Boules Critiques

Serge Beucher
Centre de Morphologie Mathématique
Mines Paristech

Séminaire sur la caractérisation de formes
Fontainebleau, 27 Avril 2009

Avertissement!

Cette présentation est un document de travail interne concernant des travaux en cours.
Ce document est disponible pour consultation uniquement (pas d'impression ou de copie autorisées).

Bibliographie succincte disponible:

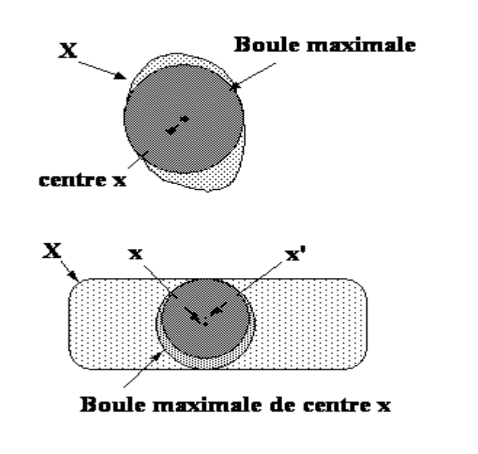
Transformations résiduelles en Morphologie Numérique

Note interne CMM n° 04/04/MM, Mars 2004

Boules maximales et squelette

Une boule $B_n(x)$ de taille n et de centre x est maximale dans l'ensemble X, s'il n'existe aucun autre indice k et aucun autre centre y tels que:

$$B_n(x) \subset B_k(y) \subset X \quad n \leq k$$



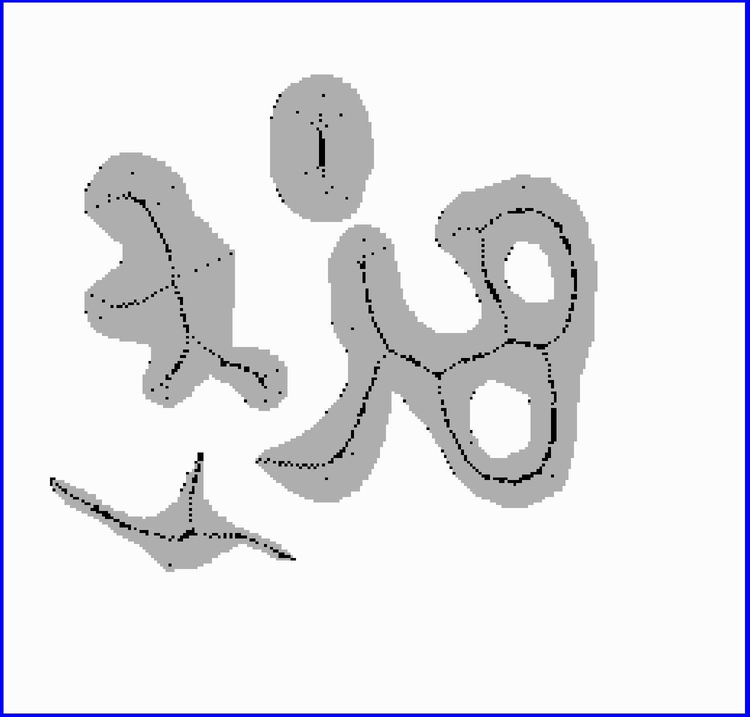
Le squelette d'un ensemble X selon une famille de boules $\{B_n\}$ est le lieu géométrique des centres de toutes ses boules maximales:

$$S(X) = \{x \in X : \exists\, B_n(x) \text{ maximale}\}$$

Formule de Lantuejoul

Le squelette par boules maximales correspond aux résidus d'ouvertures des érodés successifs de X :

$$S(X) = \bigcup_{i \in N} \left[\varepsilon_i(X) \setminus \left(\gamma \circ \varepsilon_i(X) \right) \right]$$



- Chaque résidu r_i (noté aussi S_i) est le lieu des centres des boules maximales de rayon i
- Les boules maximales sont définies sur les familles homogènes de boules obtenues par les dilatations successives de la boule élémentaire B_0

Propriétés, rappels

A chaque point x du squelette, on peut associer une fonction q(x) prenant la valeur du rayon de la boule maximale implantée au point x. Cette fonction est appelée fonction d’étanchéité ou fonction d’extinction

$$q(x) = n : x \in S(X), B_n(x) \text{ maximale}$$

L'ensemble X peut être construit à partir du squelette et de la fonction d'extinction:

$$X = \bigcup_{i \in N} \delta^i\left(S_i(X)\right)$$

La transformation, réversible, fournit une autre représentation de X: La donnée de X ou du doublet [S(X),q] sont équivalents

Squelette, fonction distance et chapeau haut-de-forme

Le squelette par boules maximales peut s'obtenir par un seuil à la valeur 1 du chapeau haut-de-forme de la fonction distance d_X de l'ensemble X

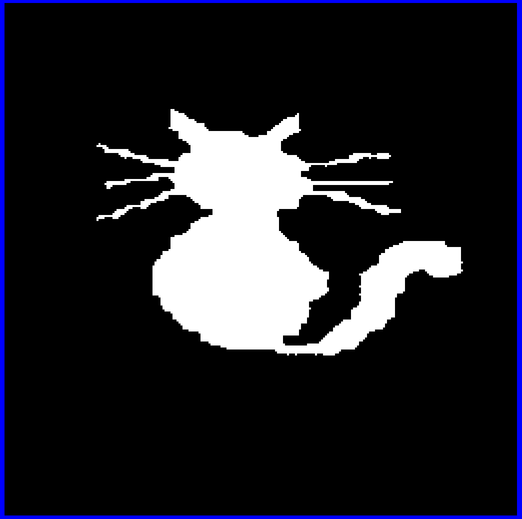
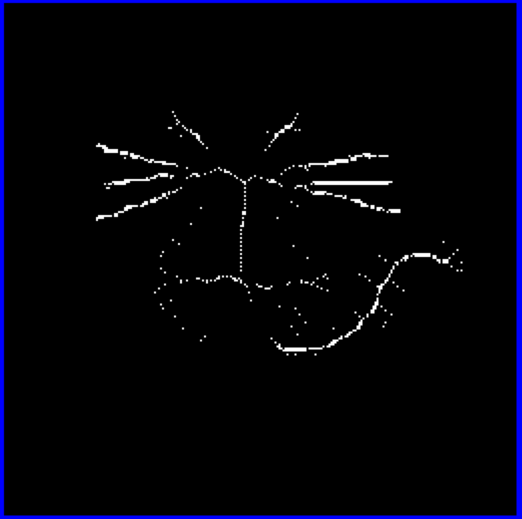


Image initiale

Fonction distance



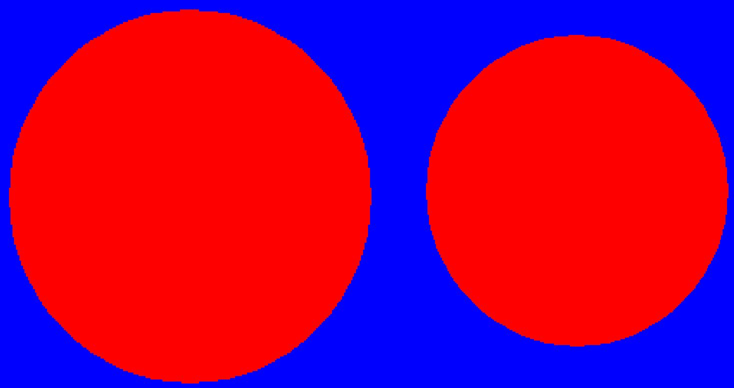
Chapeau Haut-de-Forme

Méthode très pratique pour obtenir des squelettes à partir de boules non élémentaires (dodécagones par exemple)

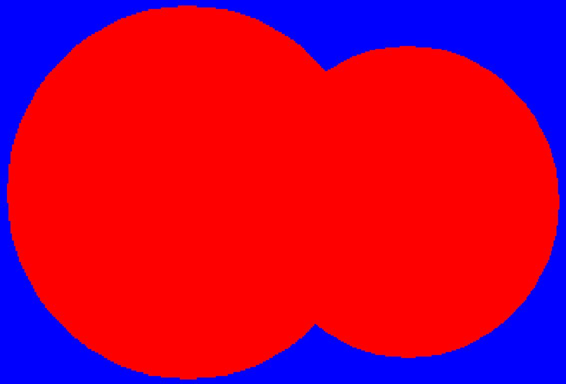
Le squelette comme descripteur de forme?

Le squelette par boules maximales n'est pas un bon descripteur de forme.

Généralement, on aime décrire une forme « compliquée » comme un assemblage de formes plus simples :



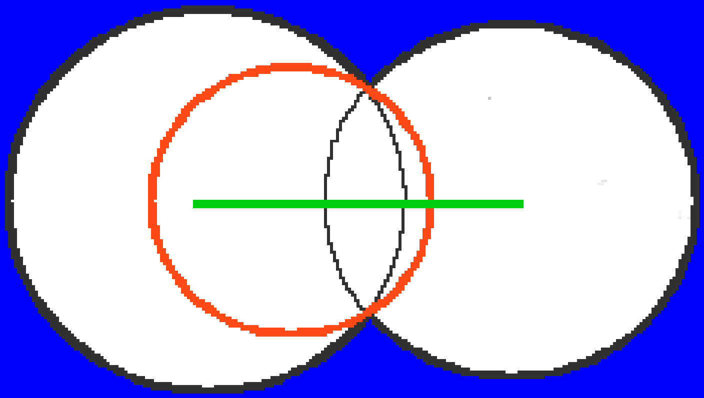
2 disques



Cette forme peut être décrite de la façon la plus simple qui soit comme l'union de deux disques

Le squelette comme descripteur de forme? (2)

Cependant le squelette de cette forme fait apparaître une <u>infinité</u> de nouveaux disques!



Le squelette n'est pas stable par rapport à l'union d'ensembles:

$$S(X \cup Y) \neq S(X) \cup S(Y)$$

Idée pernicieuse… (on sait qu'en toute rigueur ceci est faux , mais on reste persuadé que ce n'est pas <u>TROP</u> faux…)

Boules critiques, définition

La donnée des boules maximales (position et rayon) d'un ensemble X permet de reconstruire X, mais cet ensemble est redondant pour la reconstruction. La donnée des boules critiques suffit.

<u>Définition d'une boule critique</u>

Une boule maximale B d'un ensemble X est critique lorsqu'il n'existe aucune combinaison d'autres boules maximales qui recouvre B :

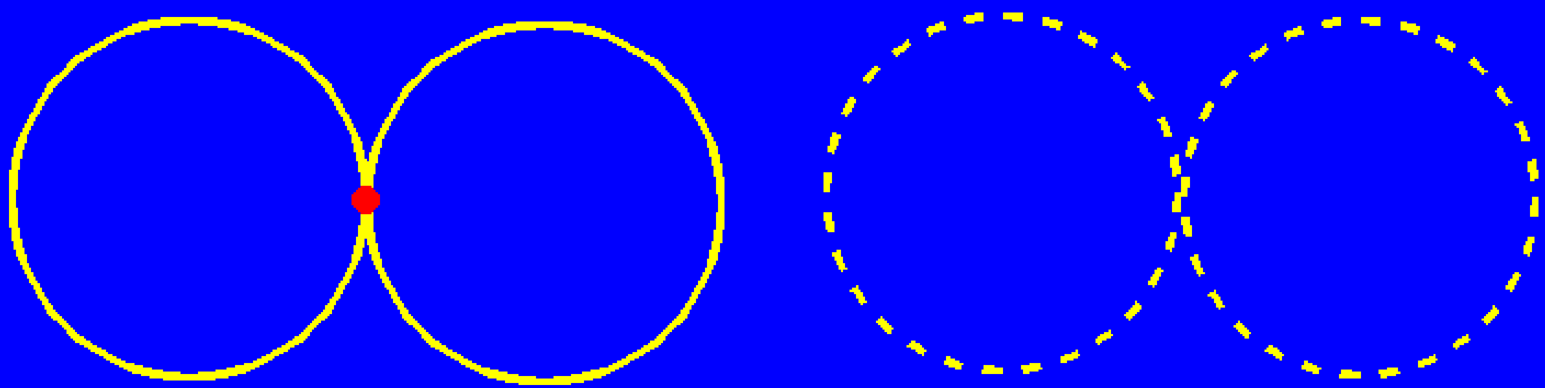
$$\nexists \{B_k\}, B_k \neq B : B \subset \bigcup_k B_k$$

Les boules critiques d'un ensemble sont suffisantes pour reconstruire l'ensemble

Squelette, petit rappel topologique

Le squelette est plus simple à manipuler lorsqu'on le définit sur des ensembles ouverts (avec des boules ouvertes)

→ Connexité du squelette



Pour les boules critiques, il semble bien que l'usage d 'ensembles fermés soit plus approprié

→ Boules critiques, boules fermés

Boules critiques, existence, unicité

- <u>Propriété (autre définition)</u>

Si B, boule critique de X, alors il existe au moins un point x de X qui n'est recouvert <u>que</u> par cette boule

[sinon, tous les points de B seraient recouverts par au moins une autre boule et B ne serait pas critique]

Les points de X recouverts de façon unique ont de fortes chances d'appartenir à la frontière de X

[d'où l'usage des fermés]

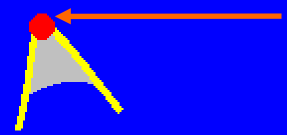
Boules critiques, existence, unicité (2)

- <u>Existence d'un ensemble de boules critiques</u>

Etant donné X, ensemble borné et fermé, existe-t-il un ensemble de boules critiques parmi les boules maximales de X?

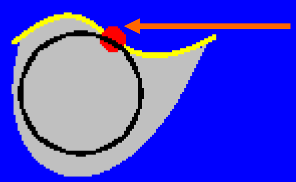
Analyse des points-frontière :

- Points aigus



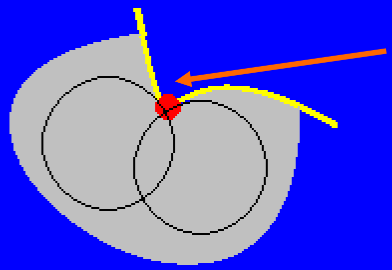
Point recouvert par une seule boule maximale (de rayon nul)

- Points « lisses »



Boule maximale, elle est forcément unique

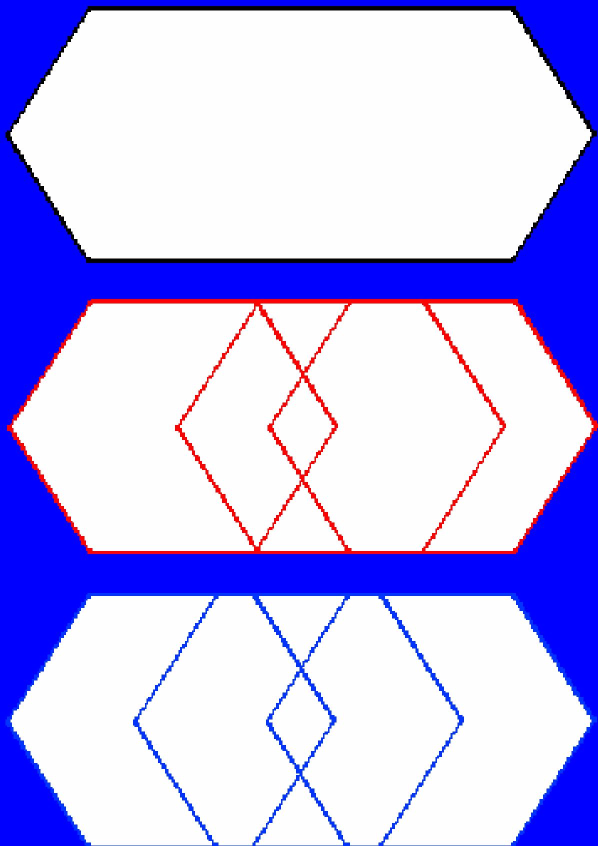
- Points obtus



Point recouvert par plusieurs boules maximales

- <u>Unicité de l'ensemble des boules critiques</u> (trivial)

Boules critiques, définition digitale et problèmes



Pas d'unicité à cause des « boules » de même taille

<u>Définition d'une boule critique dans le cas digital</u> :
Une boule maximale digitale B_i de taille i est critique s'il n'existe aucune combinaison de boules maximales B_j *de taille différente de i* qui recouvre B_i.

$$B_i \text{ critique} : \nexists\, J = \{ j_1, \ldots, j_n : j_k \neq i \} \text{ tel que } B_i \subset \bigcup_{j \in J} B_j$$

Quel usage pour les boules critiques?

- Ensemble critique

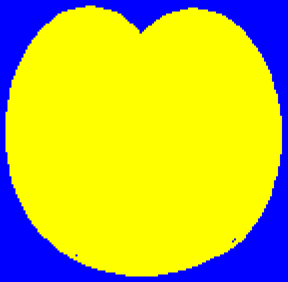
X (connexe) est critique si toutes ses boules maximales sont critiques

X convexe → X critique

X « lisse » (sans aspérités) → X critique

X critique ne signifie pas forme simple

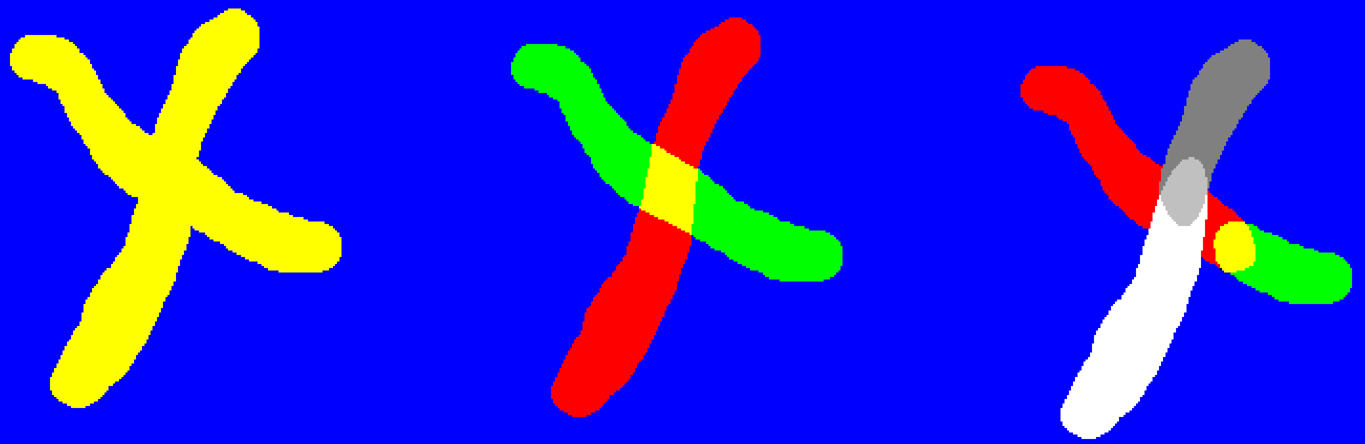
X critique ne signifie pas frontière sans angle rentrant



Quel usage pour les boules critiques?

- Assemblage d'ensembles critiques

- Partant d'ensembles critiques, on peut générer des ensembles non critiques par assemblage (union)



- On a naturellement tendance à vouloir décomposer le nouvel ensemble en ses composantes de départ.

- Il faut privilégier la minimalité des composantes connexes et la stabilité des boules critiques vis-à-vis de l'union

Quel usage pour les boules critiques?

- <u>Problème inverse</u>

-Etant donné un ensemble X, déterminer s'il est critique ou non (1er problème)

- S'il n'est pas critique, déterminer quel est l'assemblage minimal d'ensembles connexes critiques permettant de le « décrire » (2ème problème)

Si on appelle $S_c(X)$ le squelette critique de X (c'est-à-dire le lieu des centres des boules critiques), on a :

X non critique $$X = \bigcup_{i \in I} X_i \text{ , I minimal, } X_i \text{ critique}$$

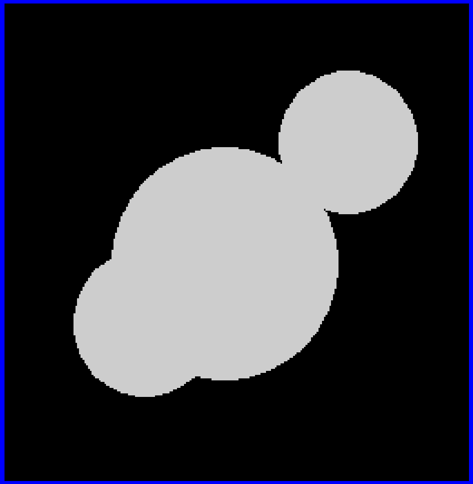
avec : $$S_c(X) = \bigcup_{i \in I} S_c(X_i)$$

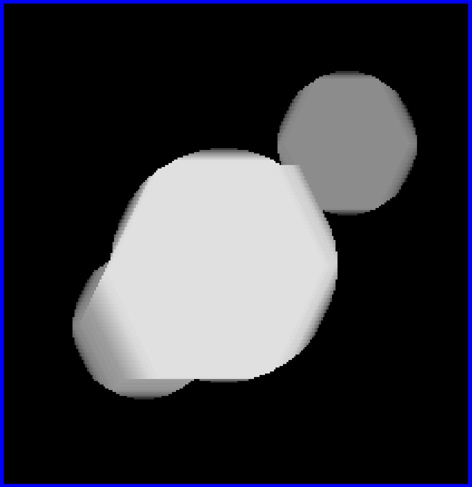
Les boules critiques en pratique

Ouvert ultime et fonction granulométrique

$$\theta = \operatorname*{Sup}_{i \in I}\left(\gamma_{i-1} - \gamma_i\right)$$

$$c = \arg\max\left(\gamma_{i-1} - \gamma_i\right)$$





La fonction granulométrique permet de trier les boules critiques. Associée à une autre fonction, on peut extraire les centres des boules critiques. Deux étapes :

- préservation des boules maximales non recouvertes par des boules plus grandes
- Préservation des boules maximales non recouvertes par des boules plus petites

Ouvert ultime et fonction d'étanchéité

La fonction granulométrique laisse apparentes les boules maximales qui ne sont pas totalement recouvertes par des boules de plus grande taille.

La fonction d'étanchéité du squelette peut être utilisée pour construire la fonction granulométrique:

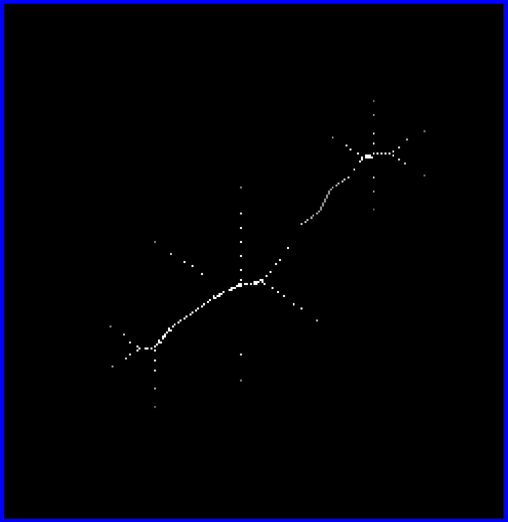
$$X_i = \{x : q(x) = i\}$$

k_{X_i}, indicatrice valuée de X_i:

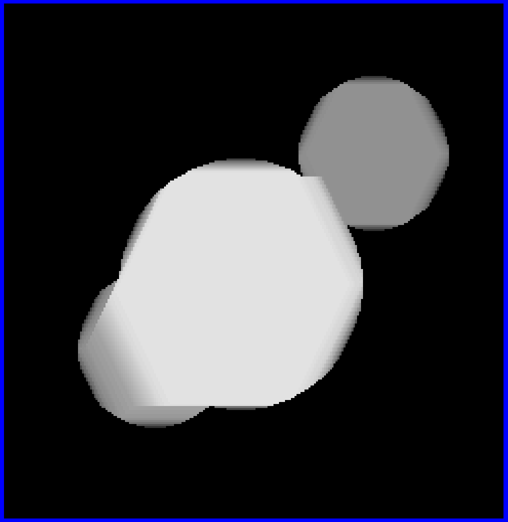
$$k_{X_i}(x) = i \text{ si } x \in X_i$$

$$k_{X_i}(x) = 0 \text{ sinon}$$

$$c = \sup_i \left(\delta_i \left(k_{X_i}\right)\right)$$



q, fonction d'étanchéité



c, fonction granulométrique

Ouvert ultime et fonction duale

On peut définir une fonction « duale » c' à partir de l'indicatrice « duale » k'_{X_i}:

$$k'_{X_i}(x) = i \quad \text{si } x \in X_i \; ; k'_{X_i}(x) = +\infty \quad \text{sinon}$$

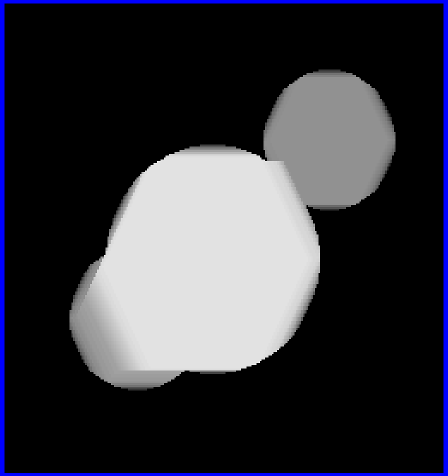
Cette fonction laisse apparentes les boules maximales qui ne sont pas totalement recouvertes par des boules de plus petite taille:

$$c' = \inf_i \left(\varepsilon_i \left(k'_{X_i} \right) \right)$$

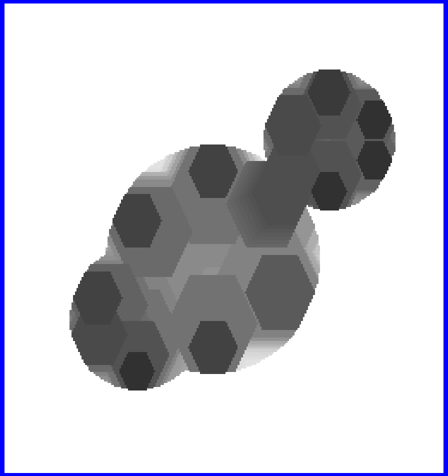
Les points de X recouverts par des boules qui ne sont pas elles-mêmes recouvertes par des boules de taille plus grandes ou plus petites sont donc recouverts uniquement par des boules critiques

Extraction du squelette critique

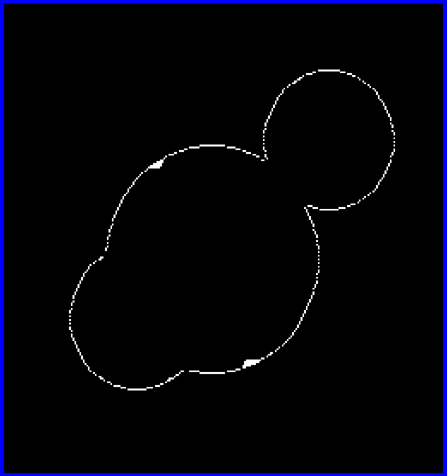
Les points x de X recouverts par des boules critiques sont tels que $c(x) = c'(x)$. On définit $e = c = c'$ quand $c = c'$.



c



c’



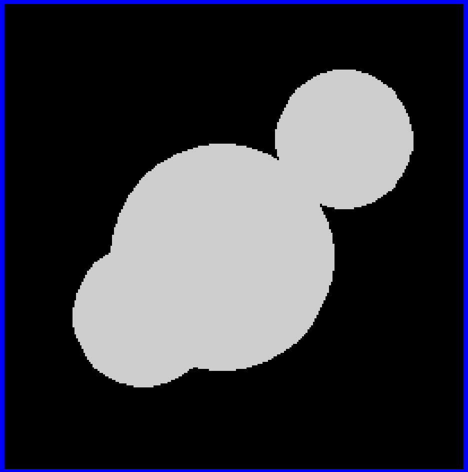
Points de $e \neq 0$

Les centres s’obtiennent en considérant les ensembles Z_i et Y_i:

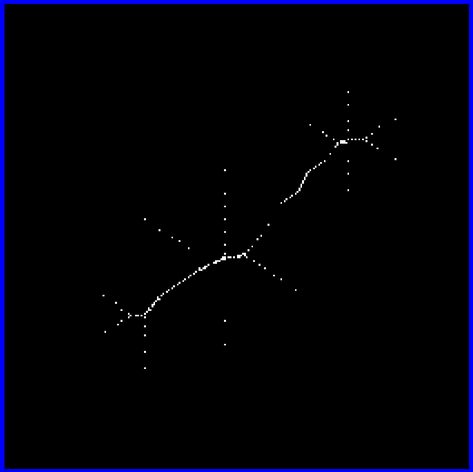
$$Z_i = \{x : q(x) = i\} \quad \text{et} \quad Y_i = \{y : e(y) = i\}$$

L’intersection $Z_i \cap \delta_i(Y_i)$ fournit les centres des boules critiques de taille i

Squelettes critiques digitaux

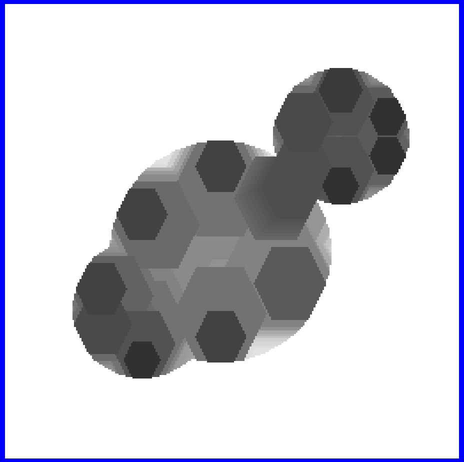


Ensemble initial

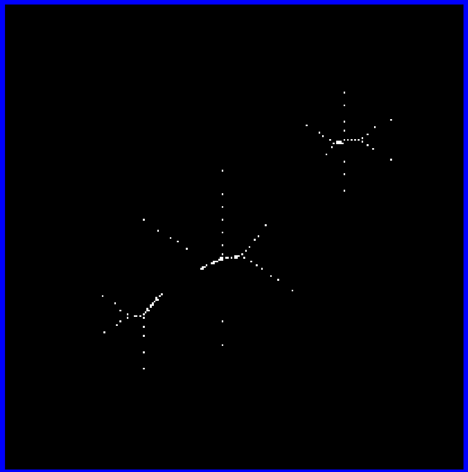


Extinction du squelette

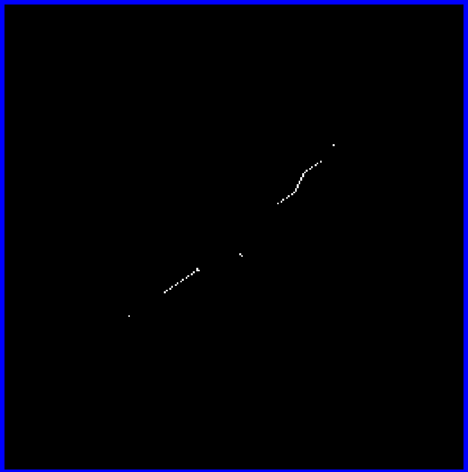
Fonction granulométrique



Fonction « duale »

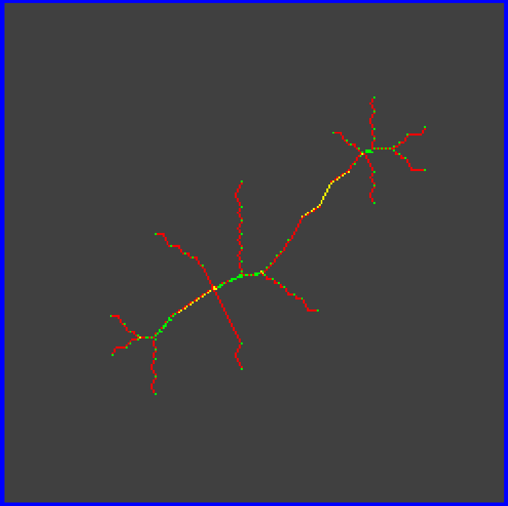


Centres des boules critiques



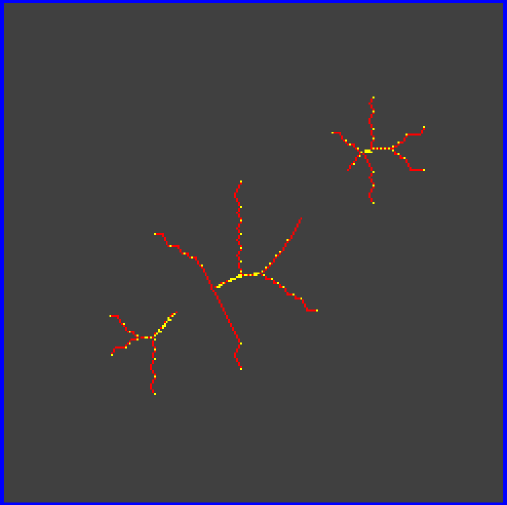
Centres non critiques

Squelettes critiques connexes

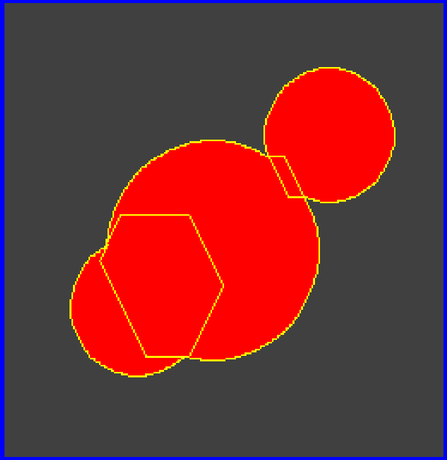


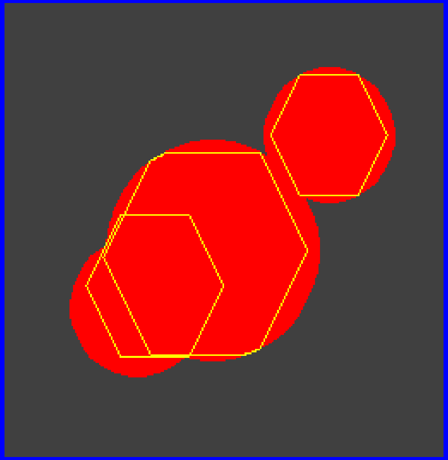
Le squelette par boules maximales peut être connecté (par amincissement géodésique)

- En vert, squelette critique S_c
- En jaune, centre des boules non critiques
- En rouge, jonctions



Squelette critique connexe



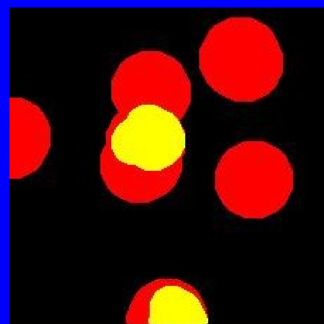


Ensembles critiques (à gauche) et plus grande boule contenue dans chacun d'eux (à droite)

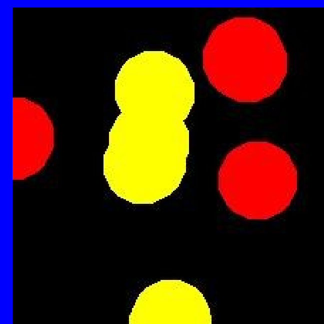
Usage des boules critiques

Utilisation des boules critiques pour améliorer la définition des marqueurs dans la segmentation de roches en tas.

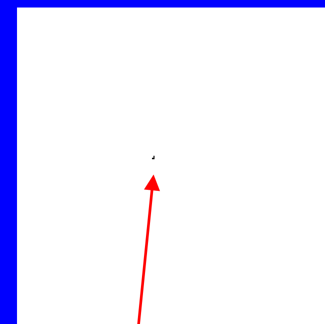
Image originale



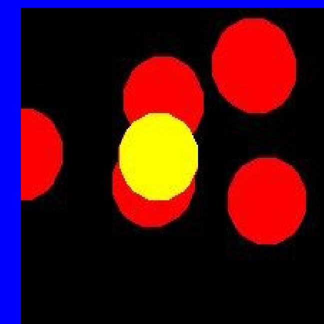
Marqueur initial



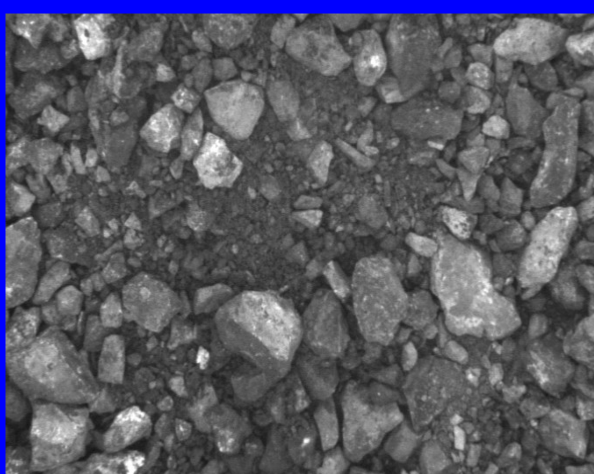
Reconstruction

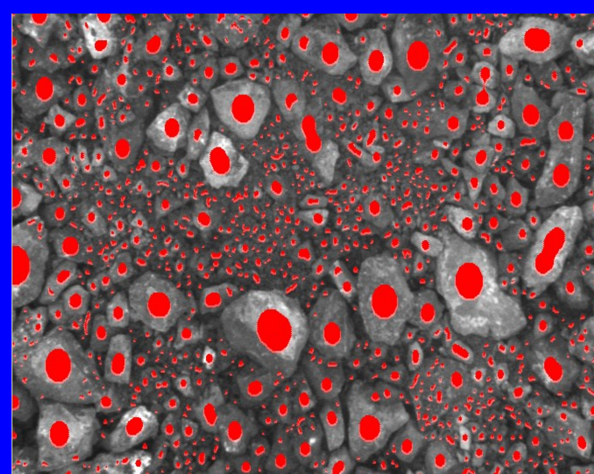


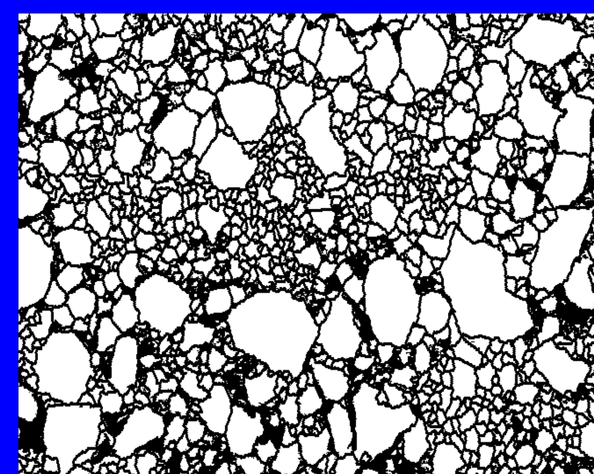
Centre de Boule critique



Marqueur final (boule critique)

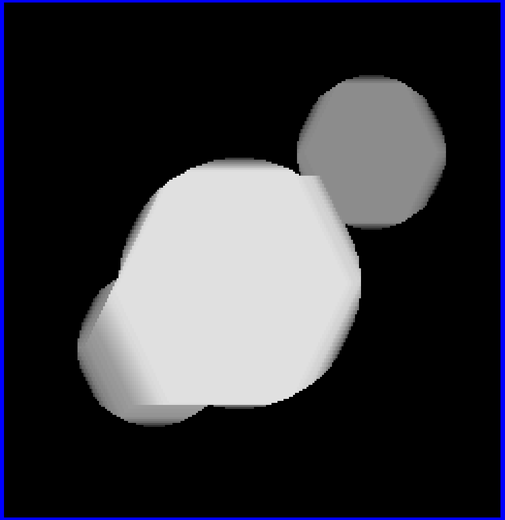


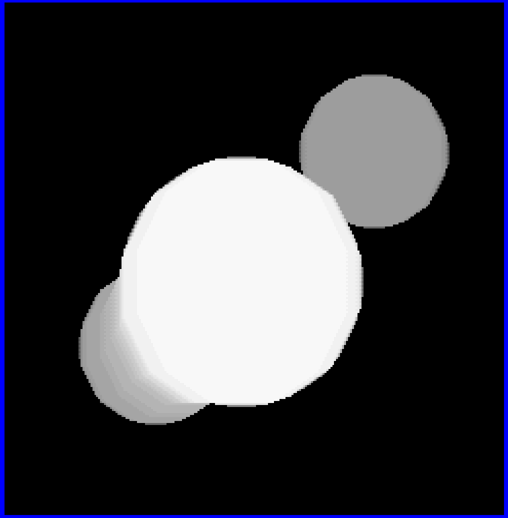




Travaux actuels

- Boules critiques dodécagonales





- Filtrages sur les boules critiques (boules non critiques isolées)
- Analyse fine des frontières (sectionnement)
- Notion d'ensemble « super-critique » (X super-critique si tous ses ouverts sont critiques)
- Extension aux images de gris (par le biais du squelette par cylindres maximaux significatifs)