(a)	(b)	(c)

$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & . \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \end{matrix}$
(d)	(e)	(f)

$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \end{matrix}$
(g)	(h)	(i)

(a) préserve la connexité, de même que (b). Il en est alors de même par la configuration (f).

Etudions la configuration (c). En utilisant le codage des points déjà utilisé, elle se décompose en :

$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \end{matrix}$
(c ₁)	(c ₂)

Or, on peut écrire ces deux configurations de la façon suivante :

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & \\
 (c_1) & & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{cccc}
 0 & 2 & 2 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & \\
 (c_2) & & &
 \end{array}$$

La première est donc équivalente à la configuration (a) analysée lors de l'étude des configurations de côté, configuration qui préserve la connexité.

Quant à la seconde, l'amincissement est impossible pour les mêmes raisons que celles évoquées plus haut.

La configuration (g) a le même comportement que la configuration (a).

La configuration (d) se décompose en :

$$\begin{array}{cccc}
 0 & 2 & 2 & 2 \\
 1 & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & \\
 (d_1) & & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{cccc}
 1 & 1 & 1 & 2 \\
 1 & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & \\
 (d_2) & & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{cccc}
 0 & 2 & 2 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & \\
 (d_3) & & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 0 & 2 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & \\
 (d_4) & & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{cccc}
 . & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & \\
 (d_5) & & &
 \end{array}$$

Toutes ces configurations sont susceptibles de briser la connexité.

La configuration (h) ne préserve pas la connexité, pour les mêmes raisons que (d).

La configuration (e) doit être éliminée pour les mêmes raisons.

La configuration (i) se décompose en :

1 1 1 0	1 1 1 0	0 2 2 0
1 1 1 1	1 1 1 2	1 1 1 2
1 1 1 1	1 1 1 2	1 1 1 2
1 1 1 1	1 1 1 0	1 1 1 0
(i_1)	(i_2)	(i_3)

(i_2) et (i_3) ne préservent pas la connexité. (i_1) peut appartenir à une structure de ce type :

0 0 1
1 1 1 0
1 1 1 1 1
1 1 1 1 0
1 1 1 1 0

qui conduirait à :

0 0 1
. 1 1 0
1 1 0 1 1
1 1 1 1 0
1 1 1 . 0

Mais on génère ainsi une configuration du type :

1 0
0 1

ambigüe sur le graphe 4-connexe. Pour éviter cela, la configuration (i) n'est pas retenue.

Les configurations qui ne brisent pas la 4-connexité sont donc :

0 0 0	. 0 .
1 1 1	1 1 1 0
1 1 1	1 1 1 .
1 1 1	1 1 1

On retrouve là encore des configurations qui contiennent les configurations classiques du squelette en trame carrée.

3-2) Le squelette 4-connexe lisse

Si 'on se restreint au voisinage de taille 1, les deux configurations deviennent :

0 0 0	. 0 .
1 1 1	1 1 0
1 1 1	1 1 .

et toutes leur rotations.

Comme en trame hexagonale, si $X = X_B$, le squelette produit par ces éléments structurants est un squelette "lisse".

La Figure 5 illustre ce type de squelette.

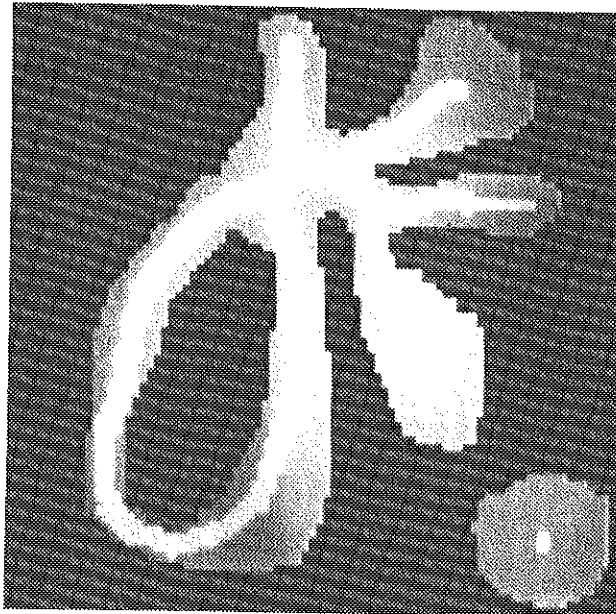


Figure 5 : Le squelette lisse 4-connexe

3-3) Le squelette 8-connexe

La même démarche peut être utilisée pour le squelette 8-connexe. On abrègera la démonstration en ne faisant ressortir que les différences avec le squelette 4-connexe.

3-3-1) Configurations de côté

La configuration (a) préserve la 8-connexité.

La configuration (b) préserve également la 8-connexité. Ce n'était pas le cas de la 4-connexité. Par conséquent, la configuration (e) préserve aussi la 8-connexité. (c) et (d) par contre ne préservent pas plus la 8-connexité qu'elles ne préservent la 4-connexité.

3-3-2) Configurations de coin

A la différence de la 4-connexité, la configuration suivante ne présente aucune particularité :

$$\begin{array}{cccc} & & 0 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 & . \\ & 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

Le point en haut à droite est dans ce cas de figure connecté au point central.

En conséquence, les configurations (a) et (b) et (f) doivent être modifiées :

0 0 0	1 0 0	0 0 0
1 1 1 0	1 1 1 0	1 1 1 0
1 1 1 0	1 1 1 0	1 1 1 1
1 1 1	1 1 1	1 1 1
(a)	(b)	(f)

Ces configurations préservent la 8-connexité.

Les configurations (c), (d), (e), (g) et (h) ont le même comportement en 4-connexité et en 8-connexité. Quant à la configuration (i), elle ne préserve pas l'homotopie.

Il en résulte que les configurations qui ne brisent pas la 8-connexité sont :

. 0 .	. 0 0
1 1 1	1 1 1 0
1 1 1	1 1 1 .
1 1 1	1 1 1

3-4) Le squelette 8-connexe lisse

Comme précédemment, on peut tenter de restreindre les éléments structurants ci-dessus à un voisinage de taille 1. Si le second se transcrit sans difficulté, pour donner :

. 0 0
1 1 0
1 1 .

le premier par compte s'écrit :

. 0 .
1 1 1
1 1 1

Or, dans cette configuration, on n'est pas toujours assuré que les points situés sur le voisinage de taille 2 soient des points de l'ouvert. On pourrait avoir, par exemple :

. 0	1—1—1
1—1—1	1 1 1
1 1 1	1—1—1
1—1—1	0

En fait, la seule configuration qui soit valable dans ce cas peut

s'écrire :

$$\begin{array}{ccc} \bar{1} & 0 & \bar{1} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Cette configuration et la précédente ainsi que toutes leurs rotations à 90°, fournissent par amincissement un squelette dit lisse, car appliqué à un ouvert X , ($X = X_B$), ce squelette est sans barbules. Cependant, on voit immédiatement dans ce cas que la configuration :

$$\begin{array}{ccc} \bar{1} & 0 & \bar{1} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

se réduit alors à :

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Les deux squelettes lisses en trame carrée sont donc très semblables.

3-5) Mise en oeuvre des squelettes lisses

La mise en oeuvre des squelettes lisses est particulièrement aisée lorsque l'on dispose d'un processeur d'image muni d'une table de correspondance pour le stockage des éléments structurants. Nous allons décrire l'algorithme dans le cas du squelette hexagonal et du squelette carré 4-connexe.

3-5-1) Trame hexagonale

Soit à calculer le squelette lisse hexagonal d'un ensemble X , l'élément structurant est :

$$\begin{array}{ccc} \bar{2} & 0 & \\ 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \end{array} \quad \text{et toutes ses rotations et symétries.}$$

Soit \mathcal{T}' , l'ensemble des éléments structurants du type :

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \end{array} \quad \text{et toutes leurs rotations et symétries.}$$

Ces configurations peuvent être stockées dans une table de correspondance.

On peut alors effectuer la transformée par tout ou rien de X_B par \mathcal{T}' . Tous les points de X_B sélectionnés par cette transformée correspondent à l'une des configurations suivantes sur l'ensemble X :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & & 1 & 1 & & 1 & 1 & & 1 & 1 \end{array}$$

etc...

Les seules configurations valables sont celles pour lesquelles le point central n'est pas adjacent à un point du résidu X/X_B , ou encore celles pour lesquelles le point central n'appartient pas $(X/X_B) \otimes B$.

L'amincissement peut alors s'écrire :

$$X / [(X_B * \mathcal{T}') \cap ((X/X_B) \otimes B)^c]$$

Cette formule se simplifie en :

$$(X_B \circ \mathcal{T}') \cup [X \cap ((X/X_B) \otimes B)]$$

Ce qui s'écrit encore :

$$(X_B \circ \mathcal{T}') \cup D_X(X/X_B)$$

où $D_X(X/X_B)$ est la dilatation géodésique élémentaire du résidu dans l'ensemble X .

L'algorithme s'écrit donc :

- a) Calcul de X_B
- b) Calcul de $X_B \circ \mathcal{T}'$
- c) Calcul de $D_X(X/X_B)$
- d) Calcul de $(X_B \circ \mathcal{T}') \cup D_X(X/X_B)$
- e) Si non-idempotence, retourner en a).

3-5-2) Trame carrée (squelette 4-connexe)

De la même façon, on peut sélectionner les configurations suivantes :

$$\begin{array}{ccc}
 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 1
 \end{array}
 \quad \text{et} \quad
 \begin{array}{ccc}
 . & 0 & . \\
 1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & .
 \end{array}$$

Ces configurations extraient de X_B des points qui correspondent à l'une des configurations suivantes sur X :

$$\left. \begin{array}{ccc}
 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 \\
 \\
 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 0 \\
 \\
 2 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 \\
 \\
 2 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 0 \\
 \\
 0 & 2 & 0 \\
 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 \\
 \\
 0 & 0 & 2 \\
 1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 0
 \end{array} \right\} \text{etc...}$$

Parmi toutes ces configurations, quelques-unes sont particulières. En premier lieu, la configuration :

$$\begin{array}{ccc}
 0 & 0 & 2 \\
 1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 0
 \end{array}$$

est valable, car le point marqué 2 n'est pas adjacent au point central. On peut cependant faire l'hypothèse que cette configuration n'apparaît pas (au besoin en la supprimant). On remarque que cette configuration est précisément une configuration ambiguë sur le graphe 4-connexe.

En second lieu, les configurations du type :

$$\begin{array}{ccc} 2 & 0 & . \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & . \end{array}$$

semblent autorisées pour l'amincissement. Mais en fait, cette configuration correspond à :

$$\begin{array}{cccc} 2 & 0 & . & \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & . \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

ce qui entraîne que le point central ne peut être ôté.

En résumé, pourvu que les configurations ambiguës soient éliminées, les configurations valables correspondent à celles où le point central n'est pas adjacent à un point du résidu. L'algorithme du squelette 4-connexes lisse est donc identique à l'algorithme en trame hexagonale.

3-5-3) Cas où l'ensemble à squelettiser n'est pas un ouvert

Lorsque l'ensemble X n'est pas ouvert, plusieurs solutions sont possibles :

- Soit, on décide de prendre l'ouvert de X. On règle ainsi définitivement le problème.

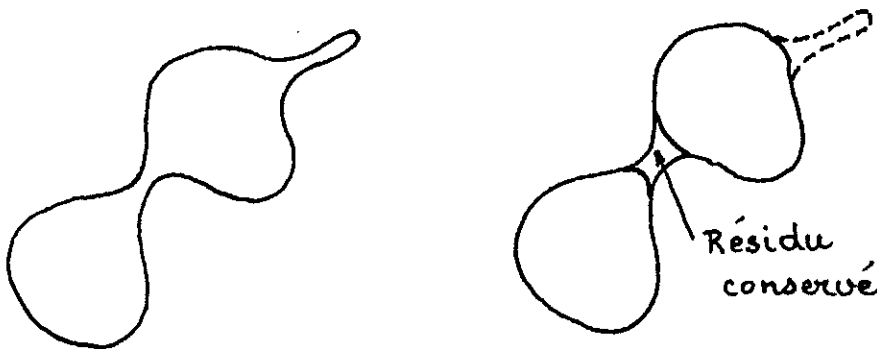


Figure 6 : Ouverture connexe d'un ensemble X

- On peut également effectuer l'ouverture connexe de X. Cette solution est préférable lorsque l'ouverture modifie l'homotopie. L'ouverture connexe consiste à conserver les résidus de X qui sont adjacents à plus d'une composante connexe de X_B (Figure 6).

- Une troisième solution consiste à éliminer de X les configurations susceptibles d'être des amorces de barbules. Ainsi, en trame hexagonale, on peut amincir X par l'élément structurant :

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \quad \text{et toutes ses rotations}$$

$$1 \quad .$$

Cette deuxième solution est préférable à la seconde lorsque X présente des filaments suffisamment importants pour que l'ouverture même connexe dénature trop la forme initiale de l'ensemble (Figure 7).

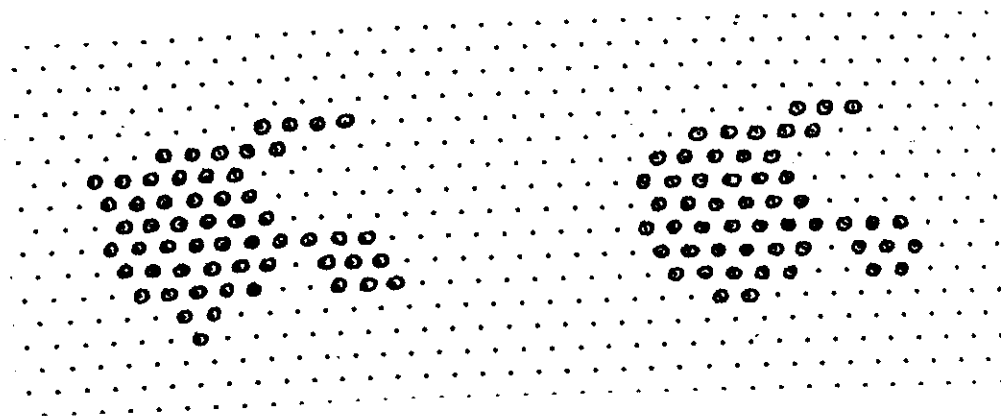


Figure 7 : Lissage d'un ensemble X

4) SQUELETTE NUMERIQUE

Les chapitres précédents ont permis d'établir un pont entre les deux procédés les plus couramment utilisés en morphologie mathématique pour obtenir un squelette. Incidemment, on a exhibé deux éléments structurants triphasés (c'est-à-dire définis sur trois ensembles différents) qui

gènèrent par amincissement des squelettes connexes, le premier étant particulièrement lisse. Il est alors naturel d'étendre ces algorithmes aux images à teintes de gris. Cependant, alors que les relations du squelette numérique avec certaines zones caractéristiques du graphe de la fonction (lignes de crêtes, remontées ver l'amont) sont bien connues, il n'est pas d'usage courant d'interpréter le squelette d'une fonction en termes d'ensembles maximaux. Il faut donc effectuer ici la démarche inverse de celle réalisée dans le cas du squelette ensembliste.

4-1) Squelette numérique par ouvertures

Soit une fonction f . On définira le squelette de cette fonction f comme la transformée obtenue à la suite d'une séquence infinie d'amincissements par l'ensemble \mathcal{T} d'éléments structurants définis au chapitre précédent :

$$S(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{f \circ \mathcal{T}\}^n$$

Avec : $\{f \circ \mathcal{T}\}^n = \underbrace{((f \circ \mathcal{T}) \dots \circ \mathcal{T})}_{n \text{ fois}}$

L'amincissement de f par un ensemble d'éléments structurants $\mathcal{T} = \{T_1\}$ est défini par :

$$f \circ \mathcal{T} = \text{Inf}_i (f \circ T_1)$$

Utilisons la notion de sous-graphe $G(f)$ de la fonction f . On sait que :

$$G(f \circ T_1) = \mathcal{U} [G(f) \circ T_1]$$

où \mathcal{U} désigne l'ombre descendante verticale (on dira désormais l'ombre) d'un ensemble de \mathbb{R}^3 :

$$X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^3), \quad \mathcal{U}(X) = X \circ \check{L}$$

où L est une demi-droite verticale $[0, +\infty[$ (Figure 8).

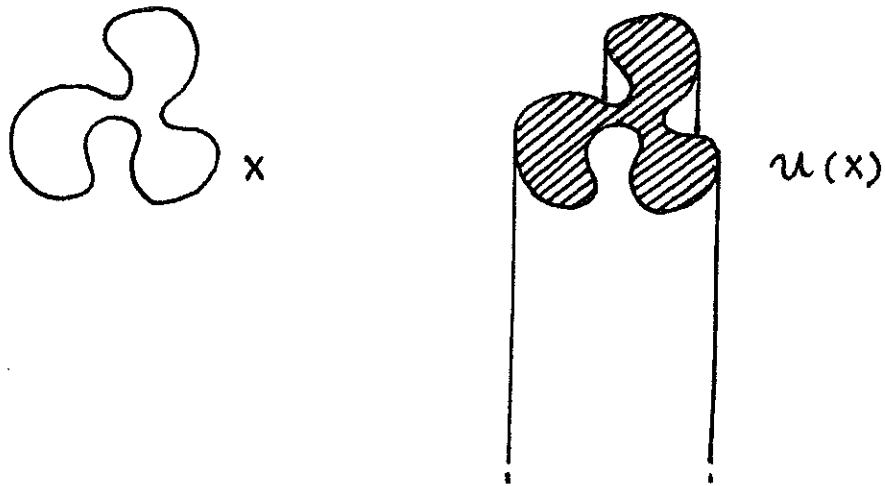


Figure 8 : Ombre verticale d'un ensemble

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} G(f \circ \mathcal{T}) &= \bigcap_i [G(f \circ T_i)] \\ &= \bigcap_i [\mathcal{U}(G(f) \circ T_i)] \end{aligned}$$

Montrons que dans le cas des éléments structurants qui nous préoccupent, tout point x appartenant à l'intersection des ombres $\mathcal{U}(G(f) \circ T_i)$ appartient à l'ombre des intersections.

Soit un point x appartenant à $\mathcal{U}(G(f) \circ T_i)$, $\forall T_i \in \mathcal{T}$. Alors :

$$x \in \bigcap_i [\mathcal{U}(G(f) \circ T_i)]$$

Montrons alors que :

$$x \in \mathcal{U} \left[\bigcap_i (G(f) \circ T_i) \right]$$

autrement dit que :

$$\bigcap_i [\mathcal{U}(G(f) \circ T_i)] \subset \mathcal{U} \left[\bigcap_i (G(f) \circ T_i) \right]$$

L'inclusion inverse étant triviale (l'ombre est un dilaté), on aura ainsi démontré l'égalité des deux membres de l'expression.

Le point x sépare l'ensemble \mathcal{T} des éléments structurants en deux groupes :

$$\mathcal{J}_K = \{T_k \text{ tel que } x \in (G(f) \circ T_k)\}$$

$$\mathcal{J}_{K'} = \{T_{k'} \text{ tel que } x \notin (G(f) \circ T_{k'})\}$$

Examinons le deuxième groupe. On le supposera non vide (sinon la conclusion est immédiate). Il existe donc un élément structurant $T_{k'_1}$ appartenant à $\mathcal{J}_{K'}$, tel que $x \notin G(f) \circ T_{k'_1}$. Mais x appartenant à $\mathcal{U}(G(f) \circ T_{k_1})$, il existe un point y_1 appartenant à la demi-droite $]x, +\infty[$ tel que $y_1 \in G(f) \circ T_{k'_1}$. Le point x étant aminci par $T_{k'_1}$, x appartient à $G(f_B)$ et x est point-frontière du sous-graphe. y au-dessus de x est donc également point-frontière. De plus $y \in (G(f) \circ T_k)$, $\forall T_k \in \mathcal{J}_K$. En effet si cela n'était pas le cas, y serait aminci par T_k . Or étant point-frontière, cela signifierait que y serait inclus dans un hexagone d'orientation similaire à celui composant l'élément T_k . Il en serait alors naturellement de même pour x . On aurait alors $x \notin (G(f) \circ T_k)$ ce qui contredit l'hypothèse initiale.

On peut donc écrire que y_1 divise \mathcal{J} en deux groupes :

$$\mathcal{J}_{K_1} = \{T_k \text{ tel que } y_1 \in G(f) \circ T_k\}$$

$$\mathcal{J}_{K'_1} = \{T_{k'} \text{ tel que } y_1 \notin G(f) \circ T_{k'}\}$$

Avec :

$$\mathcal{J}_K \cup \{T_{k'_1}\} \subset \mathcal{J}_{K_1}$$

En réitérant cette procédure, comme \mathcal{J} est fini, on arrive après un nombre fini d'itérations à mettre en évidence un point y_n , tel que :

$$\forall T_1 \in \mathcal{J}, y_n \in (G(f) \circ T_1)$$

Mais comme y_n est au-dessus de x , on peut écrire :

$$y_n \in \bigcap_1 (G(f) \circ T_1) \Rightarrow x \in \mathcal{U} \left[\bigcap_1 (G(f) \circ T_1) \right]$$

C.Q.F.D.

On a alors :

$$\begin{aligned}
 G(f \circ \mathcal{T}) &= \mathcal{U} [\cap_1 (G(f) \circ T_1)] \\
 &= \mathcal{U} [\cap_1 (G(f)/(G(f) * T_1))] \\
 &= \mathcal{U} [\cap_1 (G(f) \cap (G(f) * T_1)^c)] \\
 &= \mathcal{U} [G(f)/(\cup_1 (G(f) * T_1))]
 \end{aligned}$$

Or on a vu (chapitre 1, §4) que cette expression est identique à :

$$G(f \circ \mathcal{T}) = \mathcal{U} [(G(f) \circ B) \cup (G(f)/G(f)_B)]$$

Soit :

$$G(f \circ \mathcal{T}) = (G(f) \circ B) \cup \mathcal{U} [G(f)/G(f)_B]$$

Mais là s'arrête l'analogie avec la formule du squelette obtenue pour les ensembles. En effet, à la différence de la formule binaire, le fait de faire intervenir l'ombre de $G(f)/G(f)_B$ ne permet plus de remonter à une formule similaire à la formule du squelette par ouverture dont on est parti au chapitre 1.

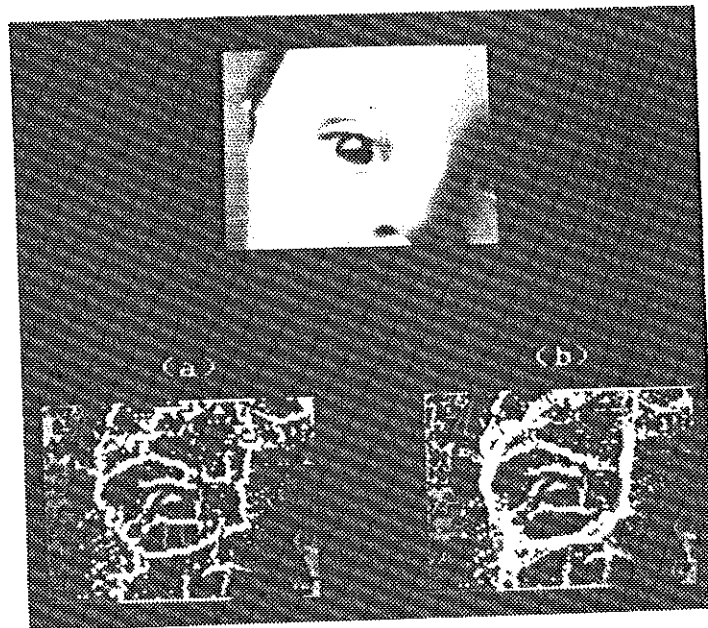


Figure 8 : Squelettes numériques non connexes

a) squelette par amincissement

b) squelette par ombrage des résidus du sous-graphe

On pourrait néanmoins définir le squelette d'une fonction comme une fonction $S(f)$ dont le sous-graphe est donné par :

$$G(S(f)) = \bigcup_I \left[(G(f) \ominus iB) / (G(f) \ominus iB)_B \right]$$

Cette définition fournit un squelette comme l'illustre la figure 8-b, somme toute assez proche du squelette par amincissement (Figure 8-a). La différence essentielle entre ces deux définitions est que l'une peut s'écrire sous forme d'un amincissement de fonction, alors que l'autre n'est simplement que la transformation en fonction (par le biais de l'ombre) de l'amincissement d'un ensemble tridimensionnel.

On remarquera également que seule la seconde définition permet d'exhiber les ensembles maximaux dont le squelette est issu. Ces ensembles maximaux sont des cylindres dont l'axe passe par tout point x appartenant au support de $S(f)$ et dont la hauteur est égale à y , point des résidus (Figure 9). A chaque point (x,y) appartenant aux résidus, on peut alors associer le rayon du cylindre et définir ainsi une fonction d'étanchéité $q(x,y)$. Cette définition peut cependant entraîner que plusieurs cylindres maximaux aient le même axe. Soit alors (x,y_1) les coordonnées d'un de ces cylindres maximaux et (x,y_2) celles d'un autre cylindre de même axe. Si $y_2 < y_1$, on peut alors écrire :

$$q(x,y_1) < q(x,y_2)$$

On peut donc remplacer les cylindres maximaux par des "cônes" maximaux. Une cône est définie de la façon suivante :

Soit g une application monotone croissante définie sur la demi-droite $[0,+\infty[$ à valeurs positives ou nulles : $\forall x \geq y, g(x) \geq g(y) \geq 0$. Un cône est la portion de l'espace contenant la demi-droite $[0,+\infty[$ découpée par la rotation de la frontière du sous-graphe de g autour de l'axe $[0,+\infty[$ (Figure 9).

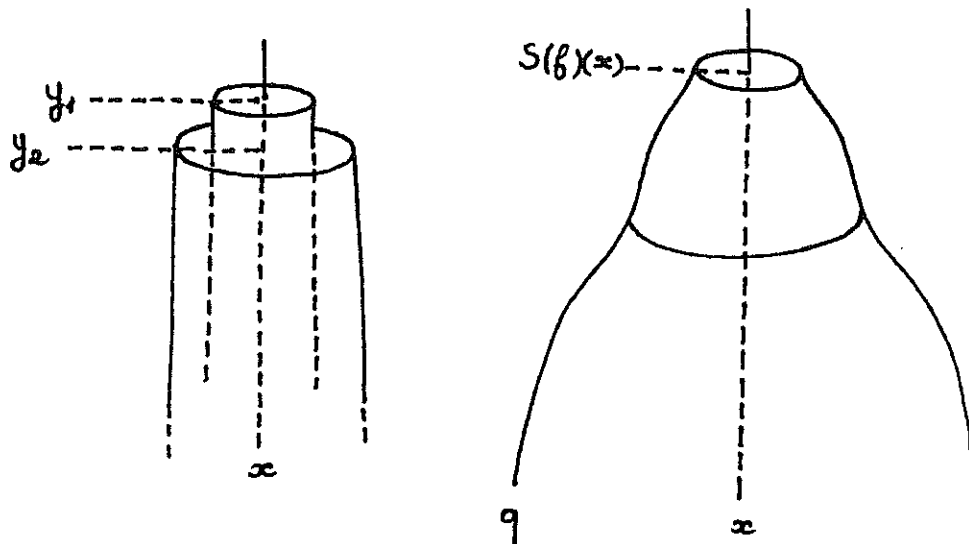


Figure 9 : Cylindres emboîtés et cônes maximaux

Ainsi, à chaque demi-droite verticale d'origine $(x, S(f)(x))$, on peut associer un et un seul cône maximal formé de l'union de tous les cylindres maximaux centrés sur cette demi-droite.

4-2) Le squelette numérique connexe

On peut, à partir du squelette défini par amincissement, définir un squelette numérique connexe, en effectuant l'amincissement de la fonction f par l'élément structurant :

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{2} & 0 & \\
 1 & 1 & \bar{2} \\
 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & \\
 \end{array}$$

On peut également utiliser les éléments structurants définis sur le voisinage de taille 1 mis en évidence dans le cas ensembliste.

Explicitons le cas du squelette lisse. Sur la trame hexagonale (le même raisonnement tient pour la trame carrée, squelette 4-connexe), l'élément structurant est :

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & \\ 1 & 1 & \bar{2} \\ & 1 & 1 \end{array}$$

Rappelons que 1 désigne les points de l'ouvert, $\bar{2}$ les points n'appartenant pas au résidu. Explicitons la transformée dans le cas discret. Soit $X_i(f)$ un seuil au niveau i de la fonction f . Le seuil au même niveau de l'aminci sera donné par :

$$X_i(f \circ \mathcal{T}) = \bigcup_{j \geq i} [(X_j(f_B) \circ \mathcal{T}') \cup [((X_j(f)/X_j(f_B)) \otimes B) \cap X_j(f)]]$$

en vertu de la formule algorithmique énoncée précédemment (cf chap. 3, § 5-1). Une formulation plus explicite de cette transformation n'est pas simple à exhiber. en effet, si le premier membre de l'expression correspond au seuil de l'aminci $f_B \circ \mathcal{T}'$, le deuxième membre n'est le seuil d'aucune fonction simple. Afin de l'expliciter, il faut introduire plusieurs notions.

Définissons tout d'abord deux fonctions. Soient f et g deux fonctions quelconques. Introduisons deux nouvelles fonctions Ω et Γ ainsi définies :

$$\begin{aligned} \Omega(f,g) &= f \text{ si et seulement si } f > g \\ \Omega(f,g) &= -\infty \text{ sinon.} \end{aligned}$$

De la même façon :

$$\begin{aligned} \Gamma(f,g) &= g \text{ si et seulement si } f > g \\ \Gamma(f,g) &= +\infty \text{ sinon.} \end{aligned}$$

On montre alors (la démonstration est en annexe) que le deuxième membre de l'expression introduite plus haut est le seuil au niveau i de la fonction h :

$$h = \text{Inf} [\Gamma(f, \Omega(f, f_B) \otimes B) , \Omega(f, \Gamma(f, f_B) \otimes B)]$$

Donnons succinctement une interprétation de cette formule. Ω et Γ définissent respectivement les bornes supérieure et inférieure de valeurs de gris sur lesquelles l'amincissement peut agir. En effet, soit un point x

de niveau de gris $f(x)$. Si tous les points y adjacents à x sont tels que :

$$f(x) > \Omega(f, f_B)(y)$$

alors le point x peut être aminci. Cependant le résultat de cet amincissement ne pourra pas être inférieur à :

$$\text{Sup}_y \Omega(f, f_B)(y) = \Omega(f, f_B) \circledast B$$

De la même façon, s'il existe un point z adjacent à x tel que :

$$f(x) > \Gamma(f, f_B)(z)$$

alors x ne peut pas être aminci. Il conservera la valeur $f(x)$. L'expression de la fonction h découle de ces deux conditions : l'aminci aura pour valeur la plus petite des deux valeurs imposées par chacune des deux conditions précédentes.

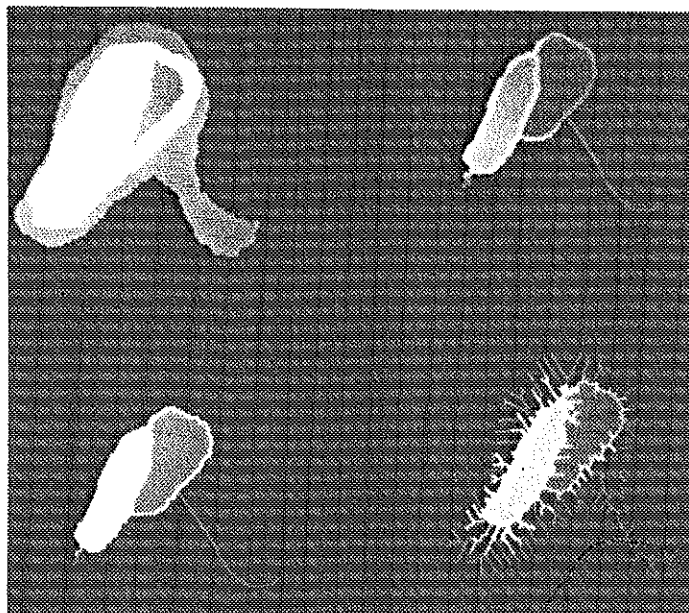


Figure 10 : Le squelette numérique lisse

En haut à gauche, ensemble initial, à droite, squelette lisse

En bas à gauche, squelette lisse aminci, à droite squelette M

Le squelette lisse numérique sera donc obtenu par la suite d'amincissements ainsi définis :

$$f \circ \mathcal{T} = \text{Sup} ((f \circ_B \mathcal{T}'), \text{Inf} (\Gamma(f, \Omega(f, f_B) \circ B), \Omega(f, \Gamma(f, f_B) \circ B)))$$

La figure 10 illustre le squelette obtenu. On le comparera notamment avec le squelette numérique classique par l'élément M (en hexagonal). Là encore, la fonction initiale doit être ouverte ou du moins débarrassée de ses irrégularités par des techniques analogues à celles décrites dans le cas binaire.

CONCLUSION

La retombée la plus intéressante de cette étude est certainement le squelette lisse. Le fait de pouvoir disposer dans le cas binaire d'un opérateur permettant de réaliser d'une façon simple, en utilisant des fonctions déjà implantées dans la plupart des processeurs morphologiques, des squelettes réguliers, permet d'utiliser ces transformées comme descripteurs de la forme des particules analysées. Quiconque a un jour été confronté à l'utilisation du squelette pour décrire la géométrie d'un objet ne manquera pas de voir tout l'intérêt de ces squelettes lisses.

Les squelettes lisses numériques sont plus difficiles à mettre en oeuvre. Leur intérêt est peut-être aussi moins évident (si on fait table rase de considérations esthétiques).

La description d'une image numérique comme un emboîtement de cônes maximaux est une approche qui pourrait s'avérer fructueuse car cette approche permet d'introduire en numérique des notions similaires à ce qui existe en binaire (comme l'érodé ultime par exemple). L'intérêt de cette description est aussi évident pour des classes de problèmes liés à la description et aux simulations de textures.

Enfin, il apparaît que les squelettes lisses sont une forme de squelette nouvelle, n'ayant pas de correspondants déjà existants. Ainsi, suite à une remarque de F. MEYER suggérant que le squelette lisse pouvait n'être que le squelette minimal (c'est-à-dire le squelette reliant au plus court en quelque sorte les composantes connexes de l'érodé ultime d'un

ensemble), on a vérifié que ce n'était pas le cas. Comme l'illustre la figure 11, lorsque l'ensemble à squelettiser ne présente qu'une composante connexe de l'érodé ultime, le squelette lisse n'est pas réduit à cette composante connexe.

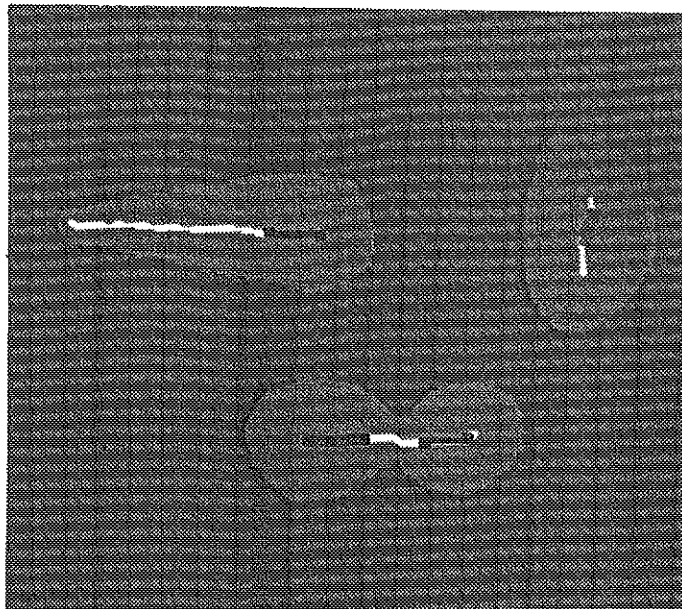


Figure 11 : Erodé ultime et squelette lisse

La forme et notamment l'allongement des particules mêmes convexes est pris en compte par ce type de squelette, justifiant par là même son emploi comme descripteur de forme.

REMERCIEMENTS

Merci à M. BILODEAU pour son aide lors de la programmation des squelettes lisses en trame carrée (algorithmes testés sur l'analyseur Q570 de Cambridge Instruments).

ANNEXE

Démontrons que l'amincissement produisant un squelette numérique lisse a pour seuil la formule donnée au chapitre 4.

Calculons le seuil au niveau i de la fonction $\Omega(f,g)$. Il est égal à :

$$X_i(\Omega) = \bigcup_{j \geq i} [X_j(f) \cap X_j^c(g)]$$

(Cf note C-107, Mathematical Morphology and Functions, S. BEUCHER).

De la même façon, le seuil de $\Gamma(f,g)$ peut s'écrire :

$$X_i(\Gamma) = \bigcap_{k \geq i} [X_k^c(f) \cup X_k(g)]$$

Le seuil de $\Omega(f, f_B) \odot B$ est alors égal à :

$$\begin{aligned} W_i &= X_i[\Omega(f, f_B) \odot B] \\ W_i &= \bigcup_{j \geq i} [(X_j(f) \cap X_j^c(f_B)) \odot B] = \bigcup_{j \geq i} Z_j \end{aligned}$$

On peut alors écrire le seuil de la fonction $h = \Gamma(f, \Omega(f, f_B) \odot B)$:

$$\begin{aligned} X_i(h) &= \bigcap_{k \geq i} [X_k^c(f) \cup Z_k] \\ X_i(h) &= \bigcap_{k \geq i} [X_k^c(f) \cup (\bigcup_{j \geq k} Z_j)] = \bigcap_{k \geq i} (A_k) \end{aligned}$$

Le seuil de $\Gamma(f, f_B) \odot B$ s'écrit :

$$\begin{aligned} M_i &= X_i[\Gamma(f, f_B) \odot B] \\ M_i &= \bigcap_{k \geq i} [(X_k^c(f) \cup X_k(f_B)) \odot B] \end{aligned}$$

La fonction $k = \Omega(f, \Gamma(f, f_B) \odot B)$ a alors pour seuil :

$$\begin{aligned} X_i(k) &= \bigcup_{k \geq i} [X_k(f) \cap M_k^c] \\ X_i(k) &= \bigcup_{k \geq i} [X_k(f) \cap (\bigcup_{j \geq k} [(X_j(f) \cap X_j^c(f_B)) \odot B])] \\ X_i(k) &= \bigcup_{k \geq i} [X_k(f) \cap (\bigcup_{j \geq k} (Z_j))] = \bigcup_{k \geq i} (B_k) \end{aligned}$$

Calculons maintenant le seuil de $\text{Inf}(h,k)$. Il est donné par :

$$Y_1 = X_1(h) \cap X_1(k) = \left(\bigcap_{k \leq 1} A_k \right) \cap \left(\bigcup_{1 \leq 1} B_1 \right)$$

$$Y_1 = \left(\bigcap_{k \leq 1} A_k \right) \cap (B_1 \cup B_{1+1} \cup \dots \cup B_{1+n} \cup \dots)$$

$$Y_1 = \bigcup_{1 \leq 1} [\left(\bigcap_{k \leq 1} A_k \right) \cap B_1]$$

$$Y_1 = \bigcup_{1 \leq 1} [\bigcap_{k \leq 1} (A_k \cap B_1)]$$

Calculons $A_k \cap B_1$ dans le cas où $k \leq 1$. On obtient :

$$A_k \cap B_1 = [X_1(f) \cap \left(\bigcup_{j \geq k} Z_j \right) \cap \left(\bigcup_{j \leq 1} Z_j \right)]$$

$$A_k \cap B_1 = X_1(f) \cap \left(\bigcup_{k \leq j \leq 1} Z_j \right)$$

On peut alors écrire Y_1 sous la forme :

$$Y_1 = \bigcup_{1 \leq 1} [X_1(f) \cap \left(\bigcup_{1 \leq j \leq 1} Z_j \right)]$$

Développons cette formule de façon à mieux mettre en évidence ses différents termes. On a :

$$Y_1 = (X_1 \cap Z_1) \cup [X_{1+1} \cap (Z_1 \cup Z_{1+1})] \cup [X_{1+2} \cap (Z_1 \cap (Z_1 \cup Z_{1+1} \cup Z_{1+2}))].$$

Soit encore :

$$Y_1 = (X_1 \cap Z_1) \cup (X_{1+1} \cap Z_1) \cup (X_{1+1} \cap Z_{1+1}) \cup (X_{1+2} \cap Z_1) \cup$$

$$(X_{1+2} \cap Z_{1+1}) \cup (X_{1+2} \cap Z_{1+2}) \cup \dots \text{etc..}$$

Tous ces termes peuvent se regrouper de la manière suivante :

$$Y_1 = [Z_1 \cap (X_1 \cup X_{1+1} \cup \dots)] \cup [Z_{1+1} \cap (X_{1+1} \cup X_{1+2} \cup \dots)] \cup \dots$$

Mais comme X_1, X_{1+1}, X_{1+2} etc.. sont des seuils successifs de la fonction f , on aboutit à :

$$Y_1 = [Z_1 \cap X_1] \cup [Z_{1+1} \cap X_{1+1}] \cup \dots$$

Ce qui correspond à :

$$Y_1 = \bigcup_{j \geq 1} [Z_j \cap X_j(f)] = \bigcup_{j \geq 1} [(X_j(f)/X_j(f_B)) \otimes B] \cap X_j(f)$$

C.Q.F.D.