Chapitre XXIV Ensembles booléens

E.F.A. booléens ; Fonctionnelle caractéristique

Divisibilité infinie

Grains primaires convexes et semi-markovisation

Tests du modèle booléen

Stéréologie : relations nucléation-croissance

Modèle booléen à trois phases

Usage heuristique : dénombrements

Notations et Rappels

- ***Opérations de Minkowski***

$\mathbf{B_a}$ désigne le ***translaté*** de l'ensemble B au point a (*i.e.* selon le vecteur a).

- L'***érodé*** $\mathbf{X \ominus B}$ de X selon B est le lieu des a tels que $\mathbf{B_a \subseteq X}$.
- L'équivalence

$$\mathbf{X \subseteq Y \ominus B} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{X \oplus B \subseteq Y} \qquad \mathbf{X, Y \in E} .$$

définit le ***dilaté*** $\mathbf{X \oplus B}$ de X, d'expression analytique

$$\mathbf{X \oplus B = \cup \{ x + b,\ x \in X,\ b \in B \}}$$

- et l'on a, par dualité pour le complément

$$[\, \mathbf{X \ominus B} \,]^c = \mathbf{X \oplus} \mathrm{B} = \{ \mathbf{a} : \mathrm{B}_{\mathbf{a}} \cap \mathbf{X} \neq \varnothing \}$$

où $\mathrm{B} = \{ y : - y \in B \}$.

- ***L'espérance mathématique*** d'une intégrale stochastique se note en la soulignant, *i.e.*

$$\textbf{Espérance (Mes X)} = \underline{\textbf{Mes}}\ \textbf{X}$$

Construction de fermés booléens

- ***Fermé aléatoire booléen (G. Matheron)***
  - ***Considérons, dans R^n***

  - une réalisation de points poissonniens I d 'intensité θ (*les germes);*

  - un ensemble aléatoire p.s. compact X ' (*le grain primaire*) germé à l'origine.

  - ***Affectons***

  - à chaque point $i \in I$, une réalisation distincte $(X')_i$ du grain primaire translaté en i.

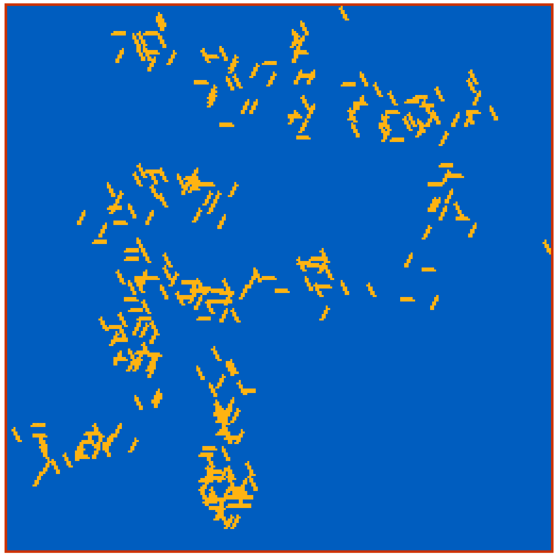
La réunion $\mathbf{X = \cup \{(X')_i , i \in I \}}$

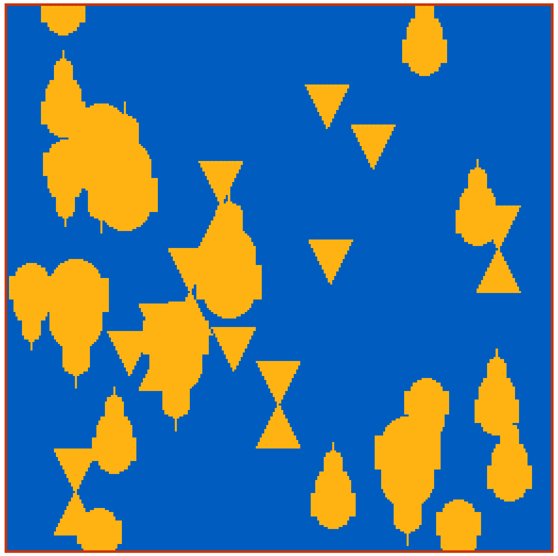
définit alors une réalisation du **fermé aléatoire booléen** de paramètres

$$(\theta, X')$$

Exemples de fermés booléens (I)

Simulations de fermés booléens





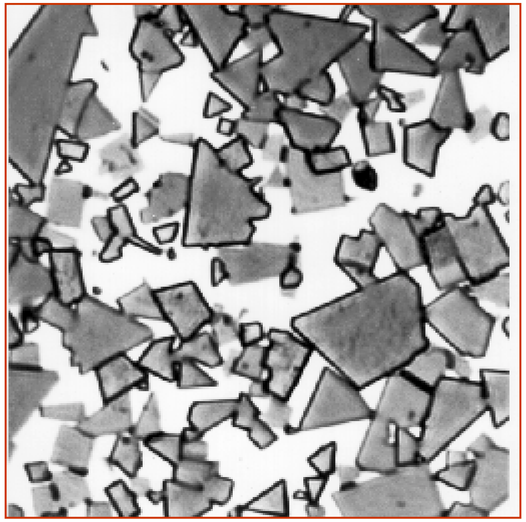
a) isotrope et stationnaire;

b) densité régionalisée;

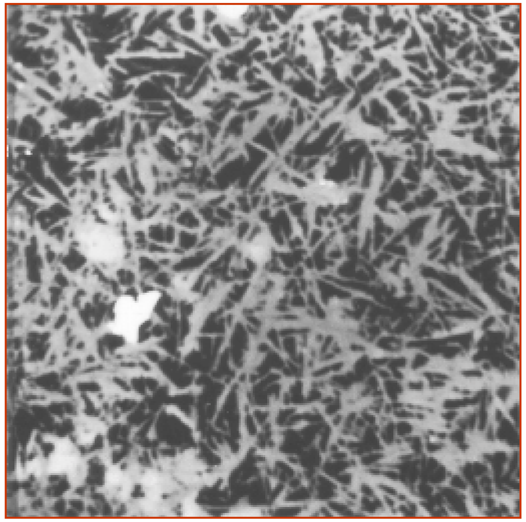
c) anisotrope et partiellement convexe.

Exemples de fermés booléens (II)

- *Objets naturels se modélisant par des fermés booléens*



a) carbure de tungstène



c) cristaux de ferrite

b) Futaie de Fontainebleau

Fonctionnelle caractéristique Q(B), (I)

- ***Porosité q (i.e. Prob. que le point a appartienne aux « pores » X^c)***

Considérons un point arbitraire a. Désignons par $\eta(a)$ la probabilité que le point a soit dans X ’, et cherchons la probabilité que a ne soit pas dans X. La contribution de l ’élément dz à cet événement s ’exprime sous forme de deux éventualités exclusives:

- aucun germe en dz: *Prob.* $1 - \theta(dz)$
- un germe, mais le grain X'_i n’atteint pas a *Prob.* $\theta(dz)[1 - \eta(a-z)]$.

Par composition de ces deux probabilités, puis intégration de z en R^n on trouve pour la porosité q

$$\mathbf{q = Q(a) = Prob.\{a \in X^c\} = exp.\left[-\theta \int_{R^n} \eta(a-z)\, dz\right] = exp\{ - \theta\, \underline{Mes}\, X'\}}$$

Fonctionnelle caractéristique Q(B), (II)

- *Cas général*

  Plus généralement, si B_a désigne un compact centré en a, alors

$$B_a \subseteq X^c \quad \Leftrightarrow \quad a \in X^c \ominus B \quad \Leftrightarrow \quad a \in (X \oplus B)^c = \cup \{ X'_i \oplus B, i \in I \}^c$$

  Ainsi, B_a est inclus dans les pores de du fermé booléen X ssi le point a appartient aux pores de l 'ensemble booléen de grain primaire $X' \oplus B$, soit d 'après ce qui précède:

$$Q(B) = \text{Prob.} \{ B \subseteq X^c \} = \exp. \{ - \theta \, \underline{\text{Mes}} \, (X' \oplus B) \} \qquad (1)$$

- Selon le ***théorème de Matheron-Kendall,*** tout fermé aléatoire est caractérisé par les Q (B) quand B décrit la classe des compacts. Ici, la relation (1) décrit donc complètement X, et montre qu'il est **stationnaire**.

Quelques Q(B) particuliers

- ***Covariance C_o des pores***

Lorsque B = {a , a + h } est un doublet, il vient

$$\underline{\mathrm{Mes}}\ (X' \oplus B) = 2\ \underline{\mathrm{Mes}}\ X' - \underline{\mathrm{Mes}}\ (X' \cap X'_h) = 2K(o) - K(h)$$

où K(h) est le **covariogramme géométrique** du fermé aléatoire X ’ d ’où

$$C_0(h) = Q(B) = \exp\{ -\theta\, [2K(o) - K(h)] \}$$

- ***Surface spécifique s_q dans R^3 (par exemple)***

Si s’ et v’ désignent les surface et volume moyens de X’ alors, par application de la formule de Crofton au résultat précédent, on obtient

$$s_q = \theta.s'.\exp\{ -\theta v'\} = q.\ \theta.s'$$

- ***Loi du premier point de contact (dans R^n)***

Soit R la distance d’un point y des pores à une réalisation de E.F.A. X, et soit B_r la boule de rayon r. La fonction de distribution de la v.a. R vaut alors:

$$1 - F(r) = Q(B_r) / q$$

Propriétés ensemblistes

- L 'E.F.A. booléen X est ***stable pour la réunion et la dilatation***

  X_1 , X_2 booléens $\Rightarrow$ $\mathbf{X_1 \cup X_2}$ booléen ;

  X booléen , A compact $\Rightarrow$ $\mathbf{X_1 \oplus A}$ booléen.

- X est ***stable pour le sectionnement***

  Π_ω plan normal à ω $\Rightarrow$ $\mathbf{X \cap \Pi_\omega}$

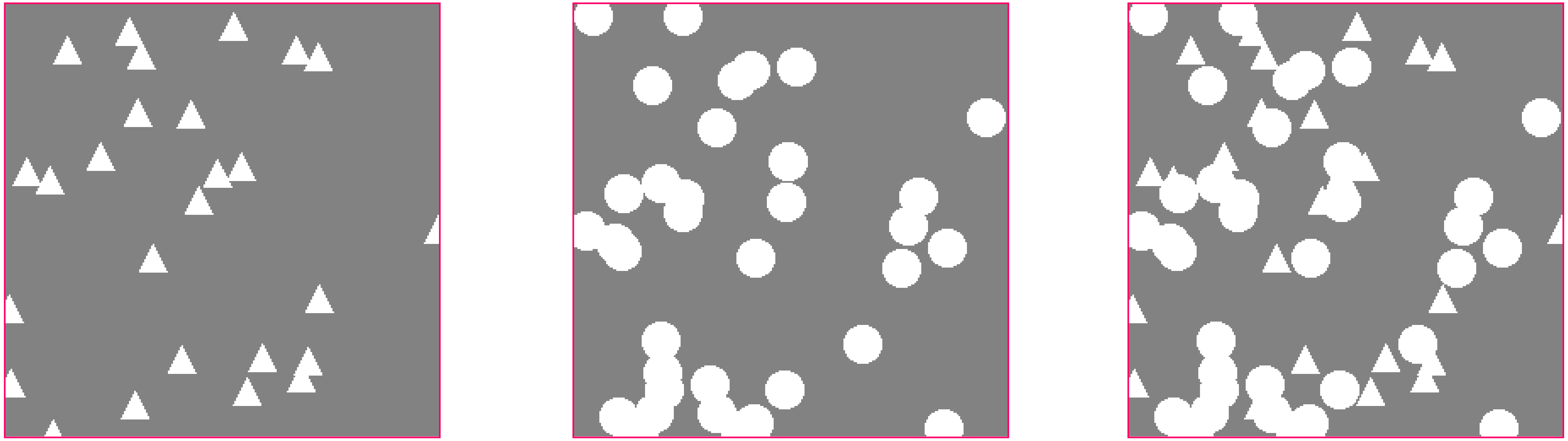
  $X \subseteq R^3$ booléen booléens

  Δ_ω droite de dir. ω $\Rightarrow$ $\mathbf{X \cap \Delta_\omega}$

- Les ***sections épaisses*** sont ***booléennes***

- X est ***indéfiniment divisible*** pour la réunion

Exemple de stabilité pour la réunion



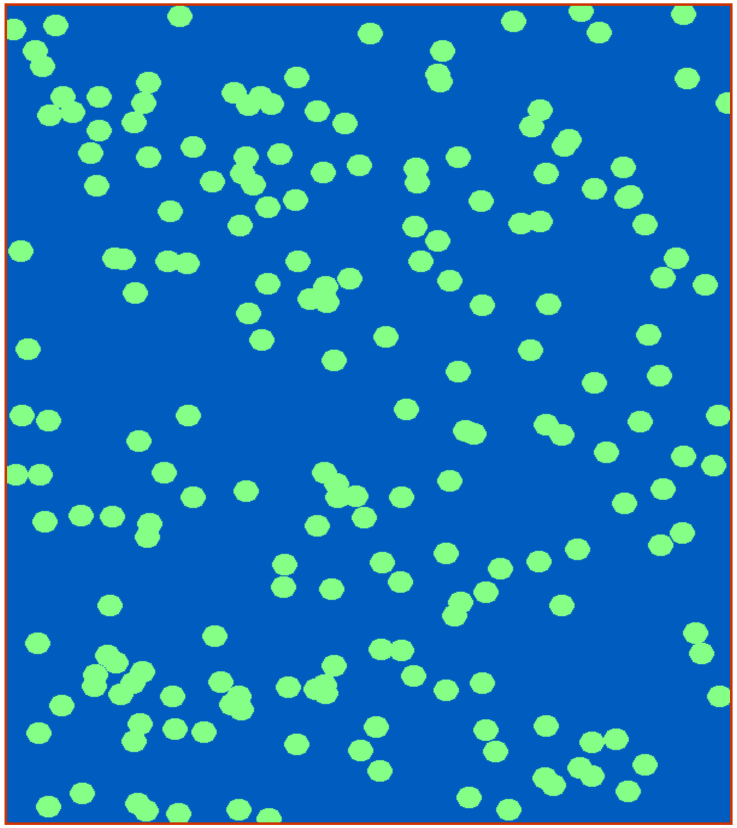
a) *b)* *c)*

- ***a)*** réalisation de triangles booléens $\theta_1 = 25$; **<u>Mes</u> X$_1$'** $= 150$
- ***b)*** réalisation de disques booléens $\theta_2 = 35$; **<u>Mes</u> X$_2$'** $= 420$
- ***c)*** réunion de ***a)*** et ***b)*** , *i.e.* fermé booléen

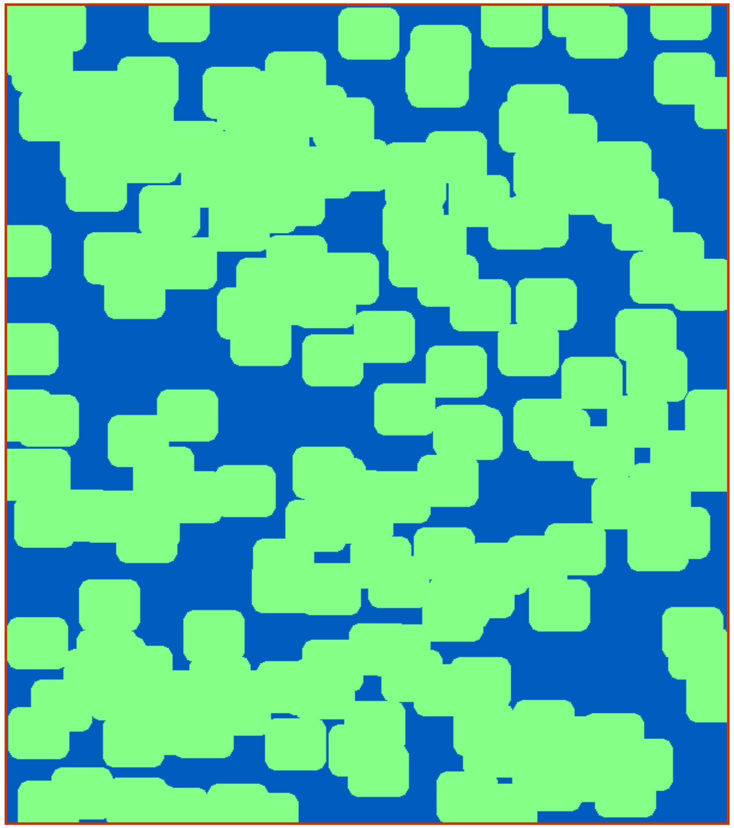
$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = 60 \ ; \ \underline{\mathrm{Mes}}\ X' = [\ \theta_1\ \underline{\mathrm{Mes}}\ X_1' + \theta_2\ \underline{\mathrm{Mes}}\ X_2'\ ] / \theta = 307.5$$

Exemple de stabilité pour la dilation

a)



b)



Le dilaté b) de l'ensemble booléen a) par une forme quelconque (ici un carré de taille 15) est encore booléen .

E.F.A. indéfiniment divisibles (I)

- ***E.F.A. indépendants:***

Deux E.F.A. X et X ', de fonctionnelles caractéristiques Q et Q 'sont dits **indépendants** quand

$$\mathbf{Prob.}\ \{ B \subseteq X\ ;\ B' \subseteq X' \} = Q(B)\ .\ Q(B') \qquad B, B' \in \mathcal{K}$$

- ***Divisibilité indéfinie (pour la réunion):***

Un E.F.A. X est dit **indéfiniment divisible** quand pour tout entier n, X est égal à la réunion de n E.F.A. indépendants et équivalents entre eux:

$$\forall\, n \geq 0 \ : \quad X = \cup \{ X_j\ ;\ j \in [1,n] \}$$

- ***Théorème (G. Matheron)*** : Un E.F.A. X , de fonctionnelle Q est sans point fixe, et indéfiniment divisible si et seulement si

$$Q(B) = \exp\{ -\Psi \} \qquad (2)$$

pour une capacité de Choquet Ψ telle que $\Psi(\emptyset) = 0$; $\Psi(B) < \infty$, $B \in \mathcal{K}$

E.F.A. indéfiniment divisibles (II)

- D ’après le théorème de Matheron, les fermés booléens sont indéfiniment divisibles.
- Ainsi, on peut remplacer l’exemple du mélange de disques et de triangles par la réunion de 10 fermés de densités 2.5 (triangles), et 3.5 (disques) et de même grain primaire
- Toutefois, la propriété ne caractérise pas les fermés booléens. En effet, les variétés poissonniennes, et aussi les trajectoires browniennes vérifient elles aussi l ’équation (2) .

Théorème de limite centrale

- Soit $\{ Z_j \,;\, j \in J \}$ une famille de partitions aléatoires de R^n , stationnaires et ergodiques. Construisons l ' E.F.A. Y_j en gardant ou non chaque classe Z_j avec la probabilité p, indépendamment des autres, puis en prenant la fermeture de leur réunion. Posons :

$$\mathbf{X_k = \cup \{ Y_j \,;\, j \leq k \}.}$$

- Quand $k \to \infty$ et $p \to 0$, de sorte que $k.p \to \theta$, avec $0 < \theta < \infty$, il vient

$$\mathbf{Lim}_{k\to\infty}\ \mathbf{Q_j (B) = \exp\{ - \theta\, E[N_j (B)] \}}$$

où N_j (B) est le nombre de classes de $Z_j \cap$ B. D 'après le théorème de Matheron-Kendall, l' **E.F.A. limite X_∞ existe; il est unique et booléen**.

- Ainsi, l 'E.F.A. booléen joue, pour les ensembles et la réunion, un rôle semblable à la loi de Gauss pour les nombres et l'addition. Ils possèdent donc l'un comme l'autre, des **domaines d'attraction**.

Grains primaires convexes (I)

Quand le grain primaire X ’ est p.s. convexe, la formule de Steiner permet d ’exprimer la fonctionnelle Q(B). En particulier,

- *Dans R^3 ,*

  v ’, s ’, d ’ désignant les volume, surface, et diamètre moyens de X ’, et

  v, s et d les valeurs correspondantes pour le compact B_ω, d ’orientation ω il vient pour la moyenne de $Q(\lambda B_\omega)$ selon les rotations

$$Q(\lambda B) = \exp\{ -\theta [\lambda^3 v + \pi \lambda^2 s d' + \pi\lambda d s' + v'] \}.$$

On en déduit lorsque B est

- un ***segment*** de longueur λ : $Q(\lambda) = \exp\{ -\theta [\lambda/4 s' + v'] \}$;
- un ***disque*** de rayon λ : $Q(\lambda) = \exp\{ -\theta [\pi \lambda^2 d' + \pi/4 \lambda s' + v'] \}$.

Grains primaires convexes (II)

- ***Dans R^2 ,***

  a' et u' désignant l'aire et le périmètre moyens de X ', et

  a et u les valeurs correspondantes pour le compact λB_α, d 'orientation α, il vient pour la moyenne de $Q(\lambda B_\alpha)$ selon les rotations

$$\mathbf{Q\ (\lambda B) = exp\{ -\theta\ [\ \lambda^2\ a + \lambda\ u\ u' / \ 2\pi\ +\ a'\ ]\ \},}$$

et en particulier

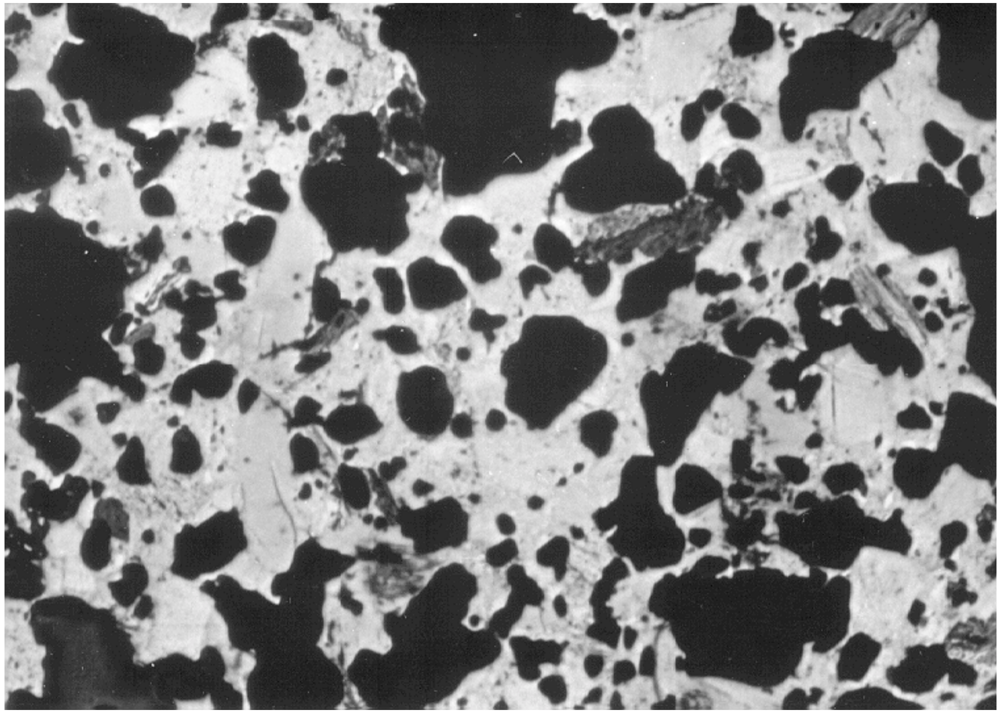
$\mathbf{Q\ (\lambda\ B_\alpha\ )\ = exp\ \{ -\theta\ [\ \lambda\ d'_\alpha\ +\ a'\ ]\ \}}$ *pour un* ***segment*** *de longueur* λ

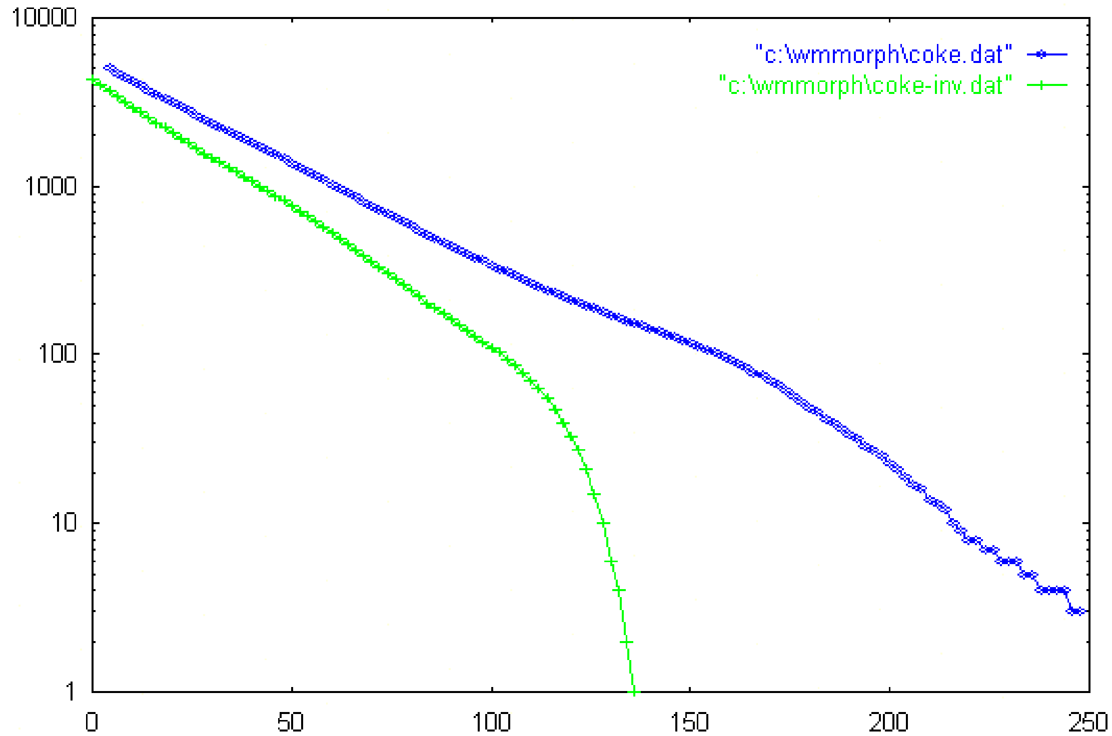
$\mathbf{Q\ (\lambda B) = exp\{ -\theta\ [\ \lambda\ u' / \ \pi\ +\ a'\ ]\ \}}$ *pour un* ***segment*** *de longueur* λ

$\mathbf{Q\ (\lambda B) = exp\{ -\theta\ [\ \lambda^2\ \pi\ + \lambda\ u' +\ a'\ ]\ \}}$ *pour un* ***disque*** *de rayon* λ *.*

- Ces relations permettent de **tester le modèle**, et aussi d'atteindre, par comparaison avec les relations similaires dans R^3, des fonctionnelles **tridimensionnelles** de X' à partir de mesures planes

Exemple des cokes moulés (I)





a) section polie de coke moulé (pores en noir); Les pores (en noir) jouent le rôle de « grains » au sens booléen .

b) courbes des proportions de :
- *la phase claire (en haut)*
- *la phase sombre (en bas),*

après érosions par des segments de direction horizontale α (semi-Log×10 ^{3}) .

Exemple des cokes moulés (II)

- D ’après ***b)***, les ***pores*** sont les grains booléens et d’après ***c)***

$\theta a' = -\text{Log}\ 0{,}573 = 0{,}556$

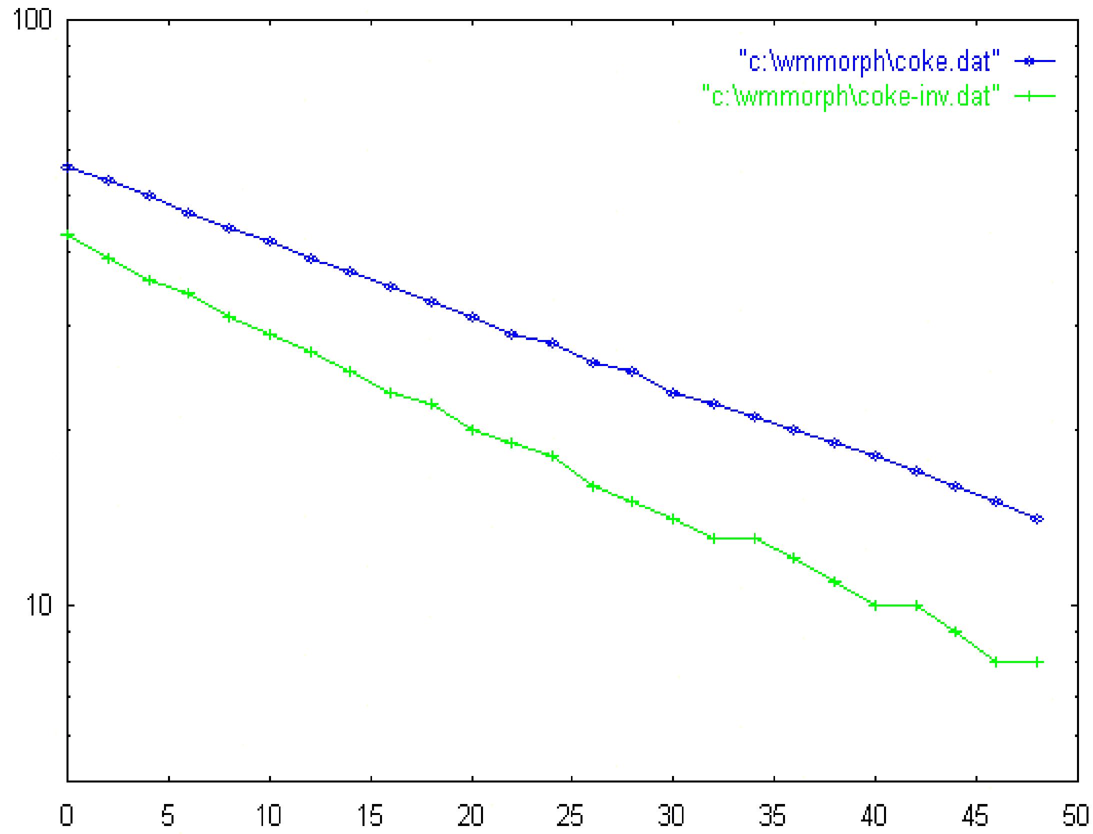
et $\theta d'_{\alpha} = 26{,}0.\ 10^{-3}$

Comme de plus, il s’agit de section plane d ’un matériau booléen isotrope de R^3, on a (cf Ch XXI-10 et planche 25 ci-dessous)

$\theta_3 v' = \theta a' = 0{,}556$

$\theta_3 s' = (4/\pi)\ \theta u' = \theta d'_{\alpha} = 98\ .\ 10^{-3}$

- En revanche, on ne peut pas ici séparer **θ_3 , s'** et **v'.**



c) Début des courbes d’érosion P(l), en semi-Log × 100, avec:

$P(o) = \theta a'$ et $P'(0) = \theta d'_{\alpha}$

E.F.A. semi - markoviens (I)

- ***Séparation***

Etant donnés les compacts A A ' et C, C sépare A de A ' quand

$$x \in A,\ x' \in A' \Rightarrow [x, x'] \cap C \neq \emptyset$$

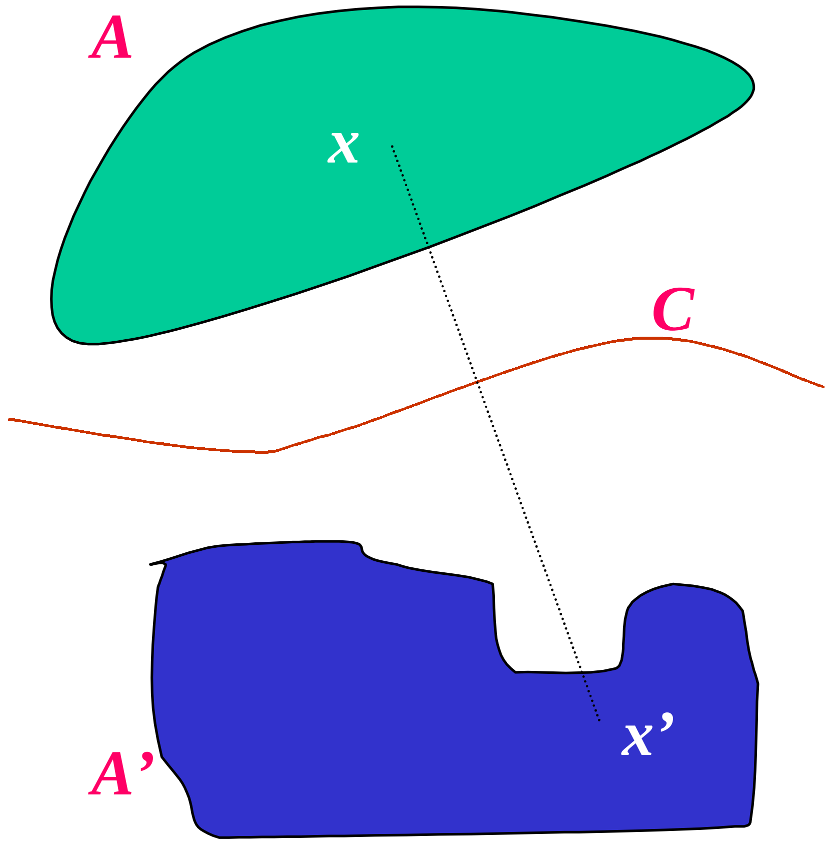
- ***Propriété semi-markovienne***

Un E.F.A. est semi-markovien quand pour tout triplet A, A', C $\in \mathcal{K}$

{ X ∩ C = ∅} et {C sépare A de A'}

impliquent

{ X ∩ A indépendant de X ∩ A' }



E.F.A. semi - markoviens (II)

La semi-markovisation est gouvernée par deux théorèmes dus à G. Matheron

- 1) un E.F.A. est semi- markovien si et seulement si

$$\mathbf{Q (A \cup A') . Q (A \cap A') = Q (A) . Q (A')}$$

pour tout couple de compacts convexes dont la réunion reste convexe.

Exemple : Tout ensemble booléen à grain primaire p.s. convexe

- 2) un E.F.A. ***stationnaire*** X est ***indéfiniment divisible*** et ***semi- markovien***

ssi X équivaut à la réunion de n E.F.A. stationnaires X_1 .. X_n tels que
  - X_1 est booléen à grain primaire convexe ;
  - X_2 .. X_n sont des réunions de cylindres à bases booléennes dans R^{n-1}.. R^1 respectivement, à grains primaires convexes..

(*E.F.A qui tous dérivent des **hyperplans poissonniens** et des **fermés booléens***)

Granulométries linéaires

L ’hypothèse semi-markovienne permet d’exprimer facilement les granulométries des **pores**, et aussi des **grains**, de l ’E.F.A.

- ***Pores***

Prenons, sur une droite de direction α, deux segments jointifs h_1 et h_2 séparés par le point x. Si x est dans les pores, *i.e.* $x \in X^c$, les deux événements «*h_1 est dans les pores* » et «*h_2 est dans les pores* » sont indépendants, donc

$$\frac{Q(h_1 + h_2)}{Q(h_2)} = \frac{Q(h_1)}{q}$$

il en résulte que **$Q(h) = q \exp\{-\mu h\}$** , avec $\mu q = P'(0) = C'(0)$ (ce qui généralise le cas booléen)

- ***Grains***

On montre de manière similaire que la probabilité P(h) que le segment h soit dans les grains, se déduit de la covariance C(h) par l’équation

$$q\,(C' - P') = C' * P'$$

Comment tester un E.F.A. booléen ?

- ***Test de base***

C 'est surtout le cas convexe (de loin le plus fréquent) qui se prête aux meilleurs tests, tous construits sur la **formule de Steiner**. En prenant pour A diverses formes telles que segments, hexagones, cubes, etc..on établit:

- plusieurs fonctions **LogQ(A)** à ajuster à des droites, des paraboles, etc..
- Ainsi que , si les ajustements sont vérifiés, des estimations

  dans R^2 **,** de **θa', θu'** et de θ ;

  dans R^3 **,** de **θv', θs'** et **θd '** à partir d 'éléments structurants plans ;

  et de θ lui-même si l'on peut réaliser des érosions 3D

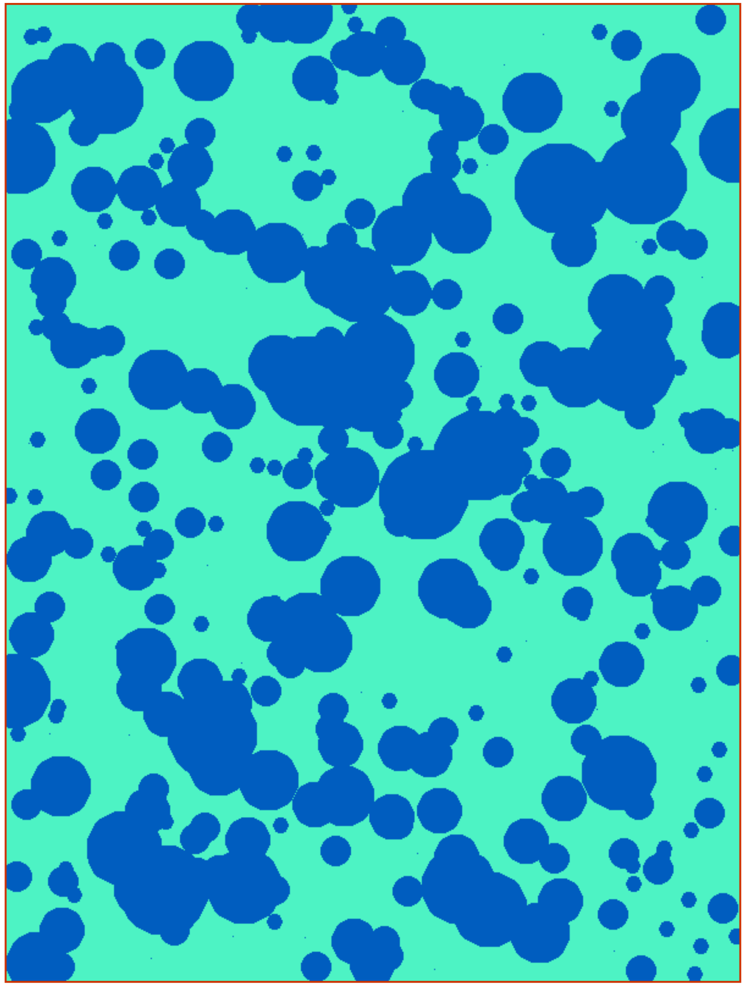
(N.B. ces tests portent à la fois l'hypothèse booléenne et la convexité de X') .

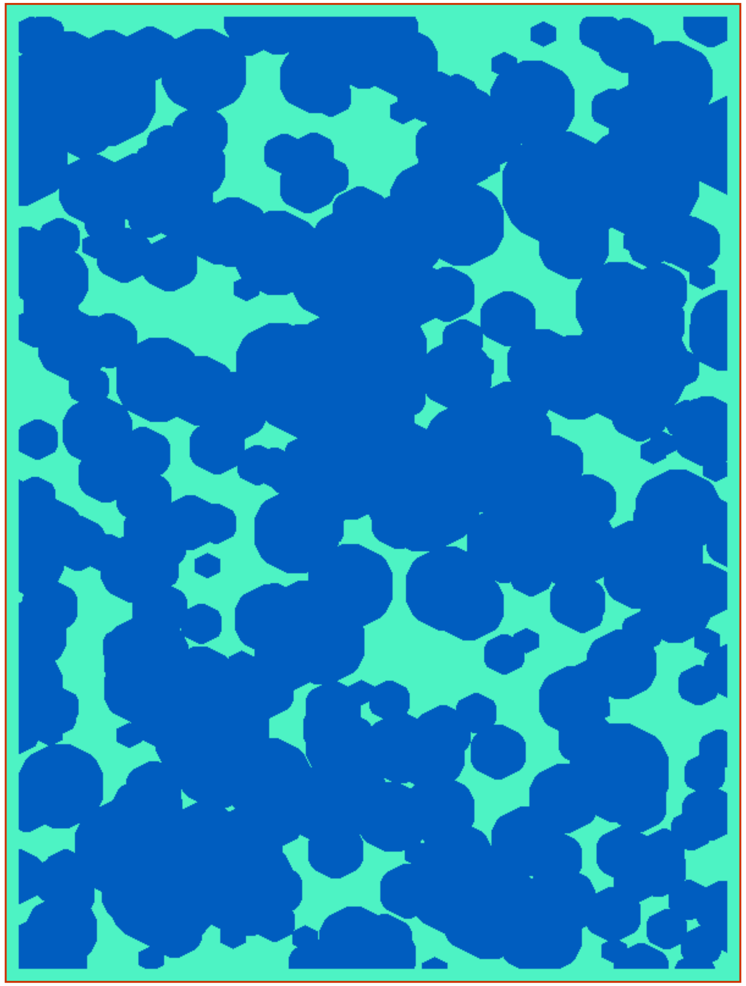
- ***Autres tests***
  - Variance de X'(ne suppose pas la convexité) ; divisibilité infinie
  - formes particulières pour X' (boules, polyhèdres poissonniens, etc..)

Test d'une simulation booléenne (I)

On peut concevoir des tests plus ou moins sophistiqués (ajustements de courbes)
Celui qui suit se fonde simplement sur la porosité et le nombre d'intercepts.

a)
Simulation





b)
Simulation dilatée

Test d'une simulation booléenne (II)

- ***Données de la simulation X***

1/ aire du champ = $\|Z\|$ = 800 x 600

2/ grain primaire moyen X' :

- aire X' = $\|X'\|$ = a' = 622
- diamètre vertical X' = d' = 24, 9

3/ nombre moyen de germes: 400

- ***Paramètres à estimer***

θ = 4 / 4800 = **8,33 . 10 $^{-4}$**

$\theta a'$ = 8,33 x 0,0622 = **0, 518**

$\theta d'$ = 24, 9 x 8,33 .10 $^{-4}$

= **2072 . 10 $^{-5}$**

- ***Valeurs mesurées dans Z***

1/ aire des pores $\|X^c \cap Z\|$ = 273 191

2/ variation diamétrale horizontale de $X \cap Z$ = diam$\{X \cap Z\}$ = 5635

- ***Paramètres estimés***

$(\theta a')^*$ = ln (1/q*) = ln ($\|Z\|$ / $\|X^c \cap Z\|$)

= ln 480 000 - ln 273 191

= **0, 564**

$(\theta d')^*$ = diam$\{X \cap Z\}$ / $\|X^c \cap Z\|$

= 5635 / 273 191 = **1953 . 10 $^{-5}$**

Test d'une simulation booléenne (III)

- ***Principe de l'estimation de θ :***

La simulation dilatée par un hexagone H de taille 10 (donc de diamètre vertical = 21) est à son tour un EFA booléen

  – de même densité θ que l'initiale

  – et de diamètre vertical d '' = d ' + 21

d 'où la relation de base du test :

$$\theta = (\theta d'' - \theta d') / 21 \ .$$

- ***Estimation de θ :***

Il faut mesurer la surface des pores de $X \oplus H$ et leur variation diamétrale dans le masque érodé $Z \ominus H$; soit 100 331 et 3643 respectivement. Doù:

$$\theta^* = [(\theta d'')^* - (\theta d')^*] / 21 = (3631 - 1953) / 21 = \mathbf{7{,}98 \ . \ 10^{-4}}$$

Sans être aussi précis que $(\theta a')^*$ et $(\theta d')^*$, l 'estimateur θ^* est acceptable.

Relations stéréologiques

C 'est le cas convexe qui offre les résultats les plus utiles.

- Soit dans R^3 un E.F.A. X de densité θ_3 et de grain primaire **X '** de :

  volume v ' ***surface s '*** ***largeur moyenne d '***

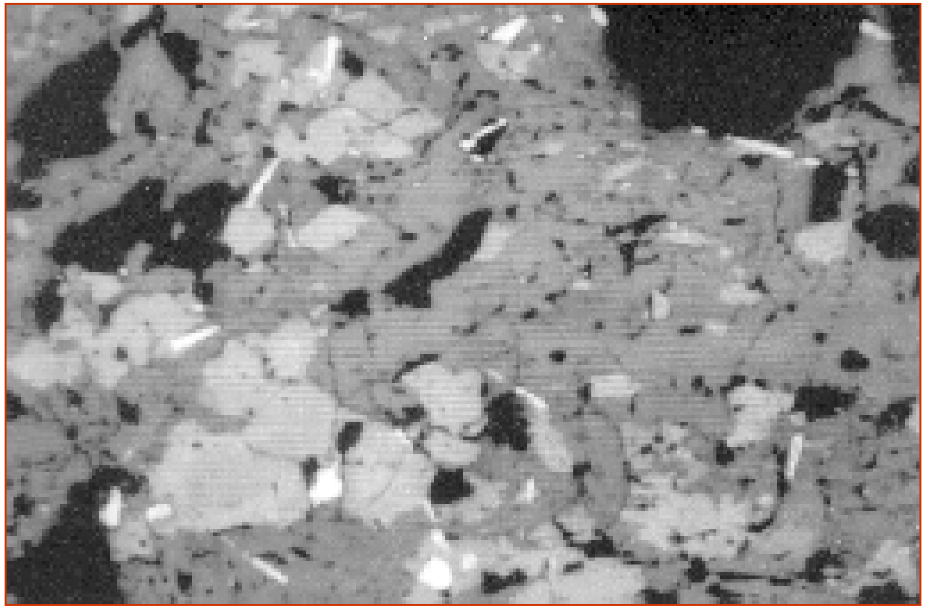
- Les section planes de X sont des E.F.A. booléens dont les paramètres moyens selon les direction valent

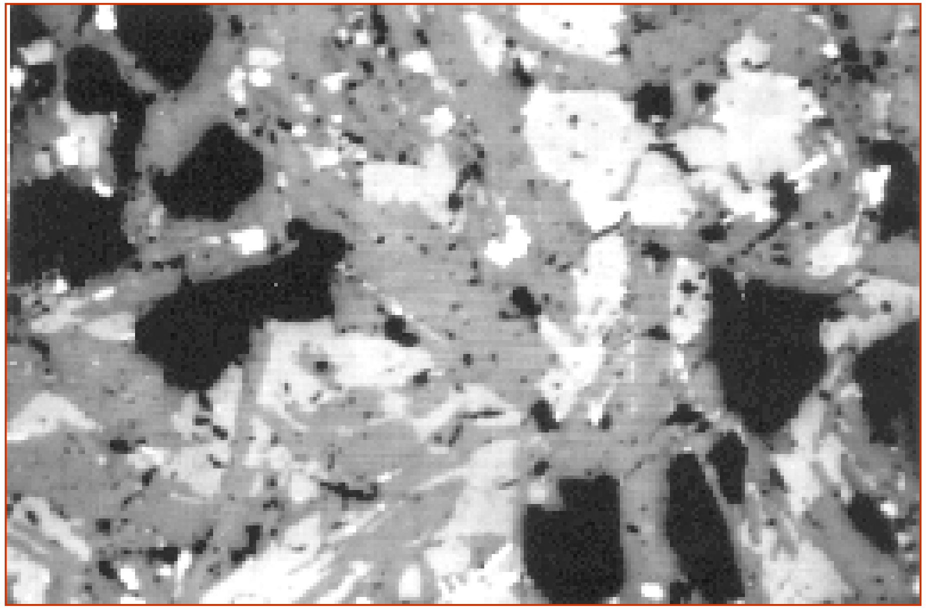
  densité θ_2 ***grain primaire : aire a ' ; périmètre u '***

- Comme la covariance est la même pour les EFA de R^3 ou de R^2 , on en déduit (cf. Ch. XXI-10) :

$$\theta_3 \, v' = \theta_2 \, a' \; ; \quad \pi \, \theta_3 \, s' = 4 \, \theta_2 \, u' \; ; \quad \theta_3 \, d' = \theta_2 \; ; \qquad (3)$$

Antinomie « nucléation-croissance » (I)





Ces deux micrographies proviennent de deux éruptions d'un même volcan du Caucase. La seconde montre davantage de pores. Le processus physique a-t-il créé un plus grand nombre de pores, ou plutôt des pores plus gros ?

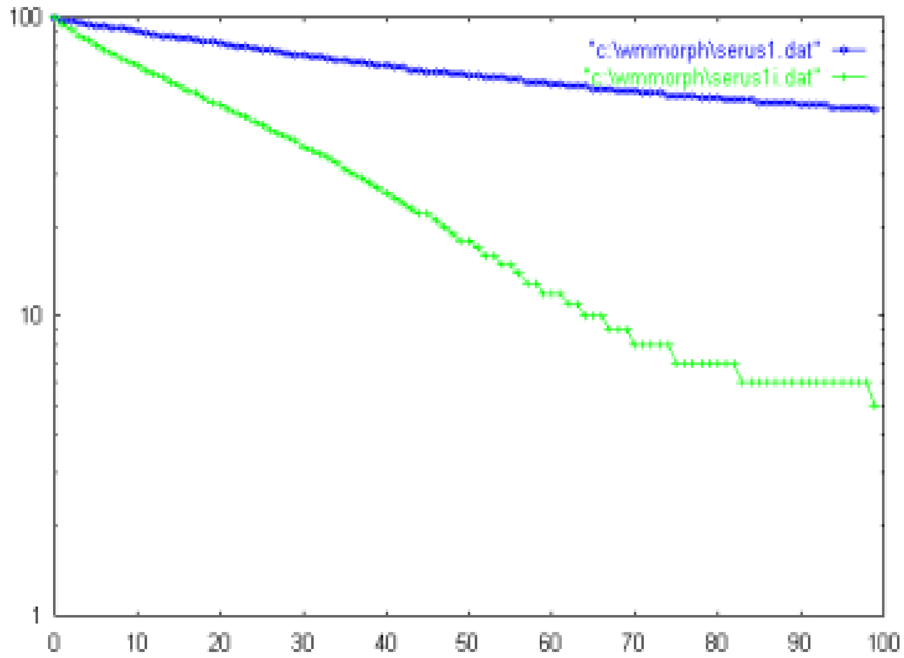
- On sait (ch.11) que le nombre moyen des pores en section égale le produit du nombre dans l'espace par leur largeur moyenne, ce qui ne permet pas de départager entre ***nucléation*** et ***croissance.***

Antinomie « nucléation-croissance » (II)

- Les deux textures se modélisent par des EFA booléens, où les « ***grains*** » du modèle sont les ***pores physiques*** (cf graphique).

Soient (θ'; v'; s' ; l') les paramètres de la première, et

(θ''; v''; s'' ; l'') ceux de la seconde.



- Une ***croissance*** pure entraîne

$$\theta''v''/\theta'v' = k^3 \; ; \qquad \theta''s''/\theta's' = k^2 \; ; \qquad \theta''d''/\theta'd' = k^1 \; ;$$

alors que dans la ***nucléation*** pure, ces trois rapports sont égaux.

Or, par application des relations stéréologiques (3) on a

$$\theta''v''/\theta'v' = \theta''a''/\theta'a' = 1,20 \quad \text{et} \quad \theta''s''/\theta's' = \theta''u''/\theta'u' = 1,16$$

il s 'agit donc ici de ***nucléation***

Modèle dérivé: structures triphasiques

- Pour décomposer une ***structure à 3 phases*** X_1, X_2 , X_3 en E.F.A. booléens, il faut

  1/ en choisir une comme **fond** (ex: X_3 représente les pores)

  2/ se donner une règle **priorité** entre X_1 et X_2 (ex: X_1 occulte X_2)

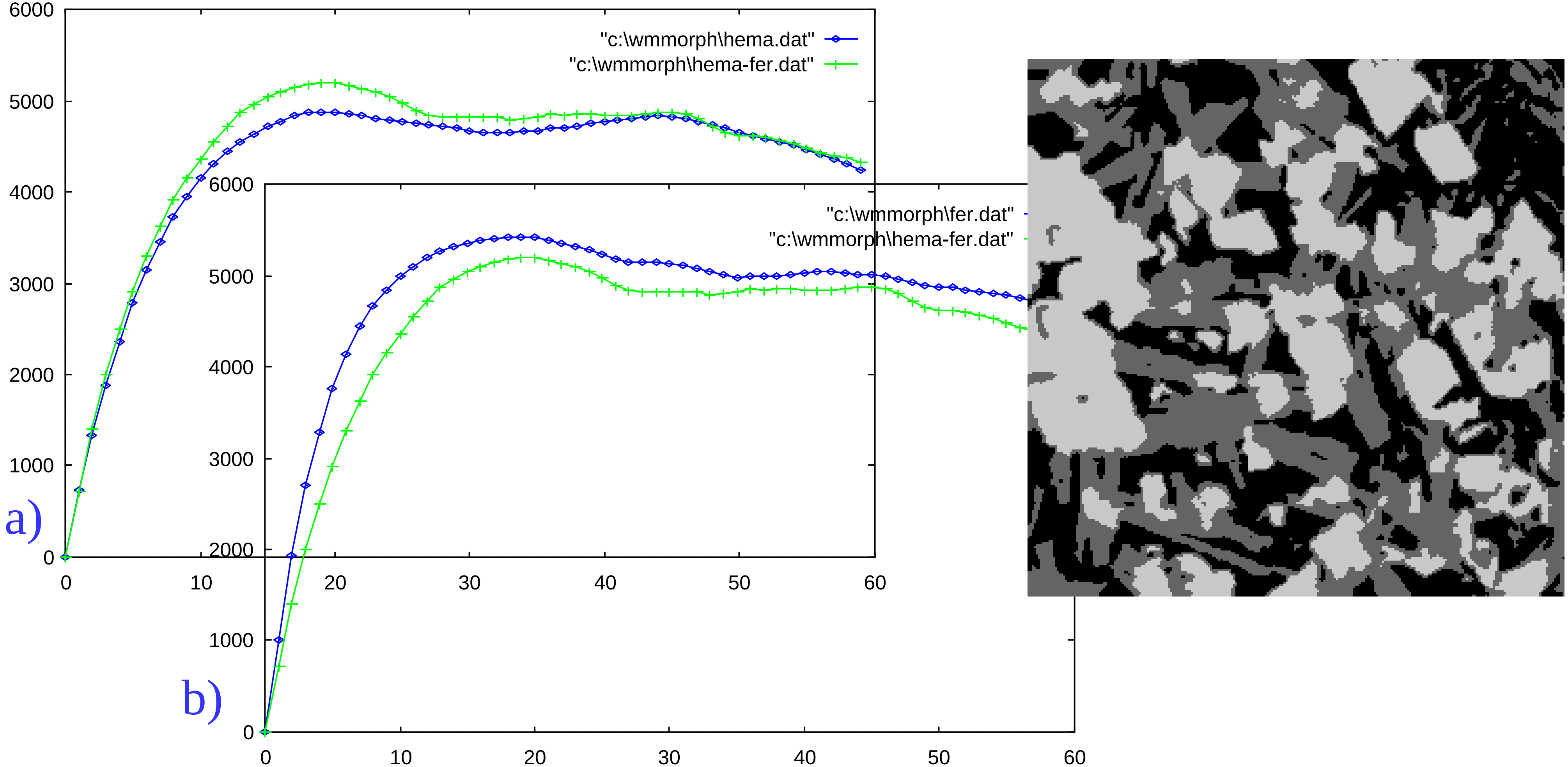
  3/ se donner une relation entre les implantations des **germes.**

- Lorsque l'on prend pour 3ème condition l'indépendance entre les i_1 et i_2 , on définit le modèle des ***agglomérés triphasiques*** (D. Jeulin, J. Serra) où les deux phases X_1 et X_2 ne sont régies par aucune condition relation d 'attraction ou de répulsion;
- Dans ce modèle, le variogramme de la phase occultante doit être **proportionnel** à la covariance entre phases occultante et occultée, *i.e.*

$$[p_2 / (1 - p_1)] \, \mathrm{Prob}\{ x \in X_1 , x+h \notin X_1\} = \mathrm{Prob}\{ x \in X_1 , x+h \in X_2\}$$

Exemple : agglomérés de minerai de fer

En a) c'est l 'hématite(claire) qui est supposée occulter, en b) la ferrite (grise); les covariances, plus proches en a) qu'en b), confirment le diagnostic visuel. De plus, même en a), l'hypothèse d 'indépendance n'est plus vérifiée à 20 pas



Usage heuristique du modèle booléen (I)

- Le modèle booléen fournit plusieurs relations entre paramètres directs et indirects. Le théorème de limite centrale suggère d'utiliser ces relations à priori, *i.e.* même si l'on n'est pas sûr que le modèle soit effectivement vérifié. En voici un exemple:
- ***Algorithme de comptage (objets en recouvrement partiel)***

a_Z := aire du domaine d 'étude Z

a ' := aire moyenne du grain primaire X '

(estimée à partir de grains isolés)

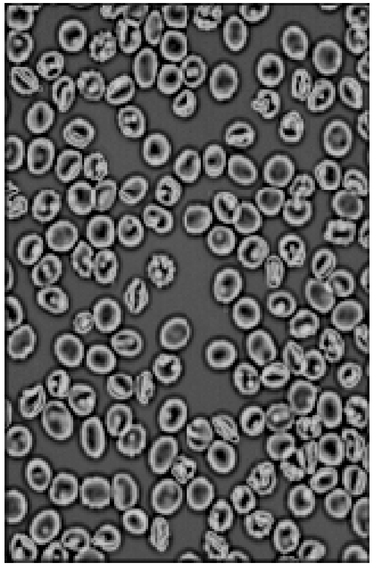
Si l'organisation est booléenne, on doit avoir

$$\{\text{Nombre des grains dans Z}\} = - a_Z \operatorname{Log} q \,/\, a' \qquad (4)$$

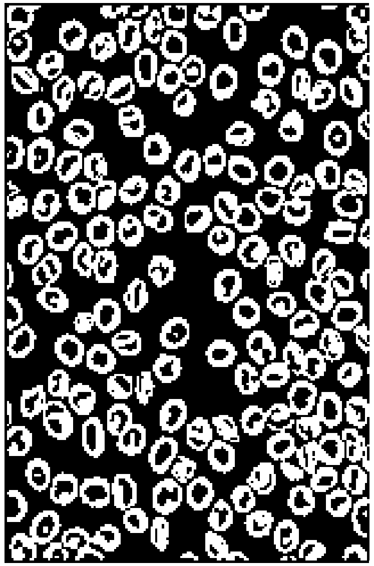
Or, des simulations montrent que même quand le modèle booléen n 'est pas vérifié, la rel.(4) reste vraie à 15% près.

Usage heuristique du modèle booléen (II)

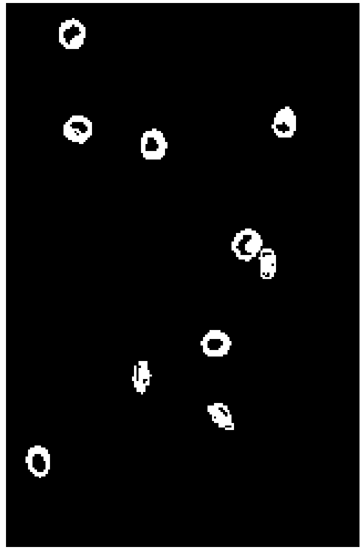
- *Exemple de comptage : Numération sanguine*



a) hématies (champ: 39360)



Seuillage de a) entre 100 et 255



aire moyenne 93,0 pixels

La formule (4) donne   N = - (39.360 / 93) Log 0,640 = 188

Robustesse: seuil bas = 90 ⇒ a'= 100,1 ; q = 0,609 ; N = 195

Références (I)

(Toutes les références ci-dessous portent sur la première publication de travaux originaux. Les deux premières sont de loin les plus importantes)

G. Matheron (1967), Eléments pour une théorie des milieux poreux. Masson, Paris [*Résultats de base dans le cas euclidien ; semi-markovisation*]

G. Matheron (1975), Random sets and integral geometry. Wiley, New York. [*Théorie générale, divisibilité indéfinie]*

P. Delfiner (1971), Etude morphologique des milieux poreux et automatisation des mesures en plaques minces. PhD thesis, University of Nancy. [*Théorème de limite centrale*]

D. Jeulin (1979), Morphologie Mathématique et propriétés physiques des agglomérés de minerais de fer et du coke métallurgique. Thèse de Docteur-Ingénieur en Sciences et Techniques Minières, Option Géostatistique, Ecole des Mines de Paris. [*Divers grains primaires polyédriques ; applications à la métallographie, et au contrôle de procédés*]

Références (II)

A. Greco, D. Jeulin and **J. Serra** (1979), The use of the texture analyser to study sinter structure, J. of Micr., Vol. 116, Pt 2. [*Modèle multiphasé*]

J. Serra (1982), Image Analysis and Mathematical Morphology, Vol. I, Ac. Press, London. [*Cas discrets, modèles dérivés*]

D. Stoyan (1978), On some qualitative properties of the boolean model of stochastic geometry. Bergakademie Freibert sektion Mathematik DDR, 92, Freiberg. [*Grains primaires sphériques*]

G. Ayala (1988), Inferencia in modelos Booleanos. Thesis Doc. Sci. Universitat de Valencia, Spain [*Inférence statistique*]

J. Goutsias (1992), Morphological analysis of discrete random shapes. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2, 193-215. [*Démarche discrète*]

M. Schmitt (1991), Estimation of the density in a stationary Boolean model. J. of Applied Prob., vol. 28 [*Estimation de la densité dans le cas général*]

I. Molchanov (1997), Statistics of the Boolean model for Practitioners and Mathematicians. J. Wiley and Sons [*estimations statistiques générales*]