Chapitre IV

Filtrage Morphologique

Composition en série:

-> Produits $\zeta\psi$, $\zeta\psi\zeta$
-> Filtres alternés séquentiels

Composition en parallèle:

Combinaison avec sup et inf:
-> treillis de l' activité
-> Centre ; Contraste

Définition des Filtres Morphologiques (I)

- En traitement du signal, le terme "filtre", peu précis, dépend du contexte dans lequel il est utilisé. Il sous-entend parfois la convolution, parfois aussi toute opération qui produit une nouvelle fonction. La morphologie mathématique le définit au contraire de manière bien précise :

Définition *(G. Matheron, J. Serra)***:**
Toute transformation **croissante** et **idempotente** sur un treillis définit un **filtre morphologique**

Croissance:

- Cette hypothèse est la plus fondamentale. Elle assure que la structure de base du treillis, c'est à dire la relation d'ordre, est conservée lors d'un filtrage morphologique.
- Cette propriété entraîne qu' en général, le filtre perd de l'information.

Définition des Filtres Morphologiques (II)

Idempotence:

- Par définition, une transformation idempotente transforme l'image, ou le signal, en un **invariant** pour l' opérateur en question (*cf*. chap.1).
- Cette propriété apparait souvent, mais de manière implicite, dans les descriptions.On dit d'un filtre optique qu'il est rouge, ou d'un ampli que sa bande passante vaut 50 khz. Ici, nous la poserons en axiome.
- On atteint l'idempotence soit après une seule passe, soit comme limite par itération. Plus généralement, une séquence d'opérations, prise dans son ensemble, peut être idempotente.
- On notera enfin que lorsque les filtres linéaires sont idempotents, alors ils n'admettent pas d'inverse : ils perdent de l'information, ce qui les rapproche des filtres morphologiques.

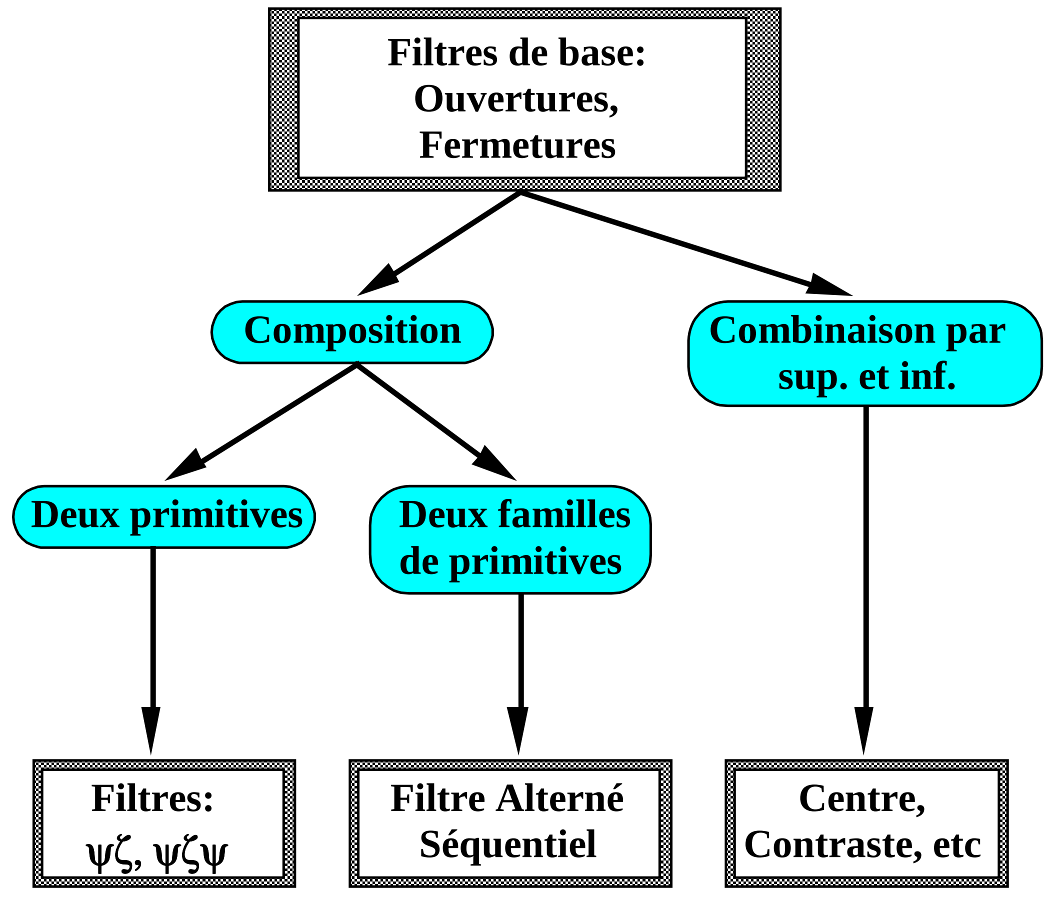
Construction des Filtres Morphologiques

Nous n'avons jusqu'à présent vu que deux exemples de filtres morphologiques: l'ouverture et la fermeture.

Pour créer d'autres filtres morphologiques, deux types de combinaisons sont possibles:

Série: Compositions de filtres de base.

Parallèle : Combinaisons de filtres de base par sup. et inf.



Filtres Alternés (I)

A partir de deux filtres ordonnées ($\zeta \geq \psi$), on peut construire quelques (pas beaucoup !) filtres par composition. En effet :

***Théorème** (G. Matheron)*: soient ζ et ψ deux filtres tels que $\zeta \geq \psi$, alors

1) $\zeta\psi$, $\psi\zeta$, $\zeta\psi\zeta$, $\psi\zeta\psi$, croissants et idempotents sont donc des filtres morphologiques.

2) $$\psi \leq \psi\zeta\psi \leq \begin{matrix} \zeta\psi \\ \psi\zeta \end{matrix} \leq \zeta\psi\zeta \leq \zeta$$

3) $\zeta\psi\zeta$ est le plus petit filtre plus grand que $\zeta\psi \quad \psi\zeta$
$\psi\zeta\psi$ est le plus grand filtre plus petit que $\zeta\psi \quad \psi\zeta$

4) On a les équivalences: $\zeta\psi\zeta = \psi\zeta \quad \Leftrightarrow \quad \psi\zeta\psi = \zeta\psi \quad \Leftrightarrow \quad \psi\zeta \geq \zeta\psi$

N.B.:1- La composition de plus de trois opérateurs ne donne pas un nouveau filtre. Par exemple, comme $\zeta\psi$ est idempotent, il vient. $\zeta\psi\zeta\psi = \zeta\psi$.
2- Le théorème d'étend aux couples ordonnnés d'une sous-potente ($\zeta \geq \zeta\zeta$) et d'une sur-potente ($\psi\psi \geq \psi$) (*H. Heijmans*)

Filtres Alternés (II)

Démonstration du théorème :

1) $\zeta \geq \zeta\zeta\zeta \geq \zeta\psi\zeta \geq \psi\psi\zeta \geq \psi\zeta \geq \psi\zeta\zeta \geq \psi\zeta\psi \geq \psi$;

2) idempotence de $\zeta\psi$, $\psi\theta\zeta$, $\psi\zeta\psi$, $\zeta\psi\zeta$:

$$\psi\zeta \geq \psi\zeta\zeta\zeta \geq \psi\zeta\psi\zeta \geq \psi\psi\psi\zeta \geq \psi\zeta \quad ;$$

$$\psi\zeta\psi \geq (\psi\zeta\psi\zeta)\psi \geq \psi\zeta\psi\psi\zeta\psi \geq \psi\psi\psi\psi\zeta\psi \geq \psi\zeta\psi \; ;$$

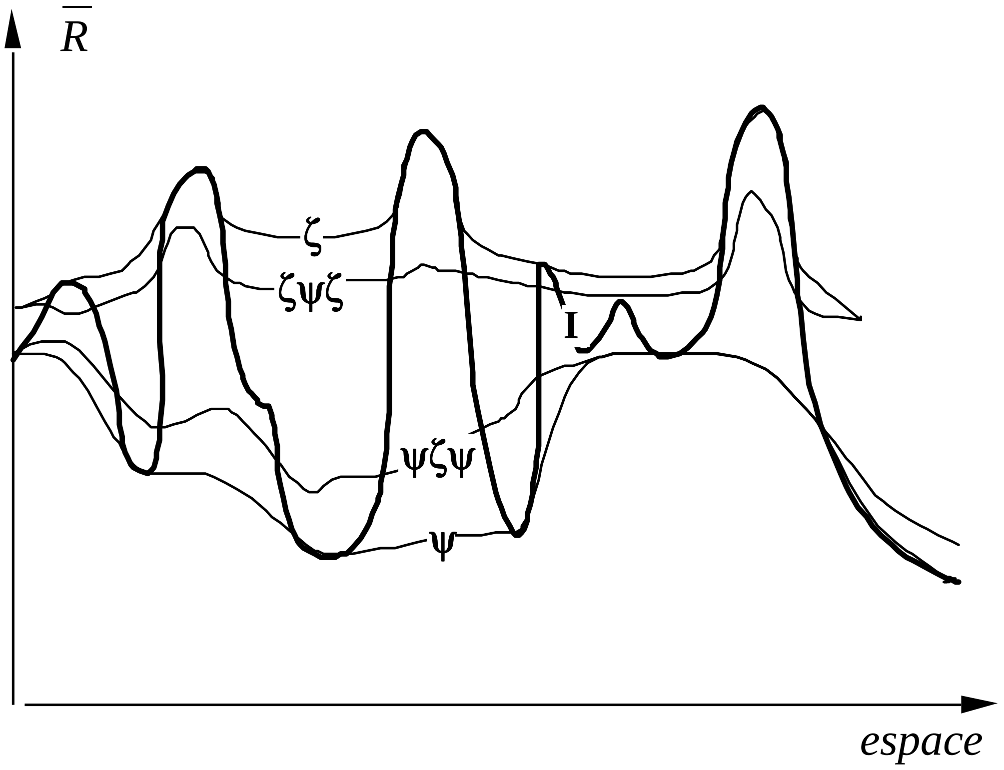
3) plus petit majorant: si un filtre $\varphi \geq \psi\zeta \; \zeta\psi$, alors

$$\varphi = \varphi\varphi \geq \zeta\psi \, \psi\zeta = \zeta\psi\zeta \; ;$$

4) $\psi\zeta = \zeta\psi\zeta \Rightarrow \psi\zeta \geq \zeta\psi\psi \geq \zeta\psi$;

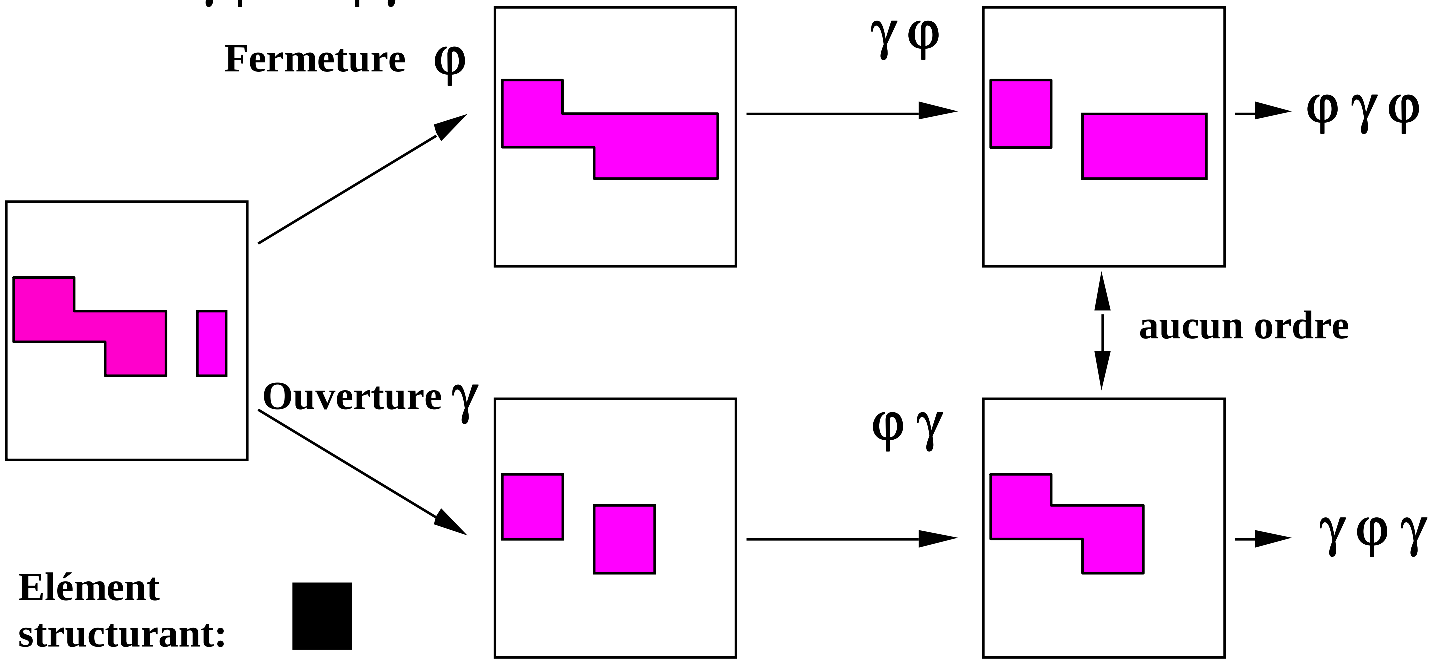
$$\psi\zeta \geq \zeta\psi \;\Rightarrow\; \zeta\psi\zeta \geq \psi\psi\zeta \geq \psi\zeta \geq \psi\zeta\zeta \geq \zeta\psi\zeta \; .$$

Relation d'ordre entre les Compositions



Comparaison entre γφ et φγ

- Les deux primitives que l'on utilise le plus souvent pour composer sont une ouverture et une fermeture, dénotées ici γ et φ .
- Le théorème précédent indique, qu'en général, il n'y a pas de relation d'ordre entre γφ et φγ:



- Il existe un cas classique où le point 4) du théorème précédent est illustré. C'est celui des filtres par reconstruction. Les produits de composition sont alors ordonnées, et l'on a $\gamma\varphi \geq \varphi\gamma$ (cf. VI-13) .

Extension du Top Hat

Objectif :

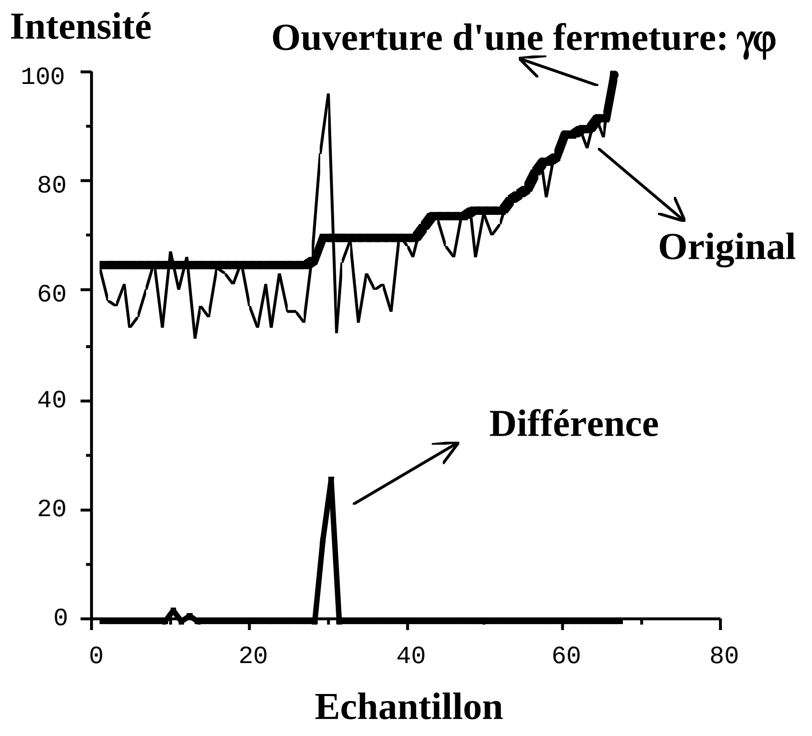
- Un Top-Hat par ouverture morphologique réhausse les pics mais n'élimine pas forcément les bruits blancs. Si l'on désire réduire à la fois variations lentes et bruit, on peut partir de l'opérateur

$$\gamma\varphi \quad \mathrm{I}$$

et en prendre le résidu $\rho(f)$:

$$\rho(f) = f - \{ \gamma\varphi(f) \quad f \}$$

Quand $\gamma\varphi$ est un **filtre fort** (ouverture et fermeture par des segments, ou selon une connexité), alors $\gamma\varphi$ I est une *ouverture* (cf. X - 20).



Résultat à comparer avec le top-hat III-11

Inf-Filtre, Sup-Filtre et Filtre Fort

Les notions de filtres inf-, sup- et forts ont été introduites pour étudier les propriétées des produits de composition comme $\zeta\psi$, et leur robustesse, *i.e.* la sensibilité du résultat du filtrage aux variations du signal d'entrée.

***Définition* :**

Un filtre ψ est

- filtre si $\psi = \psi\, (I \quad \psi)$

- filtre si $\psi = \psi\, (I \quad \psi)$

fort si $\psi = \psi\, (I \quad \psi) = \psi\, (I \quad \psi)$

***Théorème** (G. Matheron)*:

- Une transformation est un -filtre (resp. -filtre) ssi elle se décompose en produit $\gamma\varphi$ d'une fermeture par une ouverture (resp. produit $\varphi\gamma$ d'une ouverture par une fermeture) .
- Les fermetures φ et les ouvertures γ sont des filtres forts, les $\gamma\varphi$ et $\varphi\gamma\varphi$ sont des v-filtres, et les $\varphi\gamma$ et $\gamma\varphi\gamma$ des $\wedge$-filtres.

Interprétations Géométriques

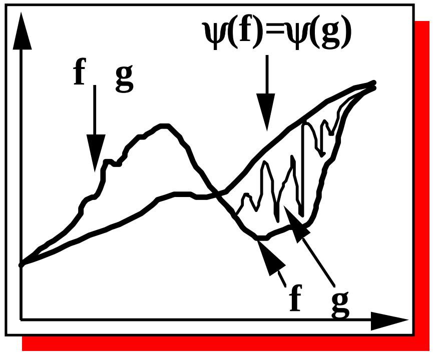
La propriété de -filtre assure que tout signal g compris entre le signal original f et le sup de f et du résultat du filtrage, donnera par filtrage le même résultat que f.

Vis-à-vis de l' -filtre on a le résultat dual

Enfin, La propriété de filtre fort étend cette robustesse à que tout signal g compris entre f ψ(f) et f ψ(f)

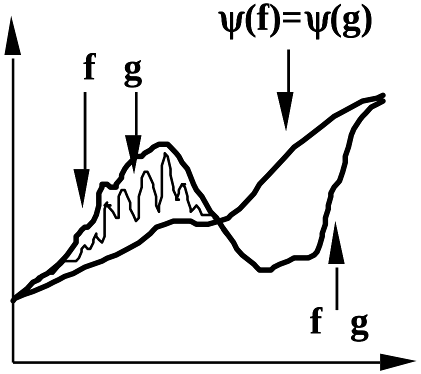
ψ $\vee$-filtre $\Leftrightarrow$

$f \leq g \leq (f \vee \psi(f)) \Rightarrow \psi(g) = \psi(f)$



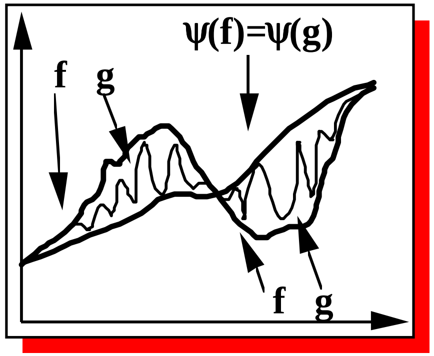
ψ $\wedge$-filtre $\Leftrightarrow$

$(f \wedge \psi(f)) \leq g \leq f \Rightarrow \psi(g) = \psi(f)$



ψ filtre fort $\Leftrightarrow$

$f \wedge \psi(f) \leq g \leq f \vee \psi(f) \Rightarrow \psi(g) = \psi(f)$



Filtres Alternés Séquentiels (I)

- Le nombre de filtres différents que l'on obtient en composant deux filtres est assez limité. Pour créer de nouveaux filtres, on peut composer non plus deux filtres mais deux **familles** d' opérateurs. Cette idée conduit aux **filtres alternés séquentiels:**

Théorème *(J.Serra)***:**

- Considérons les deux familles $\{\zeta_i\}$ de sous-potentes et $\{\psi_i\}$ de sur-potentes telles que:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \{\psi_i\} \text{ décroit selon } i \\ 2)\ \{\zeta_i\} \text{ croit selon } i \\ 3)\ \psi_1 < \zeta_1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \ldots\psi_n < \ldots < \psi_2 < \psi_1 < \zeta_1 < \zeta_2 < \ldots < \zeta_n \ldots$$

alors les produits de composition suivants

$$\mathbf{N_i = \zeta_i\psi_i \ldots \zeta_i\psi_2\zeta_1\psi_1} \qquad \mathbf{M_i = \psi_i\zeta_i \ldots \psi_2\zeta_2\psi_1\zeta_1}$$

sont des **filtres**, dits **alternés séquentiels** .

Filtres Alternés Séquentiels (II)

- ***Démonstration du théorème*** :

1- Posons $\mu_i = \psi_i\zeta_i$. on a pour $j \geq i$, $\mu_j \mu_i \leq \mu_j \leq \mu_i \mu_j$, car :

$\psi_i \leq \zeta_i \leq \zeta_j \;\Rightarrow\; \psi_i\zeta_i \leq \zeta_i\zeta_i \leq \zeta_i \leq \zeta_j \;\Rightarrow\; \psi_j\zeta_j\,\psi_i\zeta_i \leq \psi_j\zeta_j\,\zeta_j \leq \psi_j\zeta$

(même preuve, *mutatis mutandis*, pour la seconde inégalité)

2- $M_i\,M_i = (\boldsymbol{\mu_i}\,\boldsymbol{\mu_{i-1}}...\mu_1)(\mu_i\,\mu_{i-1}...\mu_1) \leq \mu_i\,(\mu_i\,\mu_{i-1}...\mu_1) \leq (\mu_i\,\mu_{i-1}...\mu_1) = M_i$

mais aussi : $M_i\,M_i = (\mu_i\,\mu_{i-1}...\boldsymbol{\mu_1})\,(\boldsymbol{\mu_i}\,\mu_{i-1}...\mu_1) \geq \mu_i\,(\mu_i\,\mu_{i-1}...\mu_1) = M_i$.

- ***Loi d'absorption*** (le filtre le plus fort s'impose, s'il est en second) :

$$\mathbf{j \geq i \;\Rightarrow\; M_j M_i} = (\mu_j...\mu_{i+1})\,(\mu_i\,\mu_{i-1}...\mu_1)\,(\mu_i\,\mu_{i-1}...\mu_1) \mathbf{= M_j}$$

(... mais $M_iM_j \leq M_j$!)

Propriétés des Filtres Alternés Séquentiels

- ***Dualité*** **:**

En général, les filtres alternés séquentiels ne sont pas autoduaux , c'est à dire que:

$$\mathbf{M_i (m - f) \neq m - M_i (f)}$$

- ***Compatibilité avec le changement de résolution*** **:**

Si les familles de primitives sont compatibles avec l'homothétie, i.e.:

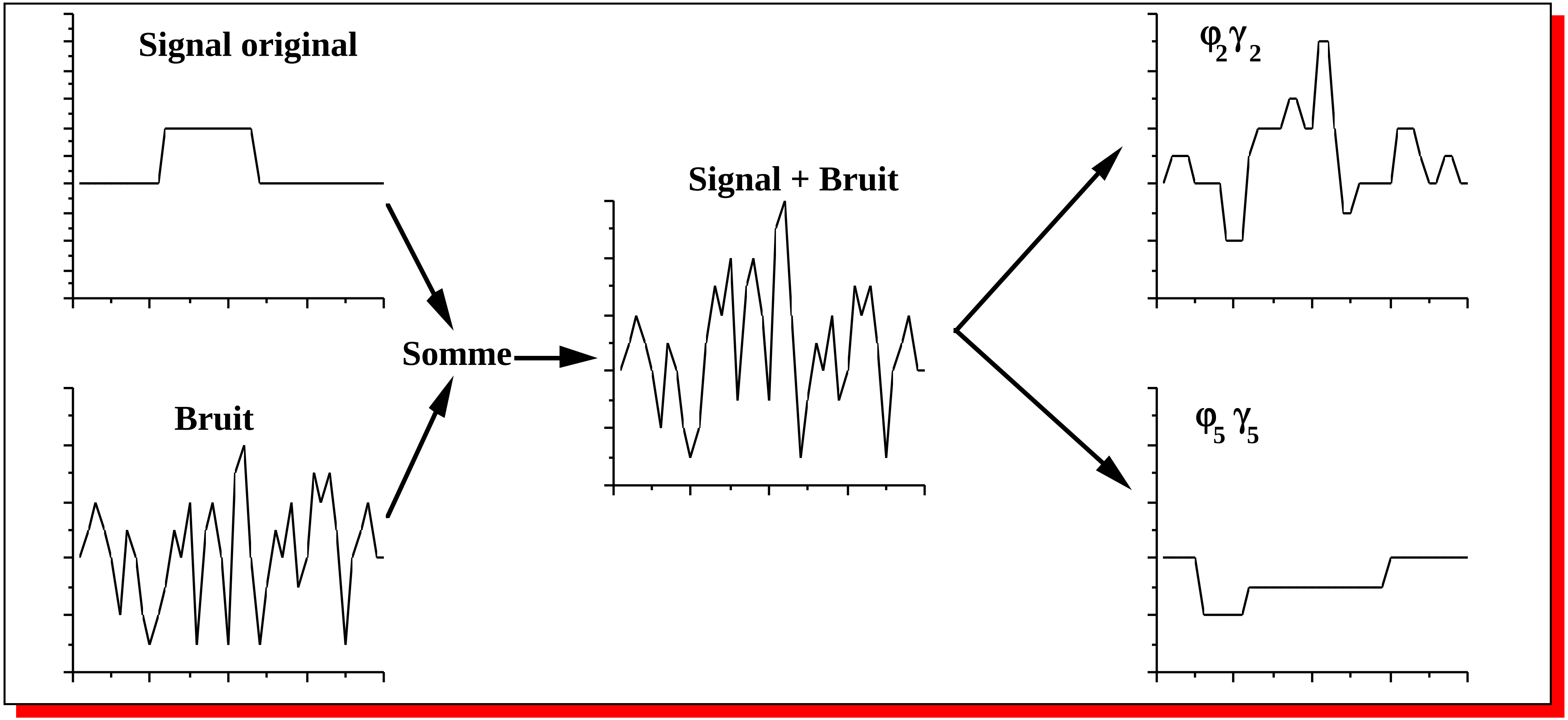
où $h_k(.)$ désigne l'homothétie, alors les F.A.S.le sont également .

$$\psi_k(h_k(.)) = h_k(\psi_1(.)),\ \ \zeta_k(h_k(.)) = h_k(\zeta_1(.))$$

De manière intuitive, cette propriété dit que les filtres d'ordre k agissent à la résolution k de la même manière que le filtre d'ordre 1 à la résolution 1 .

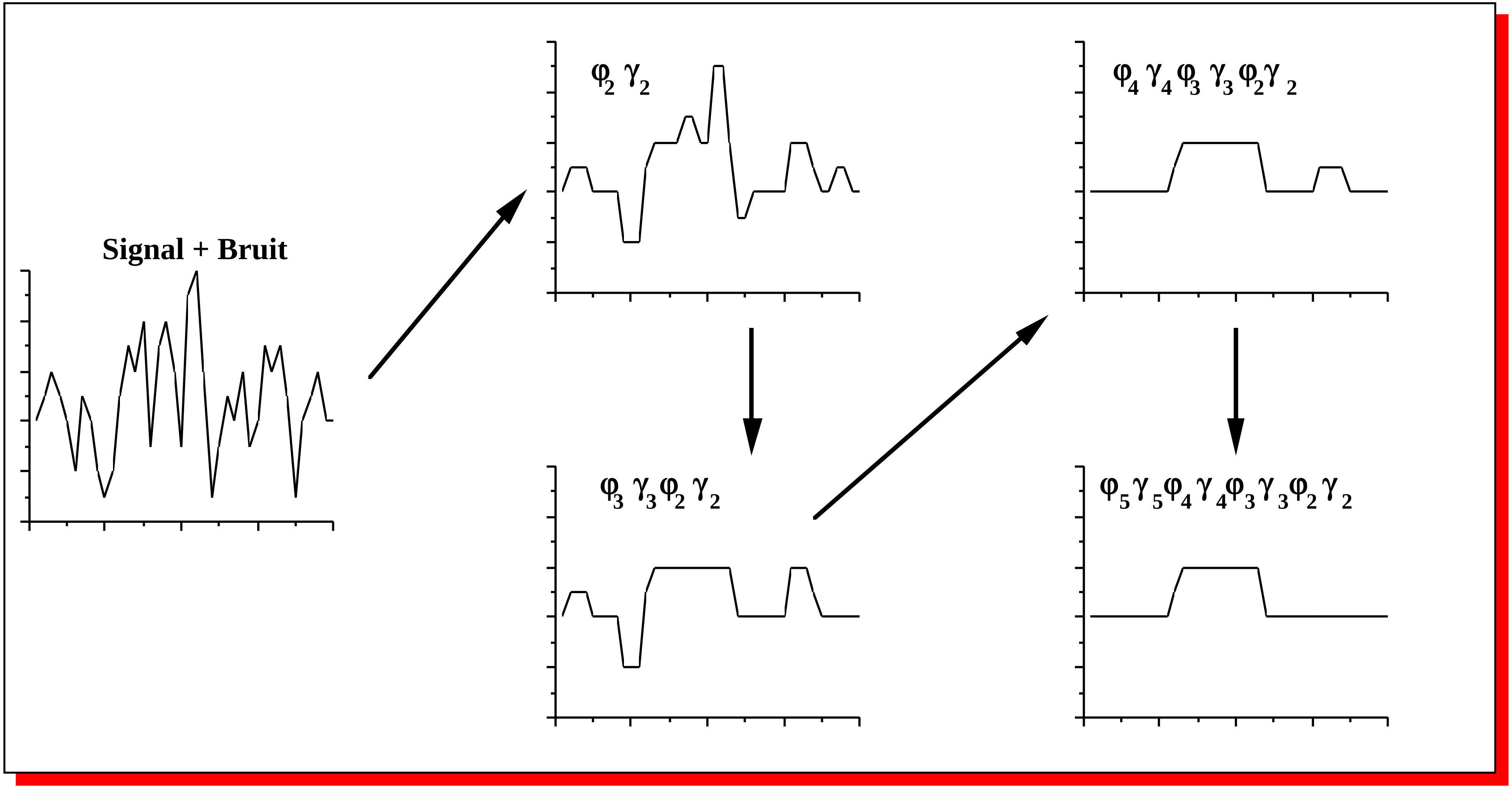
Usage des Filtres Alternés Séquentiels (I)

Commentaires: ***En général, les familles de base sont deux granulométries. Les F.A.S. sont très utiles pour les signaux bruités. L'exemple suivant montre qu'un simple $\varphi\gamma$ ne permet pas toujours d'éliminer un bruit, quelle que soit la taille des éléments structurants.***



Usage des Filtres Alternés Séquentiels (II)

Un filtre alterné séquentiel permet de réduire le bruit et conduit de manière progressive à une bonne estimation du signal sous-jacent.



Pyramides

- La loi d'absorption des F.A.S. (1) ci-dessous suggère que nous nous intéressions aux **familles $\{\psi_\lambda\}$** d'opérateurs dépendant d'un paramètre positif λ.
- Pour donner lieu à de bonnes propriétés, les $\{\psi_\lambda\}$ doivent vérifier une certaine cohérence quand λ varie. En particulier, ils constituent une **pyramide d'opérateurs** dès lors que tout ψ_λ(f) peut être obtenu à partir d'un quelconque des transformés ψ_μ (f), pour $\lambda \geq \mu > 0$, *i.e.*

$$\lambda \geq \mu > 0 \quad \Rightarrow \quad \textbf{il existe} \quad \nu > 0 \quad \textbf{tel que} \quad \psi_\lambda = \psi_\nu \, \psi_\mu \quad .$$

- Les deux types principaux de pyramides sont :

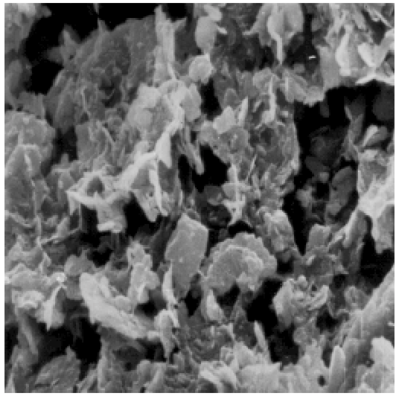
$$\lambda \geq \mu > 0 \quad \Rightarrow \psi_\lambda \; 1 \; \psi_\mu = \psi_\lambda \qquad (1) \quad (\textit{le plus fort impose sa loi})$$

$$\lambda \geq \mu > 0 \quad \Rightarrow \psi_\lambda \; 1 \; \psi_\mu = \psi_{\lambda+\mu} \qquad (2) \quad (\textit{les effets s'ajoutent})$$

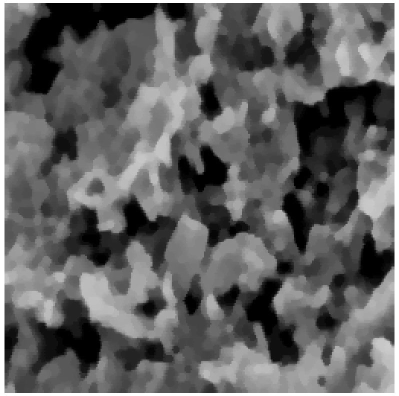
- On notera que la structure de **semi-groupe granulométrique** est **plus sévère** que celle de pyramide, puisqu'alors (cf.III-15)

$$\lambda \, , \; \mu > 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_\lambda \; 1 \; \psi_\mu = \psi_{\sup(\lambda,\, \mu)}$$

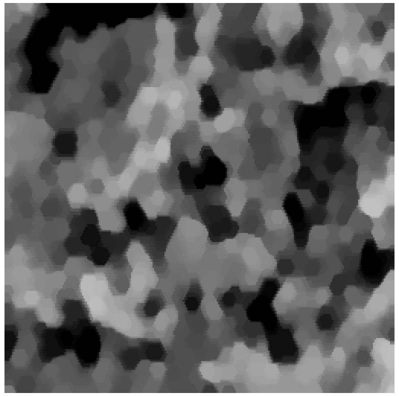
Exemple de Pyramide



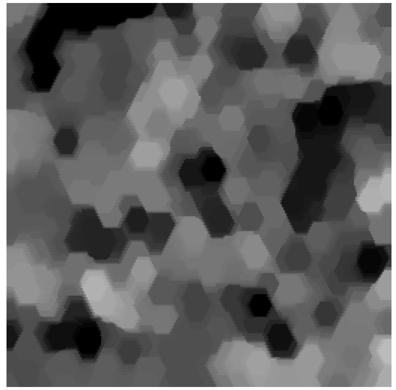
a)



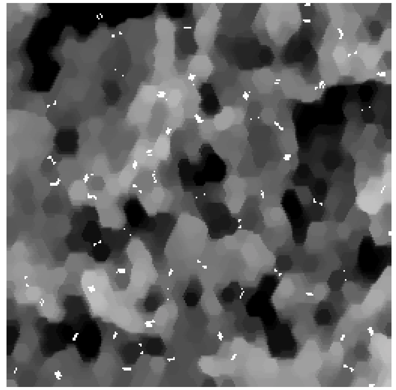
b)



c)



d)



e)

ψ_λ = filtre alterné séquentiel hexagonal de taille λ commençant par une fermeture ;

(a) := image initiale f ;

(b) := $\psi_2(f)$; (c) := $\psi_4(f)$; (d) := $\psi_7(f) = \psi_7[\psi_4(f)]$

(e) := $\psi_2[\psi_4(f)] \neq \psi_4(f)$ (les pixels différents sont marqués en blanc)

Le semi-groupe $\psi_\lambda \psi_\mu = \psi_\mu \psi_\lambda = \psi_{\sup(\lambda,\mu)}$

- la loi d'absorption $\lambda \geq \mu > 0 \Rightarrow \psi_\lambda\ 1\ \psi_\mu = \psi_\lambda$ **(1)** implique que :
  - les ψ_λ sont des idempotentes (pas forcément croissantes), d'invariants B_λ

  tels que $\lambda \geq \mu > 0 \Rightarrow \psi_\lambda(B_\mu) = B_\lambda$ **(2)**
  - mais en revanche, rel. (2) n'entraîne pas la relation (1).

- La loi supplémentaire pour obtenir un semi-groupe, à savoir

$$\lambda \geq \mu > 0 \Rightarrow \psi_\mu\ 1\ \psi_\lambda = \psi_\lambda \qquad \textbf{(3)}$$

est, elle, équivalente à

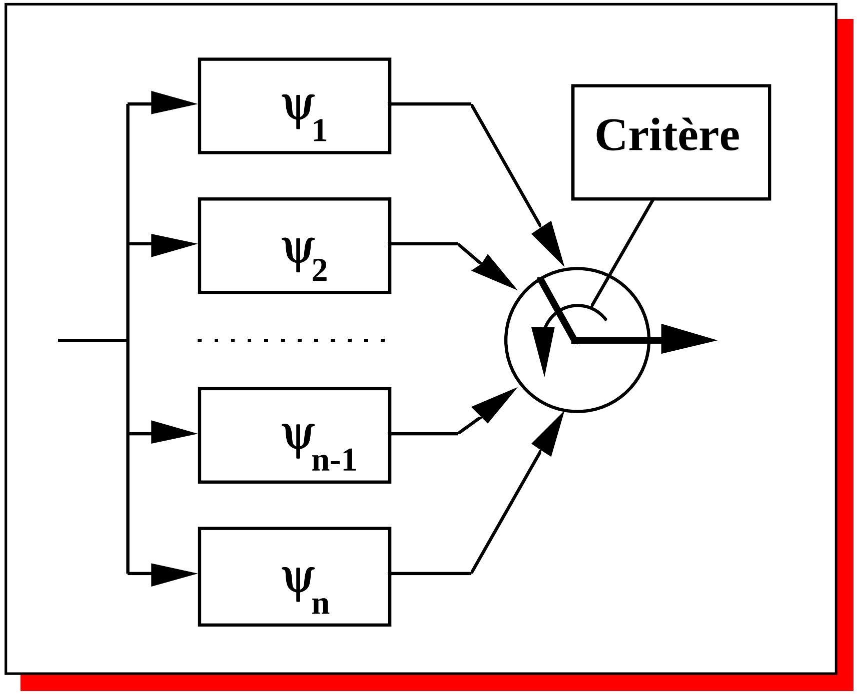
$$B_\lambda \subseteq B_\mu \qquad (4)$$

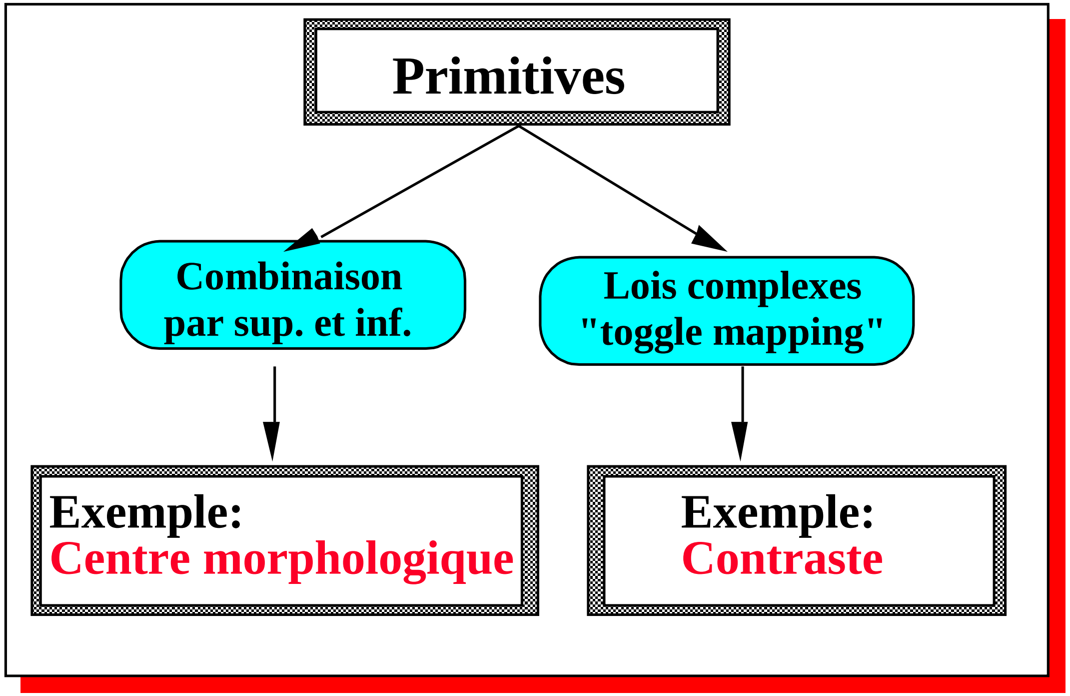
- La rel. (1) possède une signification ***markovienne***, où il suffit de connaître le niveau μ pour déterminer tous ceux qui suivent (*i.e.* les ψ_λ pour $\lambda \geq \mu$) ;
- jointe à la rel.(3), elle s'apparente à une ***bande passante*** : on peut dire alors que pour $\lambda \geq \mu$, ψ_λ « lisse plus » que ψ_μ car il réduit les mêmes détails fins sans en rajouter de nouveaux.

Combinaison par Sup et Inf

Méthodologie :

Nous considérons maintenant des jeux d'opérateurs qui agissent tous en parallèle, et dont on combine les sorties. En général, la combinaison est fondée sur le sup ou l' inf, mais on peut construire des règles plus savantes. C'est le cas des contrastes et des "toggle mapping". A part l' opérateur «centre», ces transformations ne sont en général pas croissantes.





Centre Morphologique

Le but de cette transformation est de créer des filtres autoduaux, *i.e.* de type médian.

***Définition** (J.Serra)*:

- Le centre morphologique relativement à la famille $\{\psi_i \, , i \in J\}$ se définit comme:

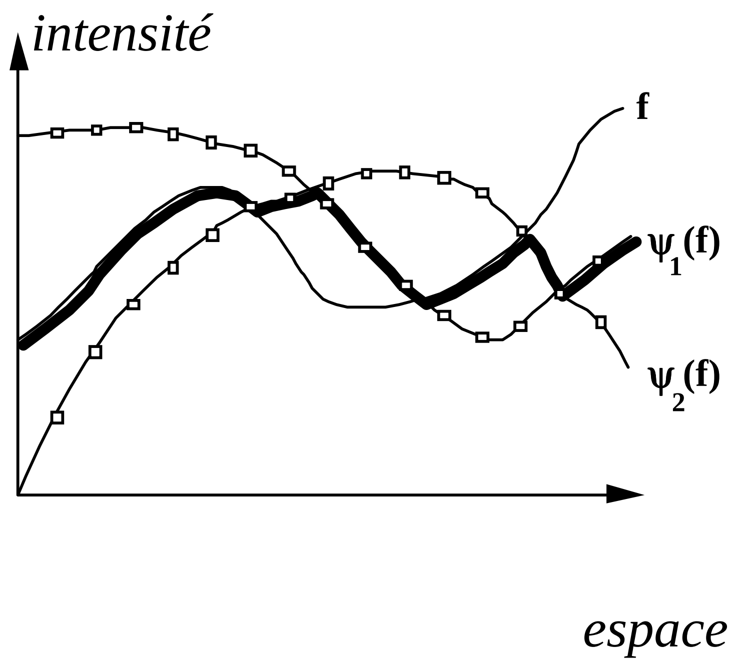
$$\beta = [I \quad (\quad \{\psi_i\}) \,] \quad (\; \{\psi_i\}$$

En d' autres termes, si au point x courant :

- tous les ψ sont plus grands que le signal original, le centre est le plus petit des y,
- tous les ψ sont plus petits que le signal original,le centre est le plus grand des ψ,
- Sinon le centre est l'original .

(On a, en termes de treillis une idée semblable à celle de moyenne dans le cadre linéaire).

Exemple de centre Morphologique



Propriétés du Centre Morphologique

Auto dualité :

- Si la famille de primitives est **globalement autoduale** (chaque primitive possède son dual dans la famille), le centre est autodual .

Force :

- Si les primitives sont des filtres forts, le centre est un filtre fort, *eg: filtres connexes par reconstruction*

Idempotence :

- En général, le centre n'est pas idempotent. Mais pour toute ouverture γ et toute fermeture φ, l'itération idempotente α du centre entre $\gamma\varphi\gamma$ et $\varphi\gamma\varphi$

$$\alpha = \beta^{n} = [(I \quad \gamma\varphi\gamma) \quad \varphi\gamma\varphi]^{n}$$

est un filtre fort (autodual si l'ouverture et la fermeture sont duales). En outre, en chaque point sa convergence est monotone :

= >Cette propriété distingue le centre morphologique de la médiane qui est également croissante et autoduale mais non idempotente, et qui peut connaître des zones oscillantes .

Opérateur de Contraste

Cette transformation est une sorte d'anti-centre morphologique. Son rôle n'est pas de fournir un signal proche du signal original, mais de créer un signal plus contrasté .

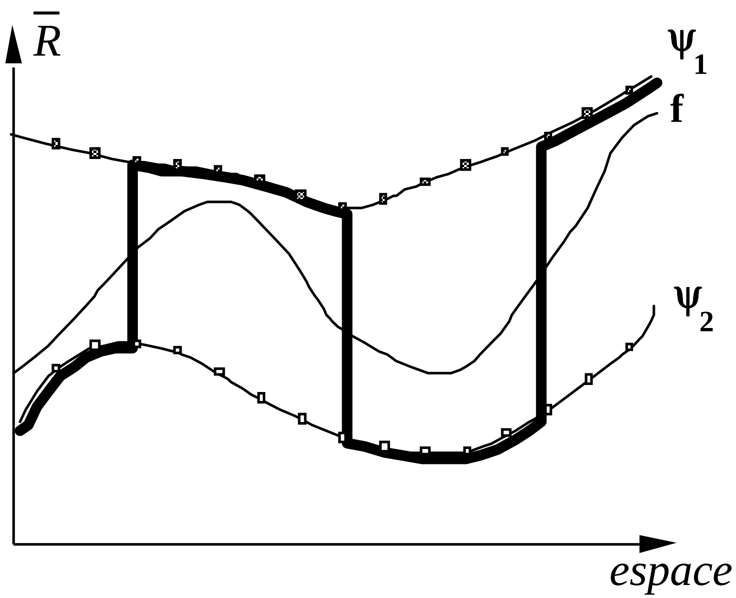
Définition :

- Etant donnés une transformation anti-extensive, une extensive et un signal original f, le résultat est la valeur de la transformation la plus proche de f.

***Propriété** (F.Meyer, J. Serra)* **:**

- Quand les primitives sont une ouverture et une fermeture, le contraste est idempotent (mais pas croissant).

Exemple



Le Treillis de l 'Activité (ensembles)

- ***Définition** (J.Serra)* : Soit o ' la classe des applications de $\sigma(E)$ dans lui-même. Considérons deux éléments α et β de o '. Si l 'on a

$$I \cap \alpha \supseteq I \cap \beta \quad \textbf{et} \quad I \cup \alpha \subseteq I \cup \beta,$$

alors β fait changer d' état plus de points que α ; elle est donc plus ***active*,** et l 'on note $\alpha 9 \beta$

- L'activité constitue une relation d 'ordre sur la classe o '. Il lui correspond le ***treillis*** dit de l'activité, où le sup et l 'inf ⌡ de la famille $\{\psi_i,\ iYI\}$ sont donnés par

$$\psi_i = [\infty \quad (\sim\psi_i)]\sim(\quad \psi_i) \quad \text{et} \quad ⌡\psi_i = [\lambda \quad (\sim\psi_i)]\sim(\quad \psi_i)$$

- Quand la famille est auto-duale, *i.e.* quand pour tout i on a $\psi_i = \infty\ \psi_j\ \infty$ pour un certain jYI alors ψ_i et $⌡\psi_i$ deviennent auto-duaux

Le Treillis de l' Activité (fonctions)

L'activité constitue un ***treillis*** dans le cas ensembliste, mais un ***inf demi-treillis*** seulement dans celui des fonctions numériques.

- ***Exemple :*** Typiquement, le centre morphologique β des (ψ_i) s 'interprête l'infimum d'activité des (ψ_i) .

- ***Supremum*** : le sup d'activité ω des applications ψ, ζ existe si et seulement si

$$\{\ x:\ \psi_x < I_x\} \quad \{\ x:\ \zeta_x > I_x\} \ = \ \varnothing \qquad \text{il vaut alors :}$$

$$\boldsymbol{\omega_x = \psi_x \ \text{ si } \ \psi_x < I_x \ ; \qquad \omega_x = \zeta_x \ \text{ si } \ \zeta_x > I_x \ ; \qquad \omega_x = I_x \ \text{ si } \ \psi_x = \zeta_x = I_x \ .}$$

- ***Exemples :***

  ~ Les augmentations de contraste par « Toggle » (IV-23);

  ~ Les nivellements de fonctions (Ch. VI)

Références

Sur la théorie du filtrage morphologique :

- L'on doit à G.Matheron la théorie du filtrage morphologique {MAT88a}. On en trouvera deux présentations plus simples, et illustrées dans {MEY89c} {SER92c} ainsi qu'une étude plus formelle dans {RON91}.
- Les liens avec le filtrage linéaire sont traitée dans {MAR87b}

Sur les filtres alternés séquentiels :

- les filtres alternés séquentiels ont été proposés par S.R.Sternberg {STE83} et la théorie correspondante construite par J.Serra {SER88}.
- L'extension du chapeau haut de forme provient de {SAL91}.

Sur le treillis de l'activité :

- Les notions de centre et de treillis de l'activité font leur apparition dans {SER88,ch.8}; les deux concepts principaux qui en dérivent sont présentés dans {SER89} (toggles), et dans {MEY89b} (contrastes).