Chapitre II : Dilatation, Erosion

Erosion et dilatation d'ensembles:
1-cas genéral
2-opérations de Minkowski
3- opérateurs standards

↓

Erosion et dilatation de fonctions

Opérations Planaires

Gradients et Laplacien

H.M.T. et Erosion Ensemblistes

- Les objets d'étude sont ici les ensembles $X \subseteq E$. La morphologie mathématique les décrit :
  - en associant à tout $x \in E$ deux sondes A(x) et B(x)
  - et en testant si l'une est dans X^c et l'autre dans
- Les fonctions $x \rightarrow A(x)$ et $x \rightarrow B(x)$ sont appelées **éléments structurants**, et le transformé par tout ou rien de X (**H.M.T.**) se définit par l' opération (ch. 8):

$$\boldsymbol{\eta(X) = \{z: A(z) \subseteq X^c ;\ B(z) \subseteq X\}}$$

- Quand $A=\emptyset$, $\eta(X)$ devient **l'érodé** de X par l'élément structurant (variable) B et s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon_B(X) = \{z: B(z) \subseteq X\}}$$

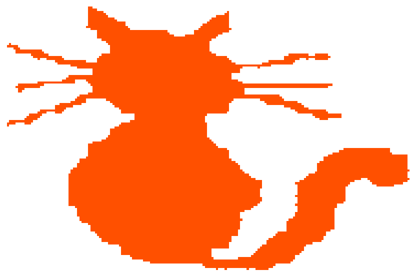
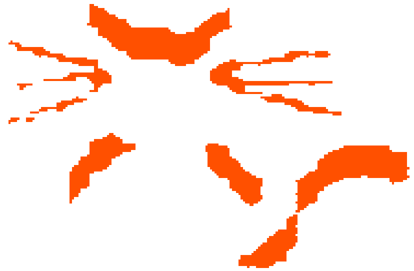


image initiale



exemple de H.M.T.

Adjonction (I)

- ***Erosion Ensembliste*** **:** L'opération ε_B commute avec $\cap$:

$$\boldsymbol{\varepsilon_B(\cap X_i) = \{z : B(z) \subseteq \cap X_i\}} = \cap \{z : B(z) \subseteq X_i\} = \cap\, \varepsilon_B(X_i)\,,$$

il s' agit donc bien d' une **érosion.**

- ***Adjonction*** **:** Les équivalences:

$$X \subseteq \varepsilon_B(Y) \quad \Leftrightarrow \quad \{x \in X \Rightarrow B(x) \subseteq Y\} \quad \Leftrightarrow \quad \cup\{B(x), x \in X\} \subseteq Y$$

conduisent à l'opération

$$\boldsymbol{\delta_B(X) = \cup\{B(x), x \in X\}}$$

qui commute avec $\cup$. C'est donc une **dilatation**, dite **adjointe** de ε. L'adjonction est une involution, puisque par chemin inverse, on voit que ε est l' adjointe de δ.

- ***Elément Structurant*** **:** Comme $\delta_B(X) = \cup\{\delta_B(x), x \in X\}$, l' application **"*élément structurant*"** $\boldsymbol{x \rightarrow \delta_B(x) = B(x)}$ suffit à déterminer

  - la dilatation $\delta : X \rightarrow \delta(X)$ - et l' érosion $\varepsilon : X \rightarrow \varepsilon(X)$.

Adjonction (II)

Théorème d'adjonction (E. Gallois….H. Heijmans, Ch. Ronse, J. Serra): Quand deux opérateurs sont liés par l'équivalence

$$\mathbf{X \subseteq \varepsilon_B (Y) \quad \Leftrightarrow \quad \delta_B(X) \subseteq Y}$$

ils constituent nécessairement un doublet "***érosion-dilatation***".

- *Démonstration*: Soit Y_i, $i \in I$, une famille dans $\mathcal{P}(E)$ et soit X tel que

$$\delta(X) \subseteq \cap Y_i \quad \Leftrightarrow \quad \delta(X) \subseteq Y_i \quad \text{pour tout } i \in I,$$

Par adjonction : la 1ère inclusion $\Leftrightarrow$ $X \subseteq \varepsilon(\cap Y_i)$

la 2ème inclusion $\Leftrightarrow$ $X \subseteq \varepsilon_B (Y_i)$, $i \in I$, $\Leftrightarrow$ $X \subseteq \cap\varepsilon(Y_i)$

d'où $\varepsilon(\cap Y_i) = \cap\varepsilon(Y_i)$, et ε est une érosion (*simili modo* pour la dilation).

***Première représentation** (J. Serra)* **:** on a, pour toute adjonction (δ,ε) :

$$\varepsilon(Y) = \cup\{ X : \delta(X) \subseteq Y\} \qquad\qquad \delta(X) = \cap\{ Y : \varepsilon(Y) \subseteq X\}$$

où curieusement, l'érosion est une réunion et la dilatation une intersection.

N.B. *les deux théorèmes s'étendent aux treillis complets.*

Représentations et Semi-groupes

- ***Seconde représentation. Théorème*** *(J.Serra)* **:** Toute application croissante ψ sur $\mathcal{P}(E)$ peut s'écrire comme réunion d'érosions ε_B :

$$\psi = \cup \{ \varepsilon_B , B \in \mathcal{P}(E) \} ,$$

où $\varepsilon_B(X) = \psi(B)$ si $X \supseteq B$, et $\varepsilon_B(X) = \varnothing$ sinon (résultat dual pour la dilatation).

Cette représentation généralise celle de G. Matheron relative au cas invariant par translation (II, 14), et s'étend elle-même aux treillis complets.

- ***Semi-groupes* :** Le produit de composition de deux dilatations (resp. érosions) est encore une dilatation (resp. érosion). En effet:

$$\delta_{B2}\delta_{B1}(X) = \cup \{ B_2(y) , y \in \cup \{ B_1(x) , x \in X \} = \cup \{ \delta_{B2}[B_1(x)] , x \in X \}$$

d'où la règle : $\delta_{B2}\delta_{B1} = \delta_A$; $\varepsilon_{B2}\varepsilon_{B1} = \varepsilon_A$ **avec** $A = \delta_{B2}(B_1)$

[*Semi-groupe* $\Rightarrow$ *pas d'inverse* $\Leftrightarrow$ ***perte*** *d' information*.]

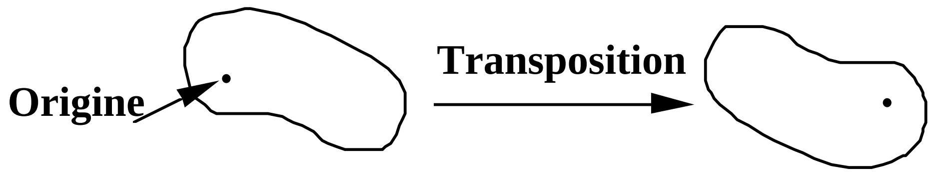
Cas d'un espace E muni d'une Translation

- On appelle **τ-application** toute opération $\psi:\mathcal{P}(E)\rightarrow\mathcal{P}(E)$ qui est invariante par translation dans E.
- Quand E est muni d'une translation, les deux dilatations de base sur $\mathcal{P}(E)$ sont:
  - l' ***Addition de Minkowski*** , qui est l'unique τ-dilatation,
  - la ***Dilatation Standard*** , restreinte aux champs d'analyse bornés.
- Pour tout $X \subseteq E$, introduisons:

  1) l'ensemble X_b **translaté** de X suivant le vecteur b ,

$$\mathbf{X_b = \{x+b,\ x \in X\}}$$

  2) l'ensemble $\check{X}$ **transposé** de X :



$$\mathbf{\check{X} = \{ -x\ ,\ x \in X\}}$$

On a : $\mathbf{x \in \check{B}_z} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{z - x \in B}$. Enfin, B est **symétrique** quand il est égal à son transposé.

Dilatation d'ensembles et Addition de Minkowski

- Les τ-dilatations sont appelées **additions de Minkowski** . Chacune est caractérisée par l'image B de l'origine, qui est donc l'élément structurant de base

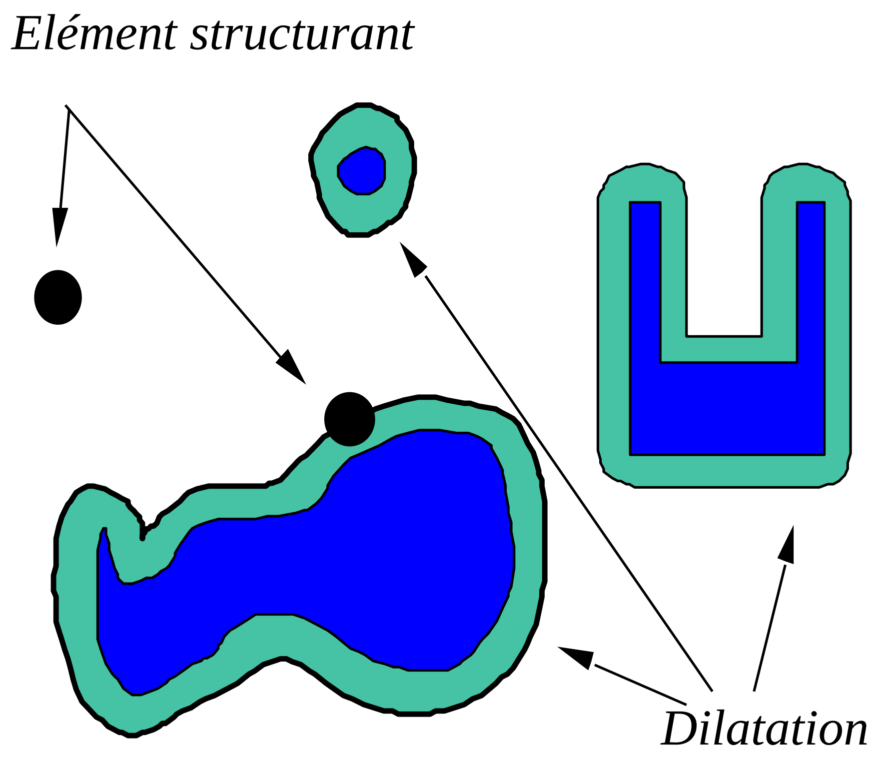
- Notons $\delta_B(X) = X \oplus B$, il vient

$$\mathbf{X \oplus B = \cup \{ B_x , \; x \in X\}}$$
$$\mathbf{= \cup \{ x + b, \; x \in X, \; b \in B \}}$$
$$\mathbf{= \cup \{ X_b, \; b \in B \} = B \oplus X}$$

- ***Interprétation géométrique*** **:**

De $z \in \delta_B(X) \iff \{z \in B_x \text{ et } x \in X \}$
$\iff \{ \exists x : x \in \check{B}_z \cap X \}$
on tire que le dilaté de X par B est le lieu des implantations z de l' élément transposé $\check{B}_z$ quand celui-ci rencontre X :

$$\mathbf{\delta_B(X) = \{ z : \check{B}_z \cap X \neq \emptyset \}}$$



Addition de Minkowski par un cercle

Erosion d'Ensembles et Soustraction de Minkowski

- ***Définition :*** La soustraction $X \ominus B$, de Minkowski, de X par B est l'érosion adjointe de $X \oplus B$.

  $$\boldsymbol{\varepsilon_B(X) = X \ominus B = \{ z : B_z \subseteq X \}}$$

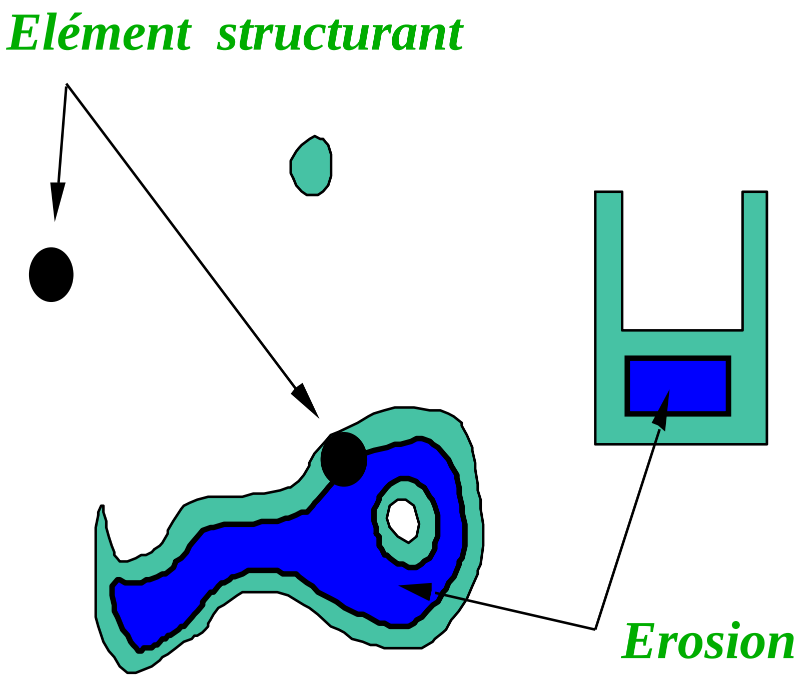
- ***Interprétation géométrique :*** $X \ominus B$ est le lieu des positions du centre z de l' élément structurant B_z quand celui-ci est inclus dans X.

- ***$\cap$ - Représentation :***

$$B_z \subseteq X \iff \forall\ b \in B:\ b+z \in X$$

$$\iff \forall\ b \in B:\ z \in X_{-b}$$

d'où : $\boldsymbol{\varepsilon_B(X) = \cap \{ X_b\ , b \in \check{B} \}}$



Soustraction de Minkowski par un cercle

Les Deux Dualités

- **L'adjonction**, déjà vue, est la dualité

$$X \subseteq Y \ominus B \quad \Leftrightarrow \quad X \oplus B \subseteq Y \qquad X, Y \in E\,.$$

Elle est spécifique aux couples "érosion-dilatation". L'adjonction fait penser à inverse. De fait si X Y et B sont **convexes homothétiques**,

on a $$X = Y \ominus B \;\Leftrightarrow\; X \oplus B = Y.$$

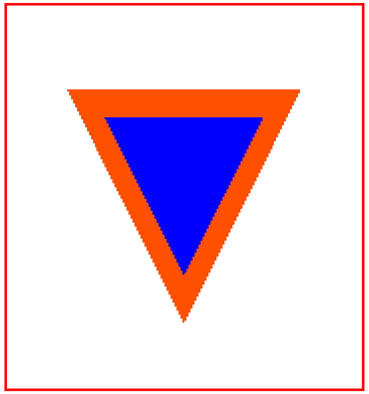
- Puis il y a la dualité pour le complément, *i.e.* dans le cas de l' érosion :

$$\psi(X) = (X^c \ominus B)^c$$

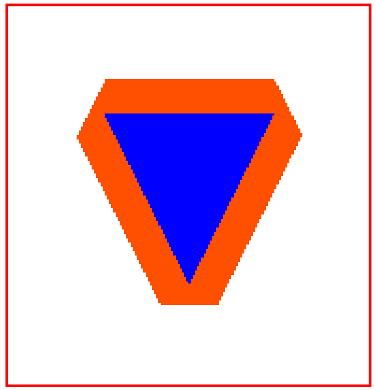
Or, $(X^c \ominus B)^c = [\cap \{(X_b)^c, b \in \check{B}\}]^c = \cup \{X_b, b \in \check{B}\}$

i.e. $$\psi(X) = (X^c \ominus B)^c = X \oplus \check{B}$$

Le dilaté de Minkowski par $\check{B}$ est dual, pour le complément, de l’érodé de Minkowski par B.



Dilaté de X par B, homothétiques



Dilaté du même X par le transposé $\check{B}$

Propriétés algébriques des Opérations de Minkowski

Distributivité :

On a les ***égalités*** :

$X \oplus (B \cup B') = (X \oplus B) \cup (X \oplus B')$

$X \ominus (B \cup B') = (X \ominus B) \cap (X \ominus B')$

$(X \cap Z) \ominus B = (X \ominus B) \cap (Z \ominus B)$

mais seulement les ***inclusions***:

$X \oplus (B \cap B') \subseteq (X \oplus B) \cap (X \oplus B')$

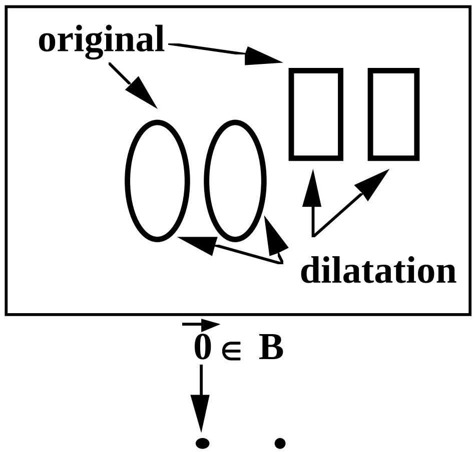
$X \ominus (B \cap B') \supseteq (X \ominus B) \cup (X \ominus B')$

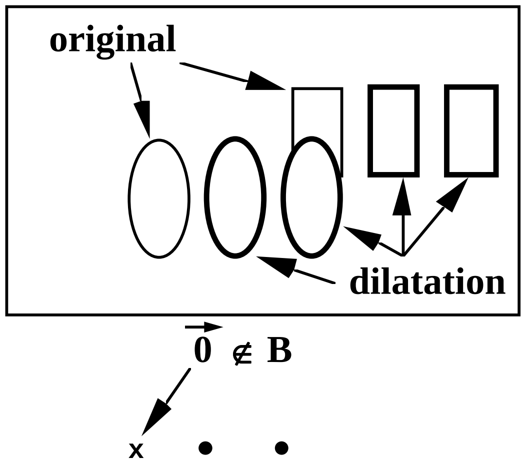
$(X \cup Z) \ominus B \supseteq (X \ominus B) \cap (Z \ominus B)$

Extensivité :

$O \in B \Rightarrow$ $\mathbf{X \subseteq (X \oplus B)}$

$\mathbf{(X \ominus B) \subseteq X}$





la dilatation est extensive, et l' érosion anti-extensive, ssi **B contient l' origine**

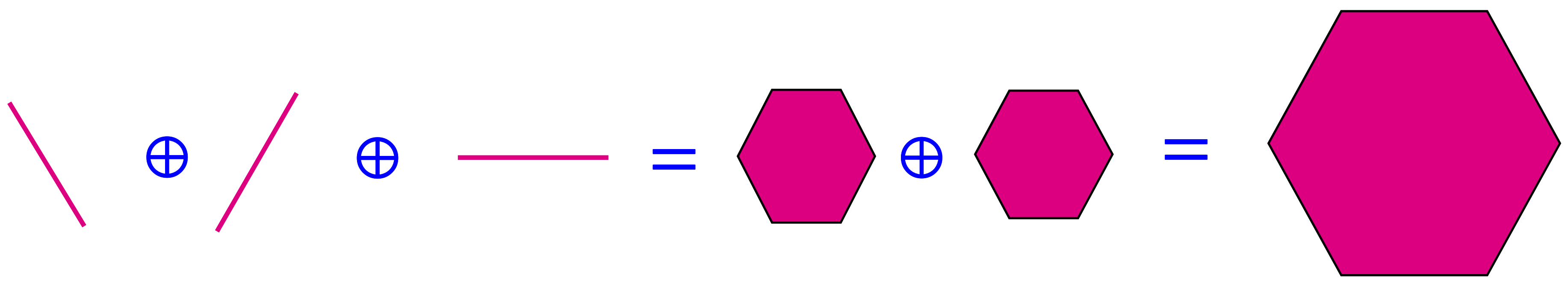
Addition de Minkowski par des Convexes

- Si dans l'espace euclidien R^n, λB désigne l' homothétique de rapport λ de l'élément structurant B, la loi de semi-groupe :

$$\lambda B \oplus \mu B = (\lambda + \mu) B$$

est vérifiée si et seulement si B est **compact convexe,** $x,y \in B \Rightarrow [x,y] \in B$. Si, de plus, B est plan et symétrique, il se décompose en produit de dilatations selon des **segments.**

- En pratique, la dilatation (l'érosion) d' un ensemble X par l élément structurant convexe λB se ramène donc à λ dilatations (érosions) par l' élément structurant B. L' itération agit comme facteur d'homothétie.



Effets de Bords

La plupart des objets d' étude sont les restrictions, à un rectangle Z, d'un ensemble plus vaste X.

- On ne peut accéder expérimentalement qu'à $X \cap Z$, ou $X \cup Z^c$, selon la valeur 0 ou 1 qu'on décide d'attribuer à l'extérieur. Or, pour B symétrique

$$\mathbf{(X \cap Z) \ominus B = (X \ominus B) \cap (Z \ominus B)} \quad \text{et}$$

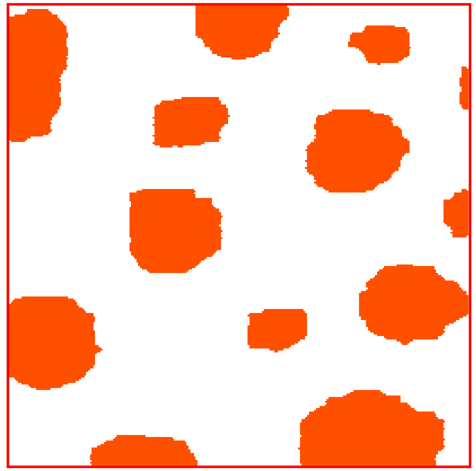
$$(X \cup Z^c) \oplus B = (X \oplus B) \cup (Z^c \oplus B) = (X \oplus B) \cup (Z \ominus B)^c$$

d'où :

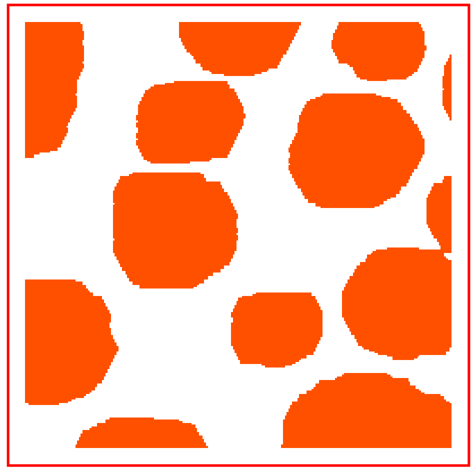
$$\mathbf{[(X \cup Z^c) \oplus B] \cap (Z \ominus B) = (X \oplus B) \cap (Z \ominus B)}$$

- Ainsi, les transformées $(X \oplus B)$ et $(X \ominus B)$ ne sont connues qu' à l'intérieur du ***masque Z érodé*** lui-même par B.

- Pire, si l'on concatène une suite de transformations on se retrouve vite avec un masque réduit à $\varnothing$!



***Ensemble initial* (X∩Z)**



***Dilaté* (X⊕B) ∩ (Z⊖B)**

Dilatation et Erosion Standard

- D'où l'idée de réduire progressivement l'élément structurant quand il s'approche des bords du champ. On perd (progressivement ...) l'invariance par translation, mais le résultat est connu dans la totalité du masque Z

- Dans cette démarche "**standard**", où l'élément structurant $x \rightarrow B_x$ devient $x \rightarrow B_x \cap Z$, dilatation et érosion s'écrivent :

$$\delta_B(X) = (X \oplus B) \cap Z$$

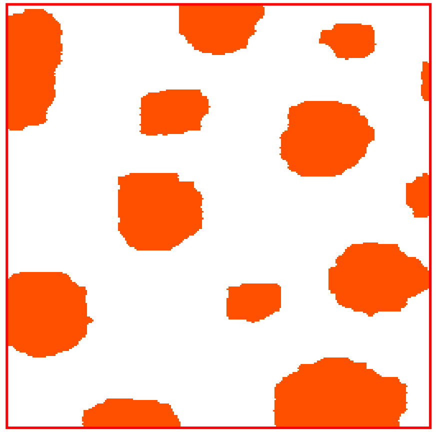
$$\varepsilon_B(X) = \{ x : B_x \cap Z \subseteq X \cap Z \}$$

et la dualité "complément" s' exprime *dans Z*

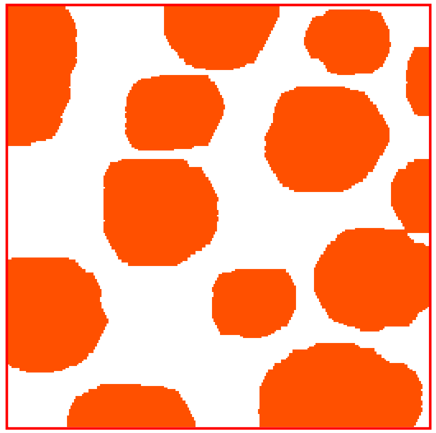
$$\psi^*(X) = Z \setminus \psi (Z \setminus X)$$

On en déduit l' algorithme de l' érosion :

$$\varepsilon_B(X) = Z \setminus [\check{\delta}_B(Z \setminus X)] = [(X \cup Z^c) \ominus B] \cap Z$$



Ensemble initial **($X \cap Z$)**



Dilatation standard de **($X \cap Z$)**

Noyaux des τ-applications

- Quand ψ est une τ-application, son **noyau** $\mathcal{V}$ se définit alors comme l'ensemble des $Y \subseteq E$ dont le transformé contient l'origine:

$$\mathcal{V} = \{ Y,\ Y \subseteq E :\ \{o\} \in \psi(Y) \}$$

Si $\{\psi_i\}$ est une famille de τ-applications, de noyaux $\mathcal{V}_i$, le sup et l'inf des ψ_i admettent pour noyaux respectifs $\cup\, \mathcal{V}_i$ et $\cap\, \mathcal{V}_i$.

- Dans le cas de la soustraction de Minkowski par B, l' égalité $B \ominus B = \{o\}$ entraine pour le noyau $\mathcal{W}_B$ de l' opérateur que

$$\mathcal{W}_B = \{ Y,\ Y \supseteq B \} \qquad (1)\ .$$

D'autre part $\{ \psi$ *croissante* $\} \Leftrightarrow \{ B \in \mathcal{V},\ A \supseteq B \Rightarrow A \in \mathcal{V} \}$ (2) .

- ***Théorème :*** *(G.Matheron, 1975)* Toute τ-application croissante ψ sur $\mathcal{P}(E)$, de noyau $\mathcal{V}$, est union de soustractions de Minkowski, de loi :

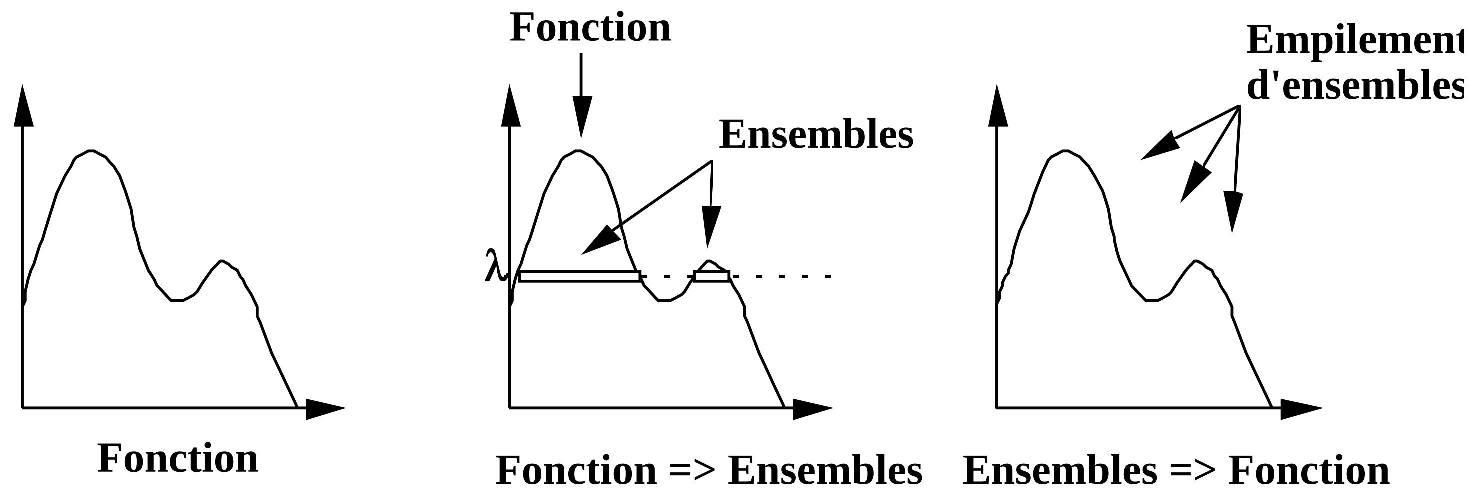
$$\psi(X) = \cup \{ X \ominus B\ ,\ B \in \mathcal{V} \}$$

[*se déduit des Eq.(1) et (2);admet une version duale pour la dilatation adjointe*]

Equivalence entre Ensembles et Fonctions

Toute fonction numérique f sur un ensemble E peut être considérée de manière ***équivalente*** comme une pile d'ensembles décroissants. Chaque ensemble est la section du sous-graphe de f par le plan de cote λ :

$$\mathbf{X_\lambda (f) = \{ x \in E , f(x) \geq \lambda \} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \sup \{\lambda : x \in X_\lambda (f) \} \quad (*)}$$



Il est équivalent de dire que f est semi continue supérieurement, ou que les X_λ sont fermés. Inversement, pour toute famille de fermés $\{X_\lambda\}$ telle que

$$\lambda \geq \mu \;\Rightarrow X_\lambda \subseteq X_\mu \quad \textbf{and} \quad X_\lambda = \cap \{X_\mu , \mu < \lambda \}$$

il existe une et une seule fonction f dont les sections sont les X_λ.

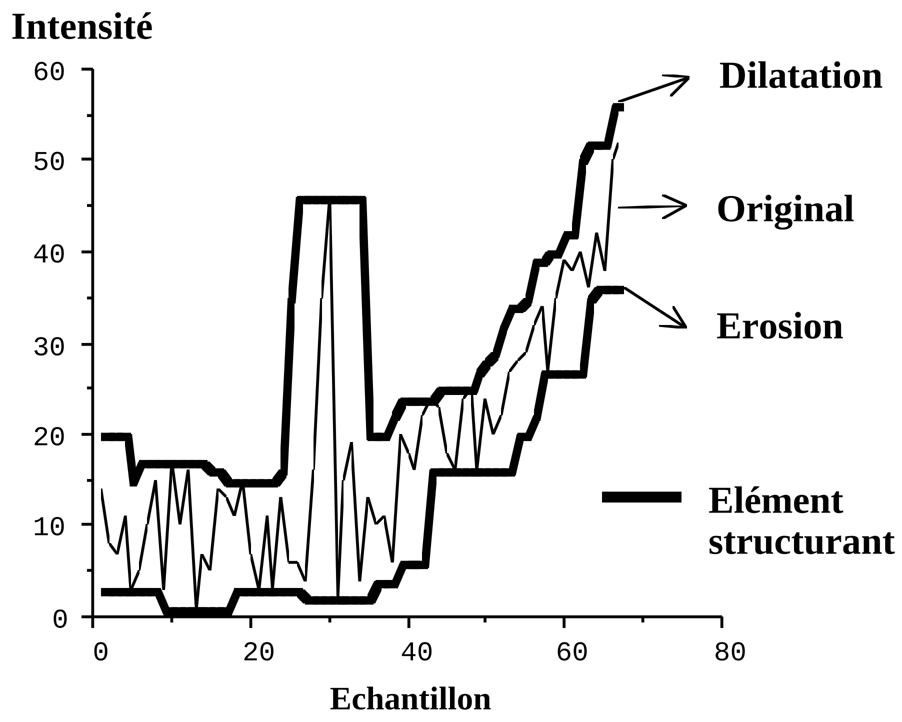
Dilatation d'une fonction par un élément structurant plan

Définition: En dilatant ou en érodant chaque section $X_f(\lambda)$ d'une fonction f par un même ensemble B on engendre sur f une dilatation ou une érosion, dite **planaire**.

Leurs expressions se déduisent de Eq.(*) par les formules suivantes :

$$(f \oplus B)(x) = \sup\{ f(x-y),\ y \in B \}$$

$$(f \ominus B)(x) = \inf\{ f(x-y),\ -y \in B \}$$



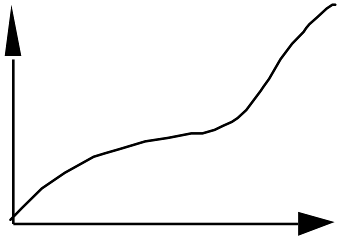
- L'érosion rétrécit les pics et lignes de crête. Les pics plus étroits que l'élément structurant disparaissent. Parallèlement, elle élargit les vallées et les minima .
- La dilatation produit les effets inverses .

Propriétés des Opérations Planaires

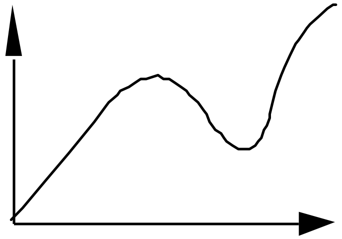
Les érosions et dilatations, par des éléments structurants plans ou non, ont les mêmes propriétés générales que celles énoncées pour les ensembles. L'utilisation d'éléments structurants **plans** fournit de plus les trois avantages spécifiques suivants :

Commutation avec les anamorphoses :

e.g. $\text{Log}\ (f \oplus B) = (\text{Log}\ f) \oplus B$



anamorphose



≠ anamorphose

Stabilité :

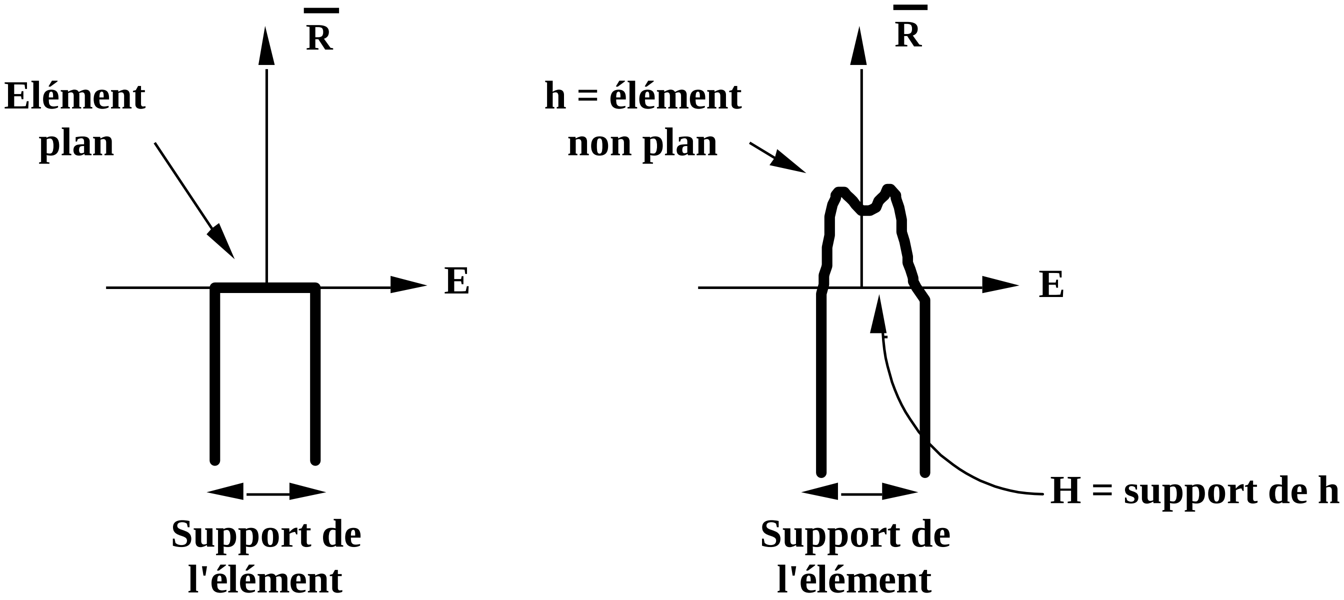
La classe des fonctions prenant n valeurs données est préservée (n bits d'image se transforment en n bits) .

Implémentation :

Une transformation par un élément structurant plan peut être implémentée seuil par seuil, ou numériquement.

Eléments Structurants non Planaires

- Les éléments plans peuvent être considérés comme une fonction constante et égale à zéro sur un support égal à l'ensemble. Une généralisation des éléments structurants plans consiste à introduire une pondération des niveaux . On parle alors d'éléments structurants **non plans** .



Dilatation de fonctions par des éléments non plans

Définition :

Avec un élément structurant non plan, la dilatation et l'érosion sont définies par :

$$(f \oplus h)(x) = \sup_{y \in H} [f(x-y) + h(y)]$$

$$(f \ominus h)(x) = \inf_{-y \in H} [f(x-y) - h(y)]$$

Remarque

S'agissant de phénomènes physiques on veillera à ce que f et h soient définies dans des unités cohérentes .

Comparaison avec la convolution:

On peut établir un parallélisme entre les formules de la dilatation et de l'érosion et la convolution .

Somme	<=>	Sup ou Inf
Produit	<=>	Somme

convolution :

$$h(x) * f(x) = \sum_{y \in H} f(x-y) \, . \, h(y)$$

dilatation:

$$(f \oplus h)(x) = \sup_{y \in H} [f(x-y) + h(y)]$$

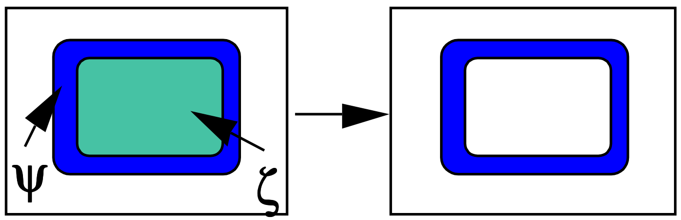
Résidus de Transformations

Définition :

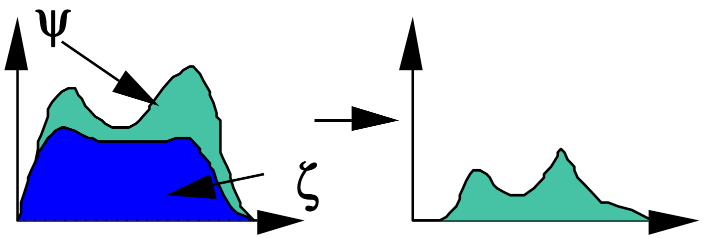
- Le résidu entre deux transformations ψ et ζ est la différence entre les résultats des deux transformations:

cas des ensembles: $\rho_{\Psi,\zeta}(X) = \psi(X) \setminus \zeta(X)$

cas des fonctions: $\rho_{\Psi,\zeta}(X) = \psi(X) - \zeta(X)$



Résidu



Résidu

N. B. : les opérations ψ et ζ ne sont pas forcément ordonnées

c

Résidus pour les Ensembles et les Fonctions

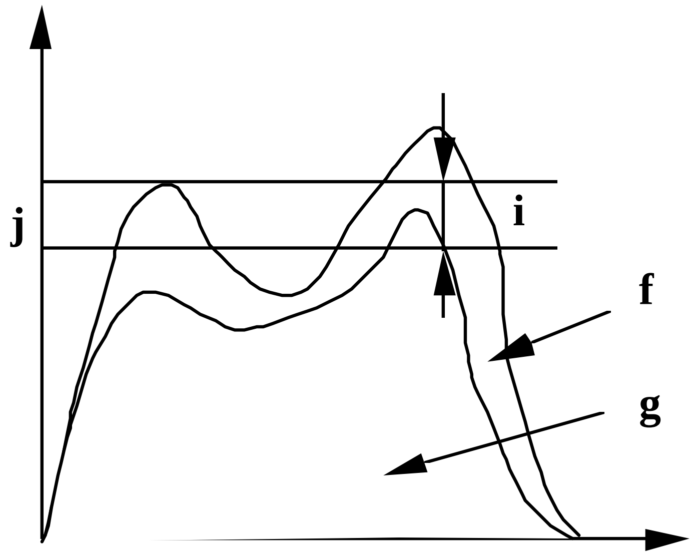
- Les résidus d'une transformation croissante ne sont pas croissants. Dans le cas des fonctions numériques on ne peut donc pas les établir en traitant chaque niveau séparément, comme pour les dilatations ou les érosions.

- Dans le cas digital, si l'on pose

$$X_i(f) = \{ x \in E , f(x) \geq i \}$$

La correspondance entre le résidus de deux fonctions et l'ensemble de leurs sections est la suivante

$$X_i(f - g) = \cup [X_{i+k}(f) \setminus X_{k+1}(g) \ , \ k \geq 0]$$



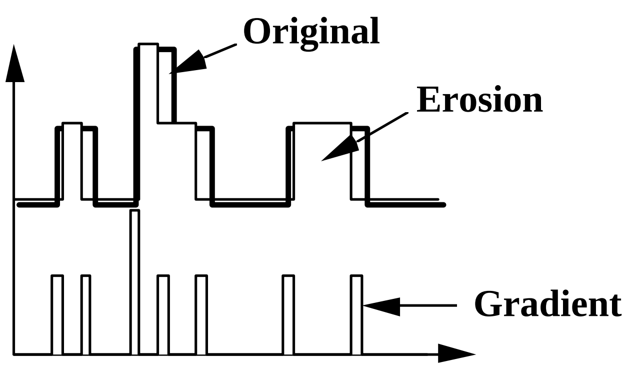
Gradients Morphologiques Digitaux

Les gradients ont pour rôle de mettre en évidence les contours. En morphologie, on appelle **gradients de Beucher**, ou morphologiques, trois modules de gradients digitaux définis à l'aide du *disque unitaire B* :

Gradient par érosion :

- C'est le résidu obtenu avec comme primitives l'*identité* et l'*érosion par B*:

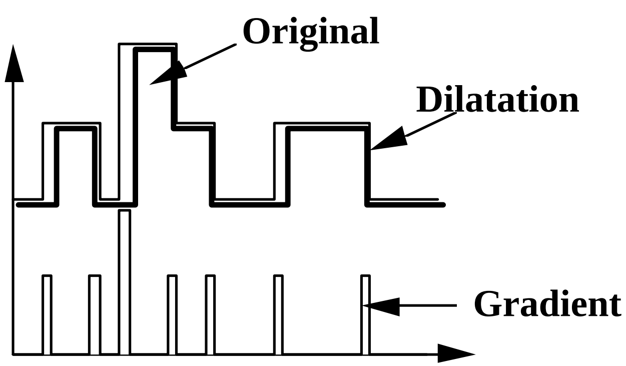
ensembles $g^{-}(X) = X / (X \ominus B)$
fonctions $g^{-}(f) = f - (f \ominus B)$



Gradient par dilatation :

- C'est le résidu obtenu avec comme primitives la *dilatation par B* et l' *identité*:

ensembles $g^{+}(X) = (X \oplus B) / X$
fonctions $g^{+}(f) = (f \oplus B) - f$



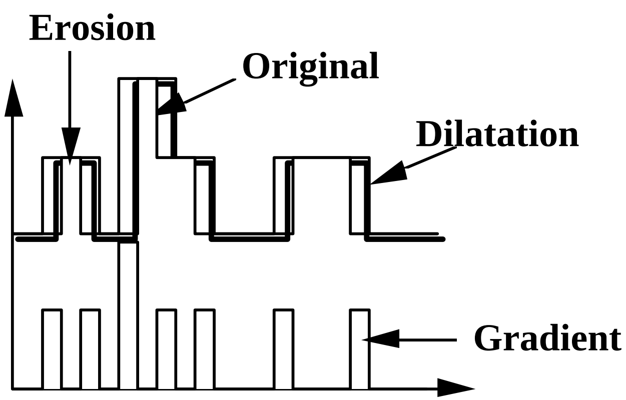
Gradient et Laplacien Morphologiques (digitaux)

Gradient symétrisé :

- C'est la réunion (resp. la somme des gradients précédents (ce qui symétrise la mesure) :

ensembles $g(X) = (X \oplus B) / (X \ominus B)$

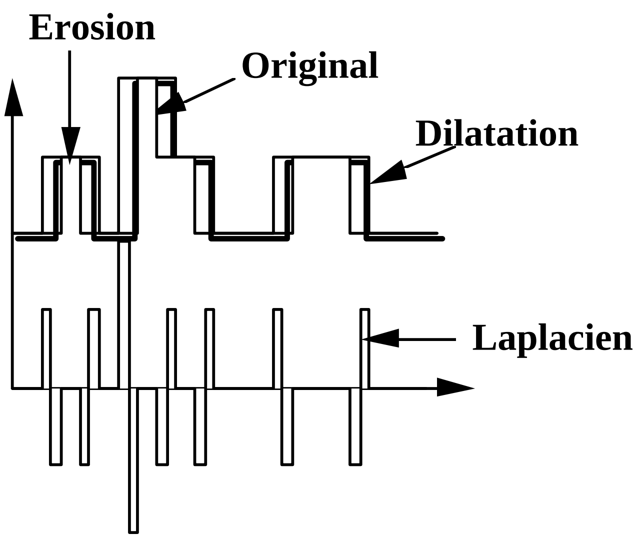
fonctions $g(f) = (f \oplus B) - (f \ominus B)$



Laplacien :

- C'est le résidu obtenu avec comme primitives les gradients par dilatation et érosion . Pour les fonctions il vaut

$$L(f) = g^{+}(f) - g^{-}(f)$$



Remarque : quand le pas de la grille d'échantillonnage tend vers 0, on trouve le module du gradient et le laplacien euclidiens, s'ils existent (cf. III,19)

Références

Sur la dilatation ensembliste :

- H.Minkowski {MIN03}, en 1901, définit et étudia la dilatation telle qu'elle est présentée au ch. II. Il ignora toutefois l'érosion, qui fut introduite par Hadwiger {HAD57}, en 1957. L'étude des propriétés spécifiques des dilatations binaires en fonction de la forme de l'élément structurant date du début des années 70 {HAA67},{SER69},{SER72}.

Sur la dilatation numérique :

- L'extension aux fonctions numériques apparut avec {SER75} {ROS76}, {MEY77}, et fut complétée par {SER82,ch12} (fonctions semi-continues, éléments structurants plans) et {STE83} (filtres). Les propriétés des opérateurs plans sont traitées en détail dans {SER82}, {HEI91},{SOI92b}.

Sur l'adjonction :

- Cette dualité entre érosion and dilatation se manifeste pour la première fois dans l'œuvre d'E.Gallois (see {BIR84}). Elle fut redécouverte par J.Serra dans {SER88,ch.1}, qui établit de plus les théorèmes de représentation, et fut enrichie de propriétés nouvelles par H.Heijmans and Ch.Ronse dans {HEI90}.