Chapitre VI

Connexions et fonctions numériques

Concepts :

-> Extension aux fonctions

-> Opérateurs connexes

-> Géodésie numérique

-> Nivellements et auto-dualité

Applications :

-> Etude des extrema

-> Préservation des contours

-> Filtres forts

-> Segmentation

Passage au Numérique

Trois passages du binaire au numérique sont à envisager.

- ***La géodésie***

C'est le plus simple. Dilatation et érosion étant croissantes, il suffit de définir les opérations numériques via leurs correspondantes binaires, appliquées seuil par seuil.

- ***Les applications***

Ce ne sont plus les mêmes qu'en binaire. Priorité est donnée ici au traitement des ***extrema*** et à la ***préservation des contours***.

- ***La connexité***

La tâche est plus difficile. Il faut :

- soit généraliser le concept de connexion aux treillis complets, et trouver des ***connexions adaptées*** aux fonctions numériques

- soit partir des fonctions pour induire des connexions ***ensemblistes*** sur leurs supports. On ne présentera ici que ce second point de vue, plus simple, mais moins puissant.

Treillis de Fonctions (*rappel*)

- E étant un ensemble arbitraire, et T désignant $\overline{\mathbf{R}}$, $\overline{\mathbf{Z}}$ ou une de leurs parties fermées, les fonctions f : E $\rightarrow$ T forment à leur tour un **treillis** , noté T^E, pour **l'ordre produit** :

  $$f \leq g \qquad \text{ssi} \qquad f(x) \leq g(x) \qquad \text{pour tous } x \in E ,$$

  et où le sup et l'inf dérivent des sup et inf numériques, *i.e.*

  $$\mathbf{(\ \ f_i\,)(x) = \ \ f_i\,(x) \qquad (\ \ f_i\,)(x) = \ \ f_i\,(x)\ .}$$

  On convient de noter 0 à la fois le minimum dans T et dans T^E

- Dans T^E, les fonctions **impulsions** :

  $$\mathbf{k_{x,t}\,(y) \ = \ t \quad si \quad x = y \quad ; \quad k_{x,t}\,(y) \ = \ 0 \quad si \quad x \neq y}$$

  sont **sup-génératrices** *i.e.* tout f : E $\rightarrow$ T est un supremum d'impulsions.

- La démarche précédente s' étend directement aux produits de treillis de type T, c'est à dire aux ***fonctions multivariées*** (*e.g.* couleur).

Treillis des partitions (*rappel*)

Définition : On appelle **Partition** d'un espace E toute application D: E $\Delta\sigma$(E) telle que

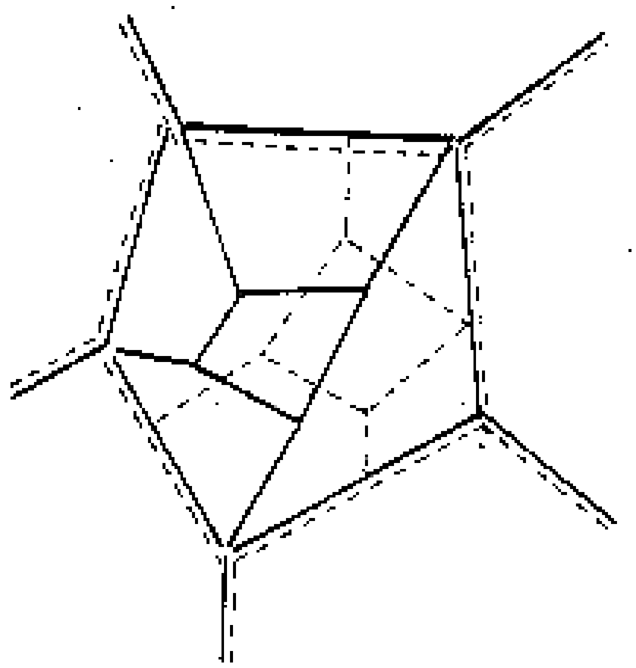
(*i*) $\forall$ **x** $\in$ **E ,** **x** $\in$ **D(x)**

(*ii*) $\forall$ **(x, y)** $\in$ **E,**

soit **D(x) = D(y)**

soit **D(x) D(y) =** $\emptyset$

- Les partitions de E forment un **treillis** γ pour l'ordre selon lequel D $\leq$ D' quand chaque classe de D est incluse dans une classe de D'. Le plus grand élément de γ est E lui-même, et le plus petit celui qui pulvérise E en la totalité de ses points.



Le* sup *des deux types de cellules est le pentagone où leurs frontières coïncident.

Leur* inf*, plus simple, s'obtient par intersection des cellules.

Connexions induites par des fonctions

But : Soit ϕ une connexion sur $\sigma(E)$ et f : E $\rightarrow$ T. Nous voulons construire un critère régional σ sur f tel que :

(i) **$\forall$ x $\in$ E , f(x) vérifie σ ;**

(ii) **$\forall$ A, B $\in$ ϕ , *avec* A B $\neq \varnothing$,**

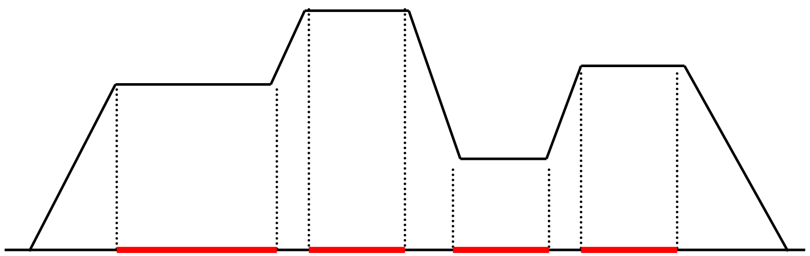
si f vérifie σ sur A et sur B,

alors f vérifie σ sur A~B .

Résultat : Une telle propriété génère une sous-classe ϕ_σ de ϕ qui est une seconde connexion sur $\sigma(E)$.

En particulier, ϕ_σ ***partitionne*** l'espace E classes maximales vérifiant le critère σ.

Exemple : Les zones où f est constante.

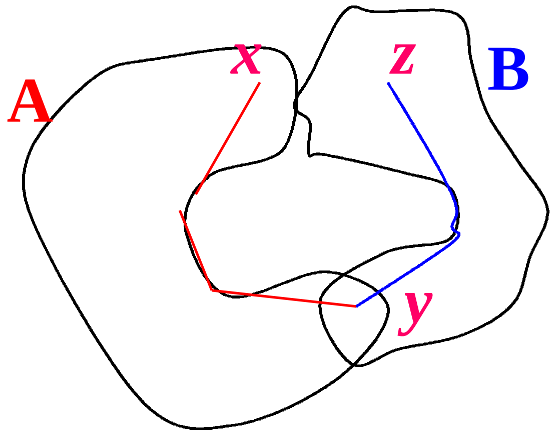


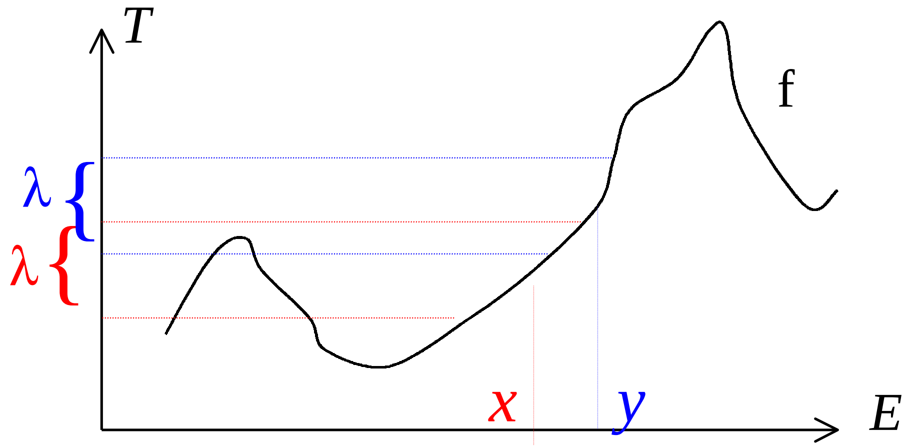
Les composantes connexes de $\sigma(R^1)$ according ϕ_σ sont soit

- les segments en rouge;

- ou, ailleurs, les points .

Connexion lisse





Connexion lisse : E = R^n, muni de la ***connexité par arcs*** , et la fonction f : E $\rightarrow$ T est fixée. la classe $\phi \in \sigma(R^n)$ composée

i) des singletons, plus de l 'ensemble vide ;

ii) de tous les ouverts $Y \in \sigma(R^n)$ tels que f est k-Lipschitz le long de tous les chemins inclus dans Y,

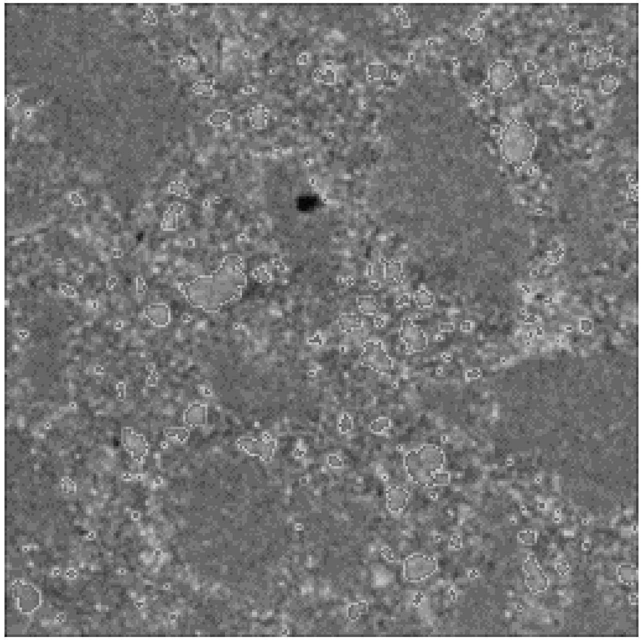
constitue une seconde connexion sur $\sigma(R^n)$, appelée ***"connexion lisse".***

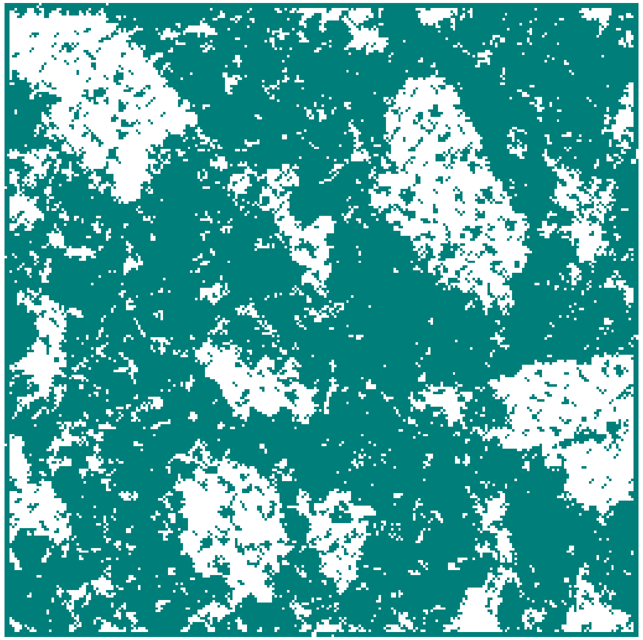
Implémentation : Soit H(x) est le ***cercle*** unité de Z^2 au point x. La partition associée à ϕ admet pour classes non ponctuelles les composantes connexes de

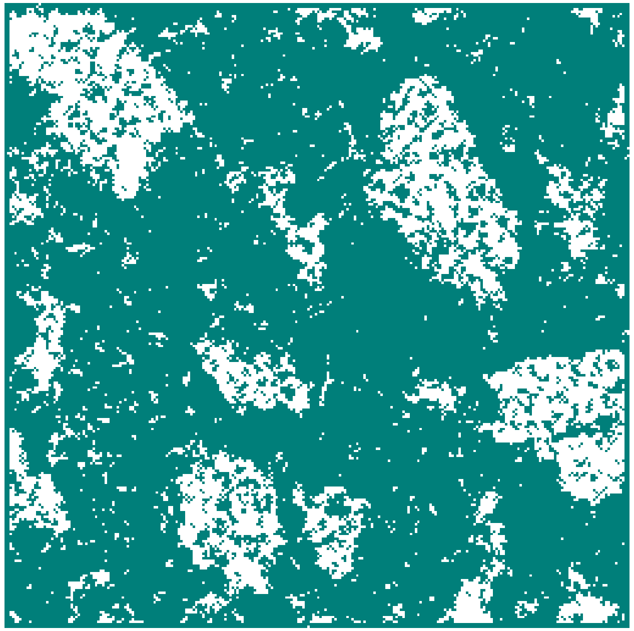
$$\mathbf{X = \{ x\ YE\ ;\ sup\{ | f(x) - f(y) | , y\ Y\ H(x)\} \leq k\ \}}$$

Exemple de connexion lisse (I)

Commentaire : ***Les deux phases de la micrographie ne peuvent pas être séparées par seuillage. Les connexions lisses les classent selon leur rugosité.***







a) Image initiale: micrographie électronique de roche

b) connexion lisse de paramètre 7

c) connexion lisse de paramètre 6

(- en sombre, les composantes connexes ponctuelles
- en blanc, chaque particule est base d'un cylindre)

Connexion par sauts

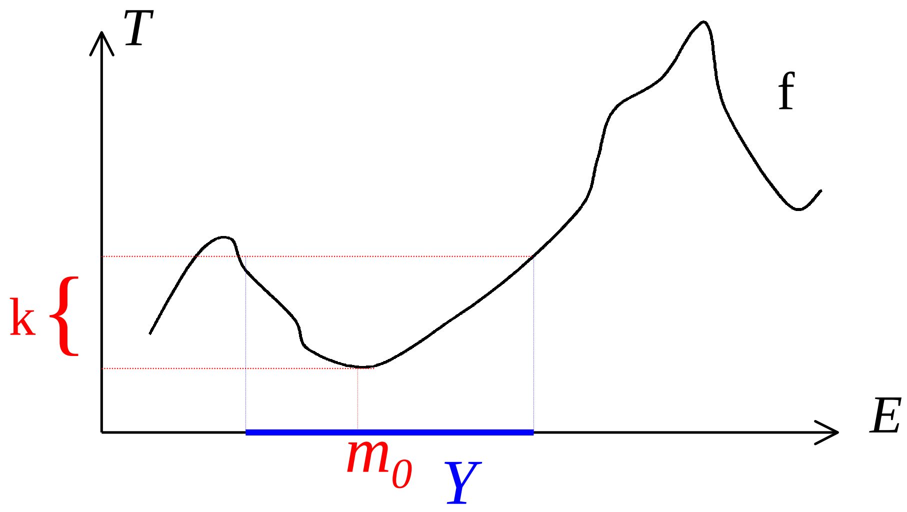
Connection par sauts : E = R^n, muni de la ***connexité par arcs*** , et la fonction f : E $\rightarrow$ T est fixée. La classe $\phi \in \sigma(R^n)$ composée :

i) des singletons, plus de l 'ensemble vide ;

*ii)*de tous les ensembles connexes contenant un minimum, et où les valeurs de f sont à moins de k au dessus du minimum ;

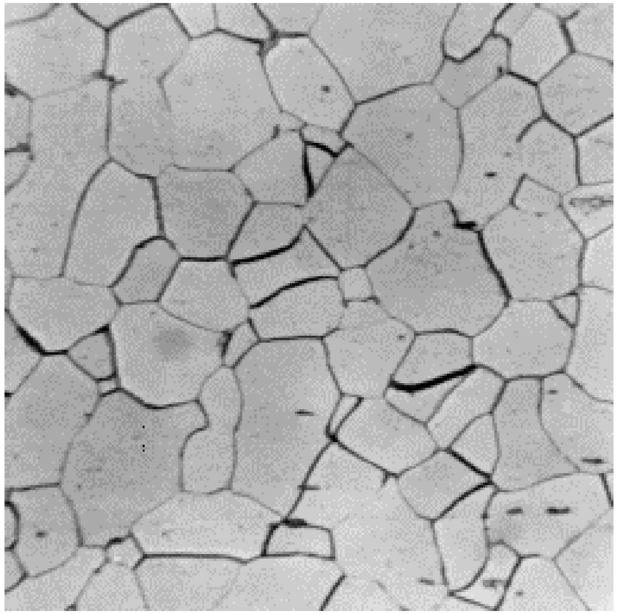
constitue une seconde connexion sur $\sigma(R^n)$, appelée ***"connexion par sauts à partir des minima ".***

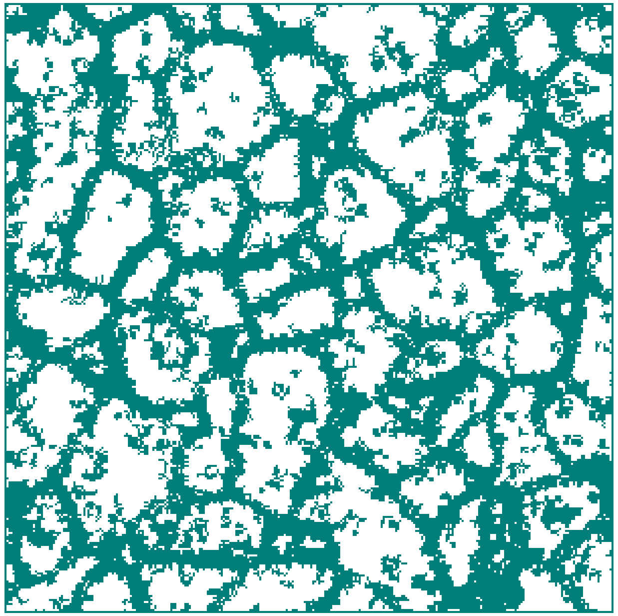
De la même manière, on peut partir des *maxima*, ou prendre l'intersection des deux connexions .

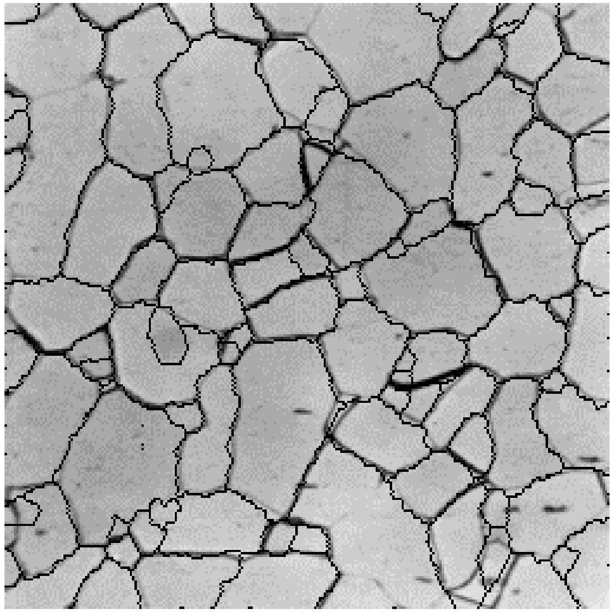


Composante connexe dans la connexion par sauts de valeur k à partir des minima .

Exemple de connexion par sauts







a) Image initiale : section polie de grains d'alumine

b) connexion par sauts d'amplitude 12:
- en sombre, ensemble des composantes connexes ponctuelles
- en blanc, bases (connexes) des cylindres

c) Skiz de la réunion des points sombres de l' image b)

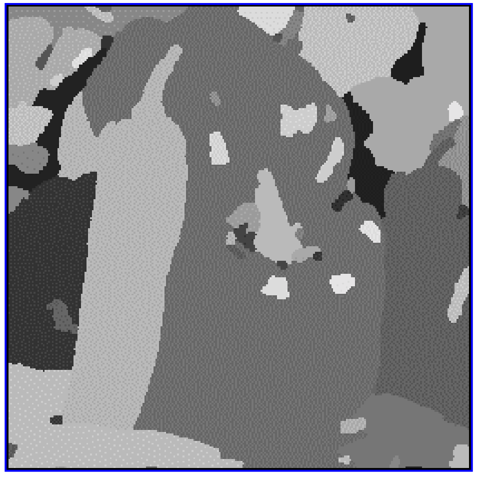
Opérateurs connexes

Définition :

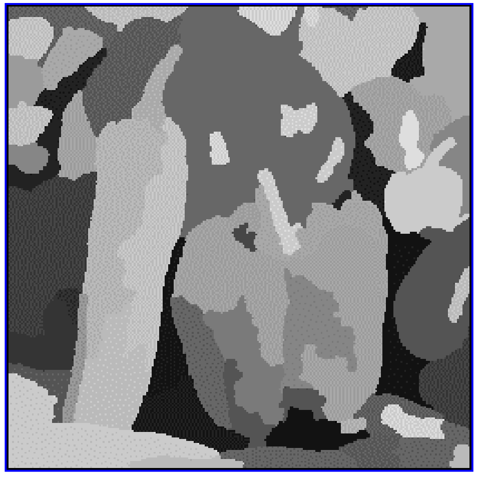
- Un opérateur ψ : $T^E \Delta T^E$ sur les fonctions numériques est dit ***connexe*** (pour un critère σ) quand la partition de E par ψ(f) est plus grande que celle de E par f.

a)

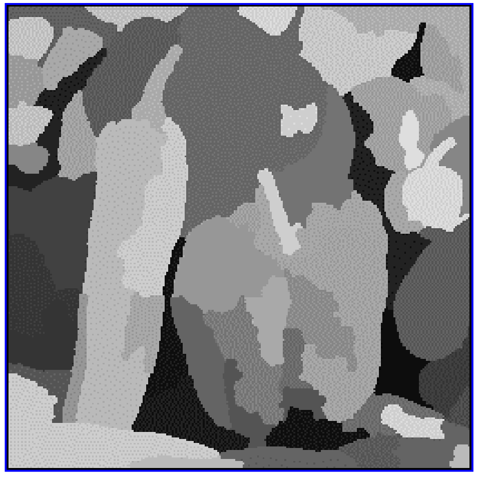
b)



c)



d)



Trois images mosaïques, dues à C. Vachier, obtenues par fusion des régions de la LPE du gradient de ***a):***

b) par dynamique ; ***c) selon les aires*** ; ***d) par volumes*** .

Opérateurs connexes, planaires, et croissants

- A partir d'ici, nous considérons uniquement

  i) les critères portant sur les **zones plates** des fonctions ;

  ii) les opérateurs $\psi : T^E \Delta T^E$ qui sont **planaires** et **croissants** .

Propriétés de base :

- Tout opérateur connexe **binaire** (resp. et croissant) induit sur T^E, via les section planes, un ***unique*** opérateur connexe (resp. et croissant) (*H. Heijmans*) ;
- En particulier, les démarches géodesiques s'étendent au cas numérique ;
- Leurs éventuelles propriétés d'être des filtres forts, de constituer des semi-groupes, etc.. sont transmises aux opérateurs connexes induits sur T^E.

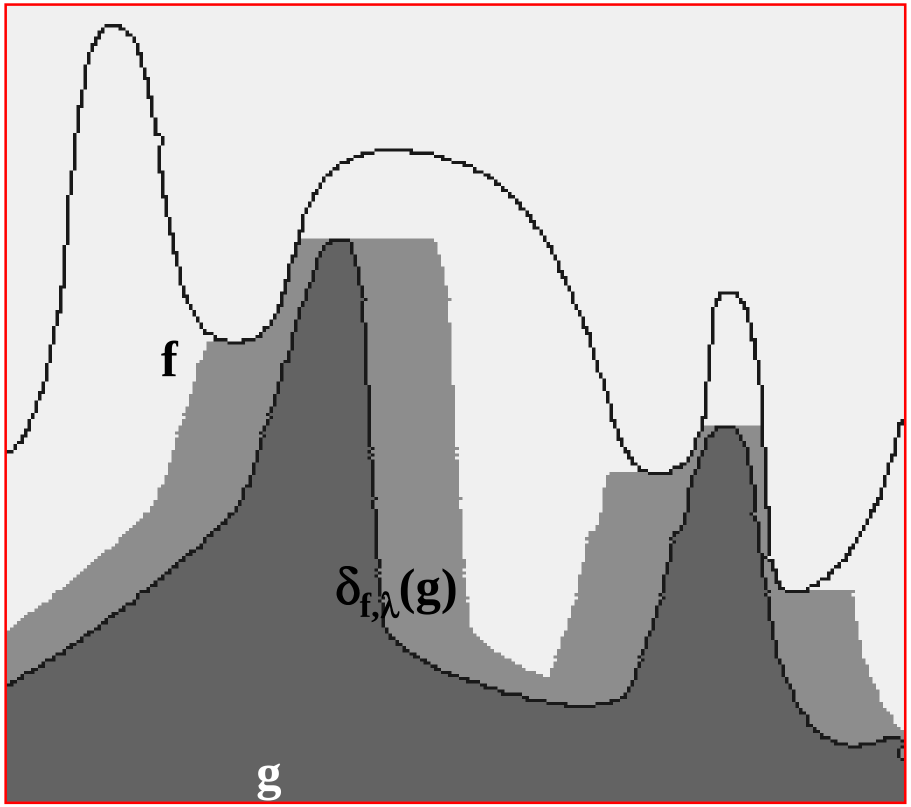
On remarquera qu'une opération peut être anti-extensive sur T^E, et extensive sur le treillis γ des partitions (les ouvertures par reconstruction, *par ex.*).

Dilatations Géodésiques Numériques (I)

Soient f,g deux fonctions numériques de R^d dans R, telles que $g \leq f$.

- La dilatation géodésique binaire de taille λ appliquée seuil par seuil aux sections de f marquées par celles de g induit sur f une dilatation $\delta_{f,\lambda}(g)$ (*S.Beucher*).

- En d 'autres termes (*L.Vincent*), le sous-graphe de $\delta_{f,\lambda}(g)$ est formé des points du sous-graphe de f reliés au sous-graphe de g par un chemin:
  - non descendant;
  - de longueur $\leq \lambda$.



dilatation géodésique numérique de g relativement à f

Dilatations Géodésiques Numériques (II)

- La version digitale part de la dilatation géodésique de taille unité

$$\delta_f(g) = \inf(g + B, f)$$

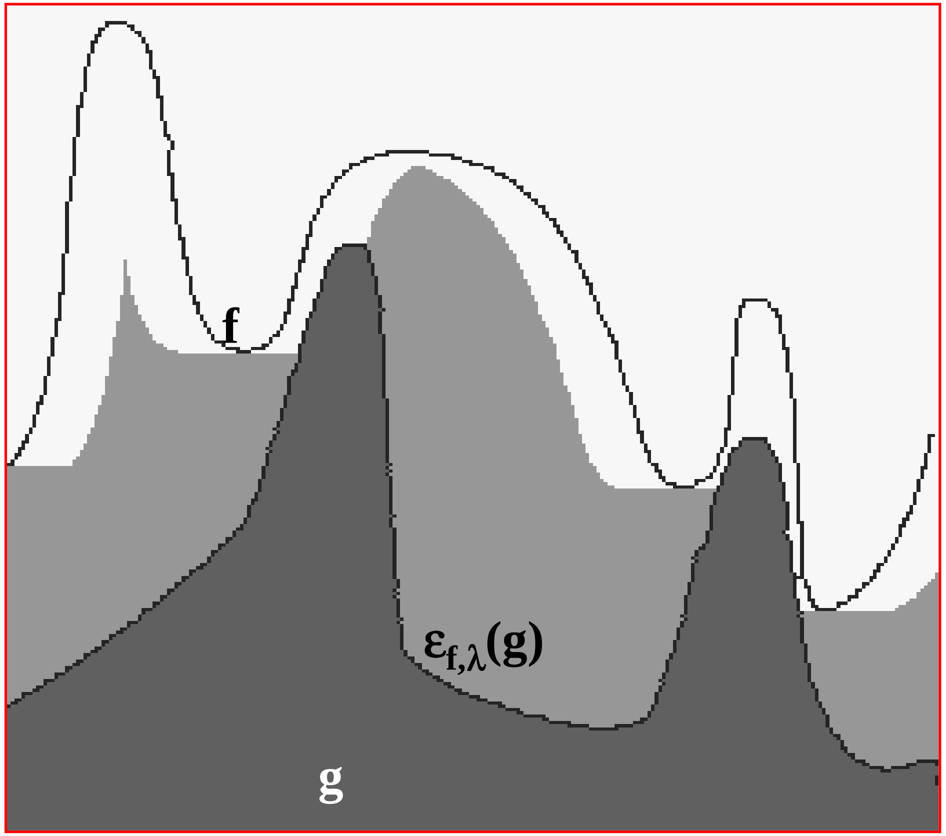
que l'on itère n fois pour obtenir la taille n

$$\delta_{f,n}(g) = \delta_f^{(n)}(g) = \delta_f(\delta_f \ .... (\delta_f(g))).$$

- Les érosions euclidienne et digitale se déduisent des dilatations correspondantes par la dualité

$$\varepsilon_f(g) = m - \delta_f(m - g),$$

différente du cas géodésique binaire.



érosion géodésique numérique de f relativement à g

Reconstruction Numérique

- L'ouverture de f par reconstruction selon g, est le supremum des dilatation géodésiques de g dans f, considéré comme fonction de f:

$$\gamma^{rec}(f\,;\,g) = \{\ \delta_{f,\lambda}(g)\ ,\ \lambda>0\ \}$$

avec pour fermeture duale ***pour le négatif***

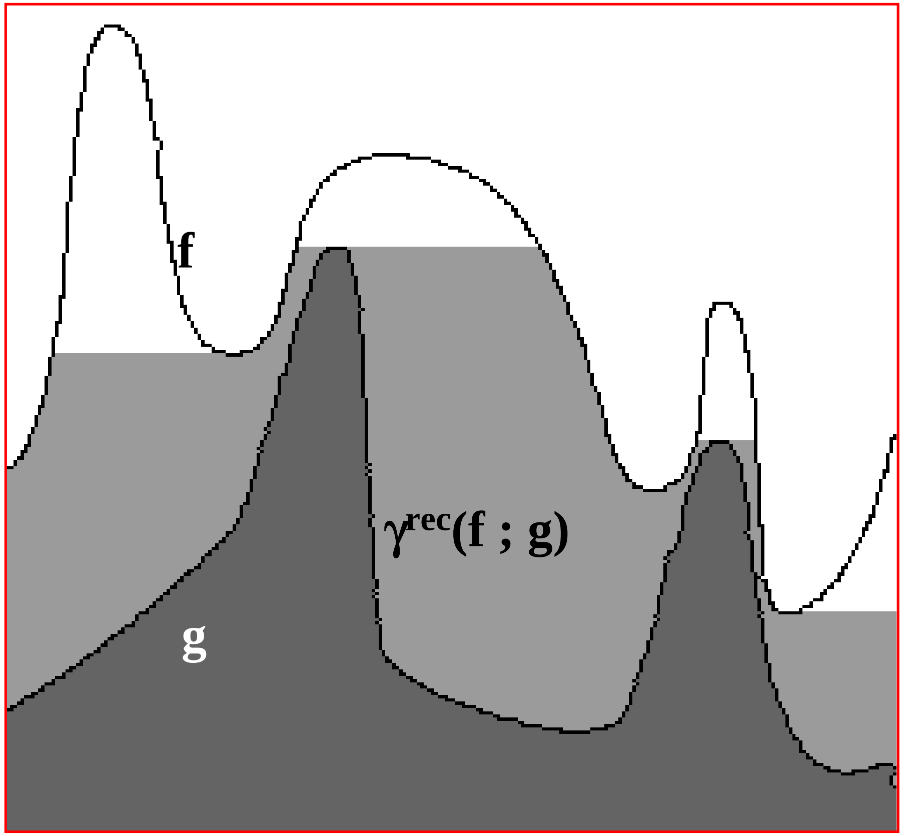
$$\varphi^{rec}(f\,;\,g) = m - \gamma^{rec}(m - f\,;\,m - g)$$

- Trois exemples sont très utiles:

- *L'* ***érosion-reconstruction****;*

- *Le* **swamping***, reconstruction d'une fonction marquée par ses maxima;*

- *L'* ***ouverture par contraste****, qui mène à l'extraction des maxima.*



Reconstruction numérique de g dans f

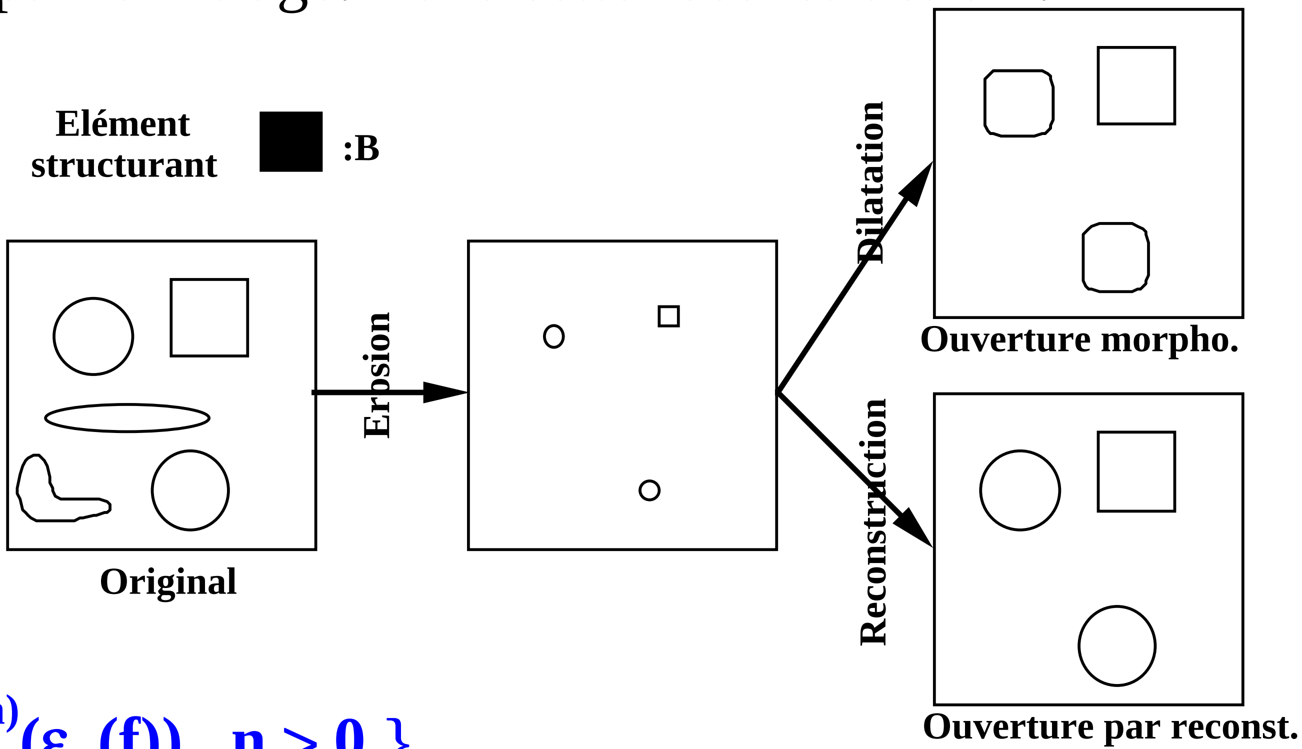
Erosion-Reconstruction

Objectif : Préservation des contours

Alors que l'ouverture par érosion-dilatation modifie les contours des éléments, l'ouverture par reconstruction les restitue sans changement s'ils n'ont pas été éliminés par le filtrage. Dans cette reconstruction :

- la référence est le **signal original**,

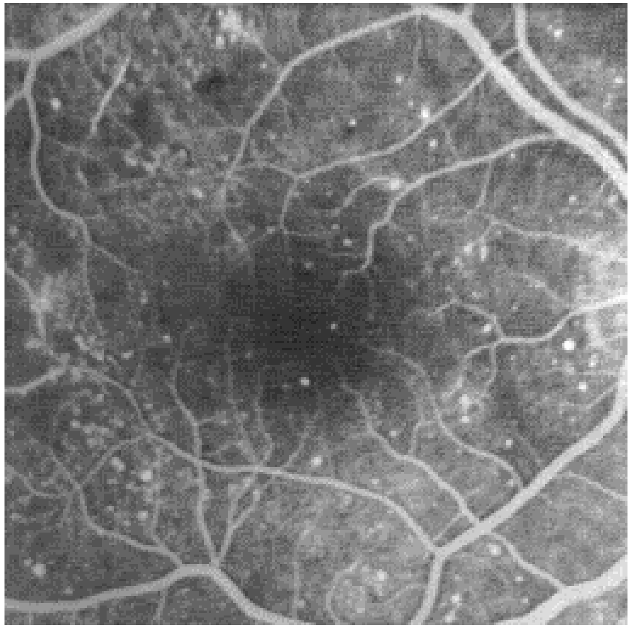
- le marqueur est un **érodé** de la référence:



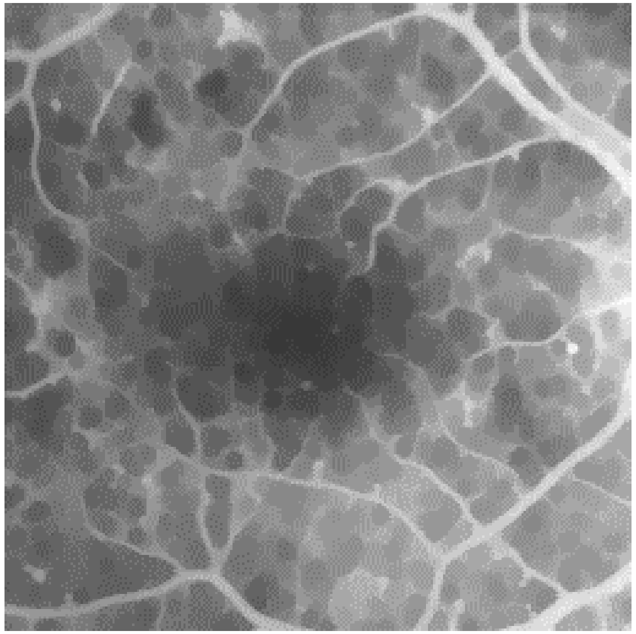
$$\gamma^{rec}(f ; \varepsilon_B(f)) = \{ \delta_f^{(n)}(\varepsilon_B(f)) , n > 0 \}$$

Application à l'examen du fond de l’oeil

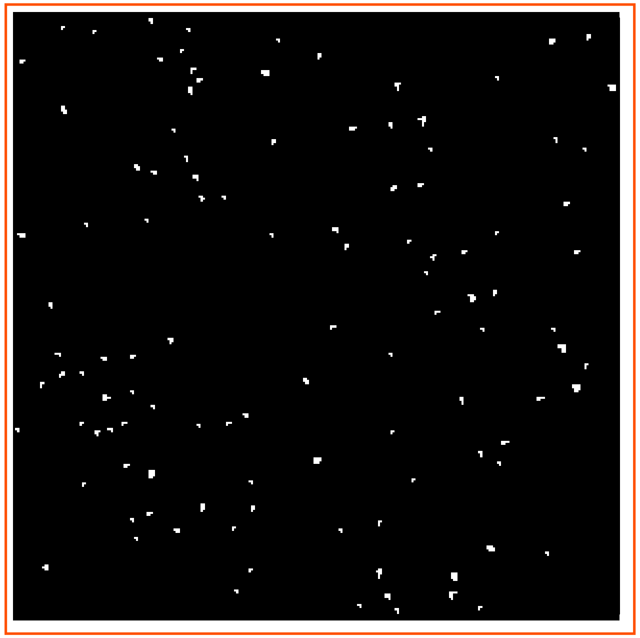
Commentaire: ***Le but est d' extraire et de localiser les anévrismes. Les opérateurs par reconstruction garantissent qu'on retire*** **exclusivement** ***les pics petits et isolés***
(étude de F. Zana et J.C. Klein)



a) Image initiale



b) fermeture par dilatation-reconstruction suivie d'ouverture par érosion- reconstruction



c) différence a) moins b) suivie d'un seuillage

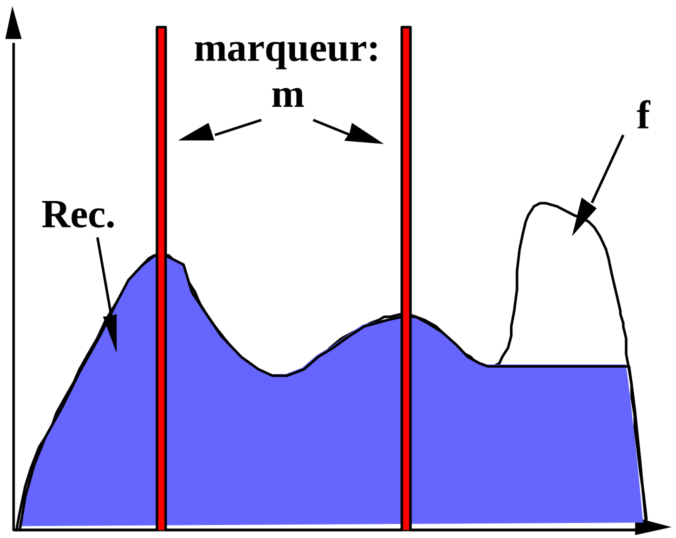
Swamping (reconstruction par marqueurs)

Objectif :

- Reconfigurer les maxima d'une fonction par ouverture connexe (par reconstruction)

Moyens :

- On utilise des **marqueurs** *i.e.* une fonction à 2 niveaux (0,m) qui identifie les pics à garder.
- Le procédé de reconstruction crée une fonction égale à l'originale dans les zones d'intérêt et élimine les extrema non marqués
- Le résultat fournit la plus grande fonction ≤f et possédant des maxima aux points marqués. On le nomme le **swamping** de f par ouverture (*S.Beucher, F.Meyer*), cf. la version par fermeture in X-6.



Swamping de f par le marqueur m

Exemple de swamping: ouverture de contraste

Objectif :

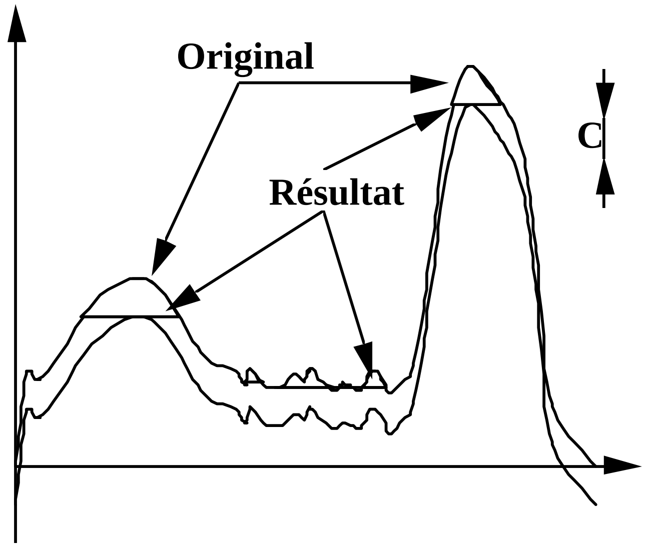
Les ouvertures morphologiques ou par érosion-reconstruction éliminent les composantes en fonction de leur structure spatiale (taille, forme). Le but du filtre de contraste est d'éliminer les composantes de **faible contraste** (*M.Grimaud*).

Moyens :

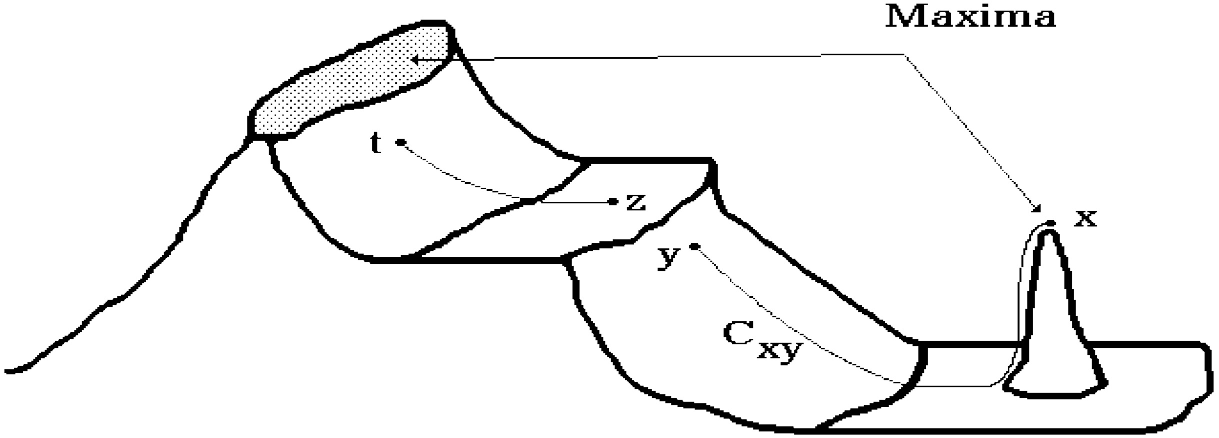
Cette transformation s'interprète au moyen d' une reconstruction où:

- la référence est le **signal original**;
- le marqueur de l'ouverture est le signal original **diminué d'une constante** c.

$$\gamma^{rec}(f\,;\,f\text{-}c) = \{\ \delta_f^{(n)}(f\text{-}c)\ ,\ n > 0\ \}$$



Maxima et Ouverture de Contraste



- Un point x du graphe de f est sur un **maximum** quand aucun chemin qui le joint aux autres points du graphe n'est strictement ascendant. Les maxima sont des parties connexes plates entourées de points situés tous plus bas.
- Ils sont donc obtenus par résidus de **l'ouverture de contraste**, lorsque la valeur du décalage est 1.
- Plus généralement, le résidus associé au décalage c extrait les maxima entourés d'une zone descendante de hauteur 8c. On les nomme ***maxima étendus*** *(S. Beucher).*

Filtres forts par reconstruction

***Proposition**(J.Serra)*: Soit γ^{rec} une ouverture par reconstruction sur $T^{\mathbf{E}}$ qui ne crée pas de pores, et soit φ^{rec} la fermeture duale pour le complément d'une ouverture de ce type (mais pas nécessairement γ^{rec}). Alors :

$\boldsymbol{\nu = \varphi^{rec}\,\gamma^{rec}}$ et $\boldsymbol{\mu = \gamma^{rec}\,\varphi^{rec}}$ sont des **filtres forts.**

[Tout pore de X, d'abord bouché par $\varphi^{rec}(X)$, puis restitué par $\gamma^{rec}(X)$ devient pore de $X \cap \gamma^{rec}\varphi^{rec}(X)$, et il n'y en a pas d'autres d'où $\mu(I \cap \mu) = \mu$.]

En particulier, $I\ \gamma^{rec}\varphi^{rec}$ est une **ouverture** (appréciée pour son top-hat quand on l'étend aux fonctions numériques, *cf*. IV-9).

***Proposition** (J.Crespo, J.Serra)* **:** Soient $\{\gamma_i^{rec}\}$ et $\{\varphi_i^{rec}\}$ une granulométrie et une anti-granulométrie du type précédent, alors :

1) Les filtres alternés séquentiels associés N_i et M_i sont **forts**;et

2) Les deux opérateurs $\boldsymbol{\Psi_n = \{\varphi_i\gamma_i,\ 1 \leq i \leq n\}}$ et $\boldsymbol{\Theta_n = \{\gamma_i\ \varphi_i\ ,\ 1 \leq i \leq n\}}$ sont aussi des **filtres forts**.

Semi-groupes de filtres par reconstruction

Proposition *(Ph. Salembier, J.Serra)*: Soit γ^{rec} une ouverture par reconstruction sur E et φ une fermeture qui ne crée pas de composantes connexes. Alors :

$$\varphi\,\gamma^{rec} \leq \gamma^{rec}\varphi \quad (\Leftrightarrow \gamma^{rec}\varphi\,\gamma^{rec} = \varphi\,\gamma^{rec} \Leftrightarrow \varphi\,\gamma^{rec}\varphi = \gamma^{rec}\varphi)$$

[$\varphi\gamma^{rec}$ est invariant pour γ^{rec} car φ, extensive, ne peut qu'élargir les composantes connexes déjà existantes de $\gamma^{rec}(X)$]

Proposition *(Ph. Salembier, J.Serra)*: Soit $\{\gamma_i^{rec}\}$ une granulométrie et $\{\varphi_i\}$ une anti-granulométrie des types précédents . Alors :

1) pour tout i, les deux produits de composition $\nu_i = \varphi_i\gamma_i^{rec}$ et $\mu_i = \gamma_i^{rec}\,\varphi_i$ vérifient les relations

$$j \geq i \quad \Rightarrow \quad \nu_i\nu_j = \nu_j \qquad \text{et} \qquad \mu_i\,\mu_j = \mu_j$$

[On a toujours $j \geq i \Rightarrow \mu_j \leq \mu_i\,\mu_j$. De plus, ici

$$\gamma_j^{rec}\varphi_j = \gamma_i^{rec}\gamma_j^{rec}\varphi_j = \gamma_i^{rec}\varphi_j\,\gamma_j^{rec}\varphi_j \geq \gamma_i^{rec}\varphi_i\,\gamma_j^{rec}\varphi_j \;]$$

2) En conséquence, les A.S.F. associés N_i et M_i forment le **semi groupe**

$$N_j\,N_i = N_i\,N_j = N_{\sup(i,j)} \quad ; \qquad M_j\,M_i = M_i\,M_j = M_{\sup(i,j)}$$

Exemple d’une pyramide de F.A.S connexes

Connexion par zones plates (i.e. $\varphi = 0$).
Chaque contour est préservé ou supprimé, mais jamais déformé : la partition initiale croit par action des filtres successifs, qui sont forts et forment un semi groupe

Image initiale

FAS de taille 1

FAS de taille 4

FAS de taille 8

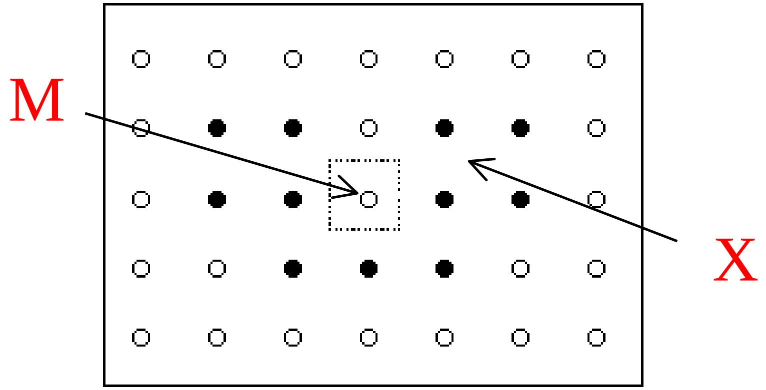
(éléments structurants hexagonaux)

Adjacence

- On dérive des ouvertures par marqueur un opérateur *auto-dual*, nommé nivellement, du à *F.Meyer*. Introduisons d'abord la notion d'adjacence :

- ***Adjacence** (J. Serra):* Soit ϕ une connexion sur $\sigma(E)$. Les ensembles $X,Y \in \sigma(E)$ sont dits adjacents quand $X \sim Y$ est connexe, alors que X et Y sont disjoints.

Pour la connexion digitale définie par l'ouverture de carré 2x2 , le marqueur ponctuel M de la figure bien qu 'adjacent à aucun grain de l'ensemble X, l'est à X lui-même.



- ***Protection contre l'adjacence :*** la connexion ϕ *protège de l'adjacence*, quand pour tout élément $M \in \sigma(E)$ et toute famille $\{B_i \,;\, i \in I\}$ dans ϕ, il est équivalent que M ne soit adjacent à aucun des B_i ou à leur réunion $\sim B_i$.

Nivellements

- Etant donné un ensemble marqueur M, considérons $A \in \sigma(E)$ et soit

  ~ $\gamma_M(A)$ la réunion des grains de A qui rencontrent M ou qui lui sont adjacents (disjoints de M mais dont l'union avec un grain de M est connexe)

  ~ $\varphi_M(A)$ la réunion de A et des pores inclus dans M, et non adjacents à M^c

- ***Définition*** *(F. Meyer) :* On appelle **nivellement λ** le ***supremum d 'activité***

$$\lambda = \gamma_M \quad \varphi_M$$

  i.e. $\lambda(A) \quad A = \gamma_M \quad A$, et $\lambda(A) \quad A^c = \varphi_M \quad A^c$;

  λ agit sur A comme l'ouverture γ_M, et sur A^c comme la fermeture φ_M.

- ***Auto-dualité:*** L'application $(A,M)\Delta\lambda\ (A,M)$ de $\sigma(E)\times\sigma(E)\Delta\sigma(E)$ est auto-duale. Si M dépend lui même de A, *i.e.* $M= \mu(A)$, alors le nivellement, en tant que fonction de A seulement, est auto-dual ssi μ l'est déjà.

- L'extension du nivellement aux fonctions numériques se note

$$\mathbf{(\,f\,,\,g\,)\Delta\Lambda\,(\,f\,,\,g\,)}$$

Propriétés des nivellements

Voici quelques propriétés des nivellements qui justifient leur intérêt:

- ***Proposition****(F.Meyer)***:** le nivellement (A,M)Δ λ (A,M) est une application croissante de σ(E)× σ(E)Δσ(E) qui admet l'expression equivalente:

$$\lambda = \gamma_M \sim (\infty \quad \varphi_M)$$

- ***Proposition****(G.Matheron)***:** Les deux applications

  ~ AΔ λ_M(A) , à M fixé, et

  ~ MΔ λ_A(M) , à A fixé,

  sont idempotentes (et sont donc des ***filtres connexes*** sur σ(E)) .

- ***Proposition****(J.Serra)***:** Le nivellement AΔ λ_M(A) est un filtre fort, produit commutatif de ses deux primitives, *i.e.*

$$\lambda = \gamma_M \ 1 \quad \varphi_M = \varphi_M \ 1 \ \ \gamma_M$$

  ssi la connexion φ protège de l'adjacence ; λ vérifie alors la relation de stabilité $\gamma_x(I \sim \lambda) = \gamma_x \sim \gamma_x \lambda$, préservant le sens des variations grains/pores

Exemple

Image initiale ***: Joueur de fifre, de E. MANET***

Marqueurs **:** ***filtres alternés carrés de taille 2 (non auto-dual)***

Image initiale, 83.776 pels
dont 34.835 en zones plates

Nivellement selon $\varphi\,\gamma$
zones plates : 53.813

Nivellement selon $\gamma\,\varphi$
zones plates : 53.858

Dualité pour les fonctions

- Notons 0 et *m* les extrema numériques (*i.e.* ceux de l 'axe des gris T). L'involution qui remplace l'opération de complément $f \rightarrow m - f$. Or il vient pour le nivellement Λ

$$m - \Lambda (m - f , m - g) = \Lambda (f, g) \qquad (1)$$

ce qui signifie que l 'application $f, g \rightarrow \Lambda(f, g)$ est ***toujours*** auto-duale.

- De plus, si g se déduit de f par une opération auto -duale, *i.e.* g = g(f), avec

$$m - g (m - f) = g (f) \qquad (2)$$

(***convolution, médiane***), alors le nivellement $f \rightarrow \Lambda(f, g(f))$ est auto-dual.

- On remarquera que la rel. (2) est différente de l'invariance par involution

$$g (m - f) = g (f)$$

Cette dernière, vérifiée par le module du gradient, or par les extrema étendus, par exemple, n'entraine pas l'auto-dualité de $f \rightarrow \Lambda(f)$.

Exemple de dualité

Marqueur : ***réunion des maxima et minima de dynamique 8 h***

(invariance pour le complément).

Image initiale
zones plates: 34.835

h = 80
zones plates : 57.445

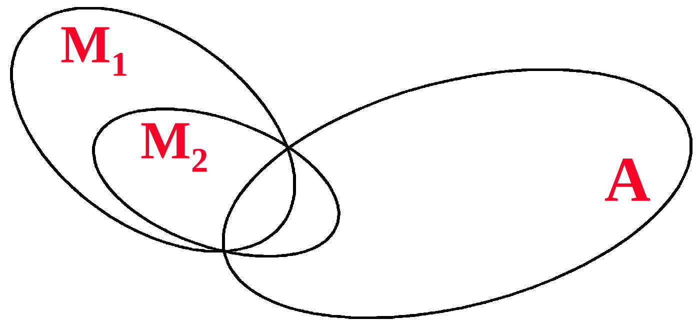
Nivellements comme fonctions du marqueur

- Etudions l'application $M\Delta\ \lambda_A(M)$ quand le marqueur M varie, à A fixé.

L'ensemble A génère l'ordre 9_A de la A-activité, sur $\sigma(E)$, par les relations

$$\mathbf{M_1\ 9_A\ M_2}$$

Si M_1 rencontre A ou lui est adjacent,
alors M_2 rencontre A ou lui est adjacent
et si M_2 rencontre A^c ou lui est adjacent,
alors M_1 rencontre A^c ou lui est adjacent .



- *Proposition (J. Serra)*: Si $M_1\ 9_A\ M_2$ il vient

$$\lambda_{M1}\ \lambda_{M2}\ (A) = \lambda_{M2}\ \lambda_{M1}\ (A) = \lambda_{M2}(A)$$

Cette pyramide **granulométrique** *permet de doser l'activité des marqueurs.*

Exemple de Pyramide

Marqueur (auto-dual): *image initiale, après avoir attribué zéro aux h-extrema*

Image initiale
zones plates : 34.835

Nivellement pour h = 50
zones plates : 58.158

Nivellement pour h = 80
zones plates : 59.178

Exemple de réduction de bruit

Marqueur (auto-dual) **:** ***Convoluée gaussienne de taille 5 de l'image initiale***

a) Image initiale, plus
10.000 points de bruit

b) Convolution
gaussienne of a)

c) Nivellement de a) par b)
zones plates : 46.900

Références

Sur la géodésie :

- Les éléments essentiels de la géodésie numérique ont été découverts par S.Beucher et F.Meyer dans les années 80, et publiés dans {BEU90} et {MEY90}. L.Vincent {VIN93}, P. Soille {SOI91} et C.Vachier {VAC95} y l'ont complétée d'importantes contributions algorithmiques.

Sur les opérateurs connexes :

- Dans {MEY90} et {SAL92}, la reconstruction est utilisée pour modifier l'homotopie d'une fonction, en multi-résolution. L'ouverture par contraste est introduite dans {GRI92}. Les pyramides d'opérateurs connexes apparaissent dans{SER93, ils servent pour la compression et le filtrage des séquences dans {MGT96}, {SAL96}, {PAR94}, {CAS97} et {DEC97}. Les nivellements sont dus à F.Meyer {MEY98}, cf aussi {MAT97} et {SER98b}.

Sur les connexions pour les fonctions (ch. XVIII):

- La notion de connexion sur un treillis, avec application aux fonctions, est due à J.Serra {SER98a et b}.