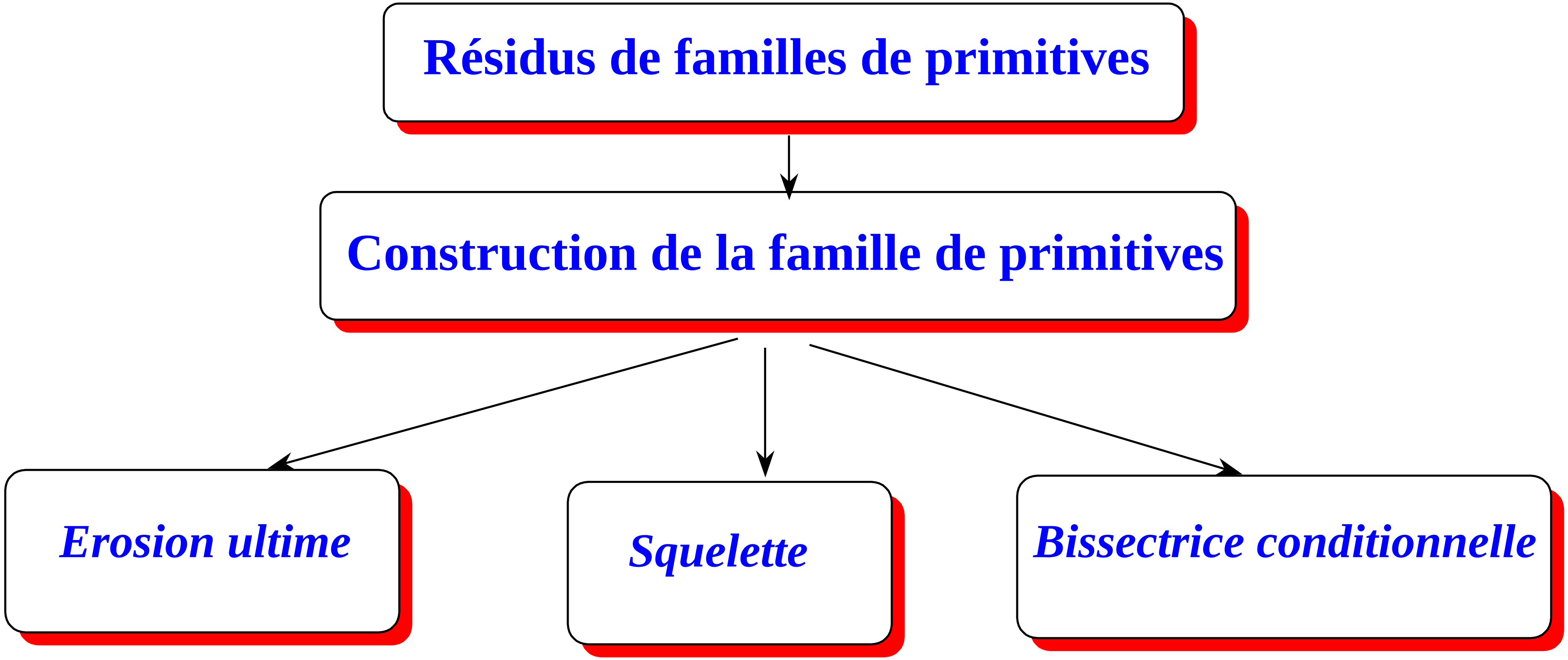
Chapitre VII: Squelettes



Résidus de familles de primitives

Dans ce chapitre, nous traiterons uniquement des ***ensembles***, bien que la démarche s'étende aux fonctions numériques.

Résidus de deux familles :

- Calculer les résidus de deux familles de primitives crée une quantité d' information proportionnelle au nombre de primitives des familles. Il convient de regrouper tous ces résultats partiels .

- Définissons comme résidu de deux familles de primitives la **réunion des résidus** de paires de primitives . Plus précisément, soient $\{\psi_i\}$ et $\{\zeta_i\}$, $i \in I$, deux familles d'opérateurs telles que pour tout i l'on ait $\{\psi_i\} \geq \{\zeta_i\}$, leur résidu est alors l' opérateur:

$$\sim\{\psi_i \setminus \zeta_i \ , i \in I\}$$

Choix des familles de primitives

- Dans ce qui suit, les $\{\psi_i\}$ sont systématiquement des érosions. Selon le choix des $\{\zeta_i\}$ nous obtiendrons trois transformations importantes: l' ***érosion ultime***, le ***squelette*** et la ***bissectrice conditionnelle***.
  A fins pédagogiques, nous nous limitons au cas digital.

***Primitives* $\{\psi_i\} = \{\varepsilon_i\}$:**

- Soit $\{\alpha_i\}$ une famille d'érosions, dites élémentaires, par des éléments structurants convexes, indexés par l'entier i, et $\{\gamma_i\}$ la famille d'ouvertures associées. A partir des $\{\alpha_i\}$ construisons la famille d'érosions :

$$\varepsilon_i = \alpha_i \ldots \alpha_2 \alpha_1$$

- Les éléments structurants correspondant à ces érosions définissent une famille **granulométrique** $\{\delta_i(x)\}$ car chaque δ_i est **ouvert** par tous les δ_j pour $j \leq i$, ce qui est ici la propriété essentielle. En revanche, ils n'induisent pas forcément une métrique (l'axiome *ii*, introduit en IX-7, n'est pas toujours vérifié).

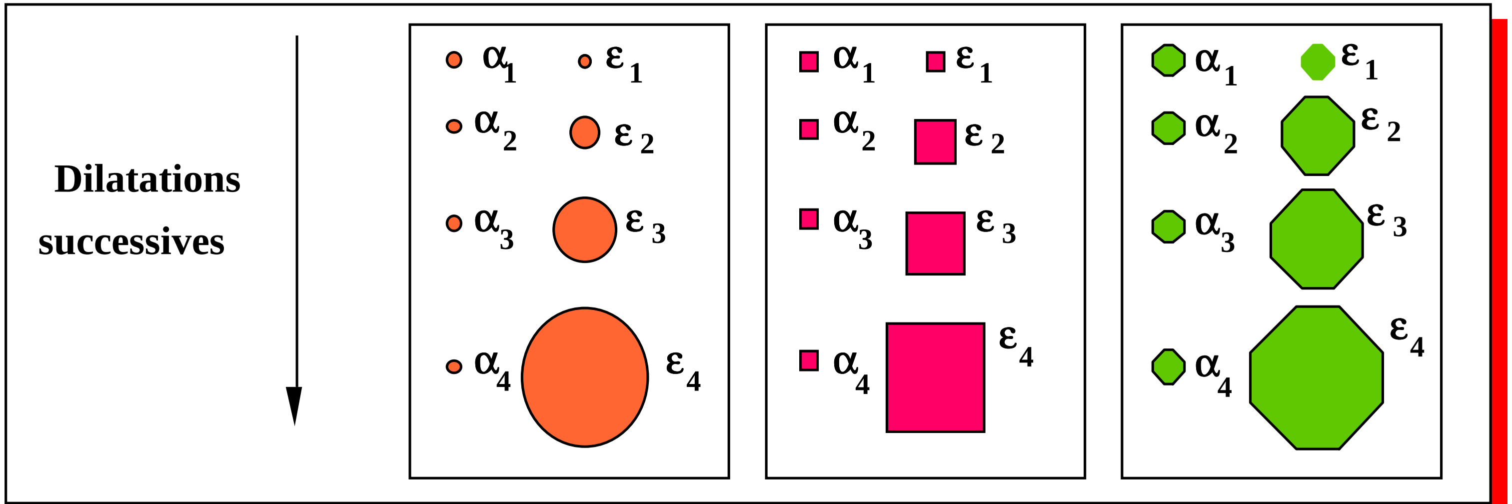
Exemples de familles (I): Famille homogène

- C'est le cas le plus courant. On suppose que toutes les érosions élémentaires sont égales, c'est à dire :

$$\forall \mathbf{i,j} \quad \alpha_i = \alpha_j = \alpha$$

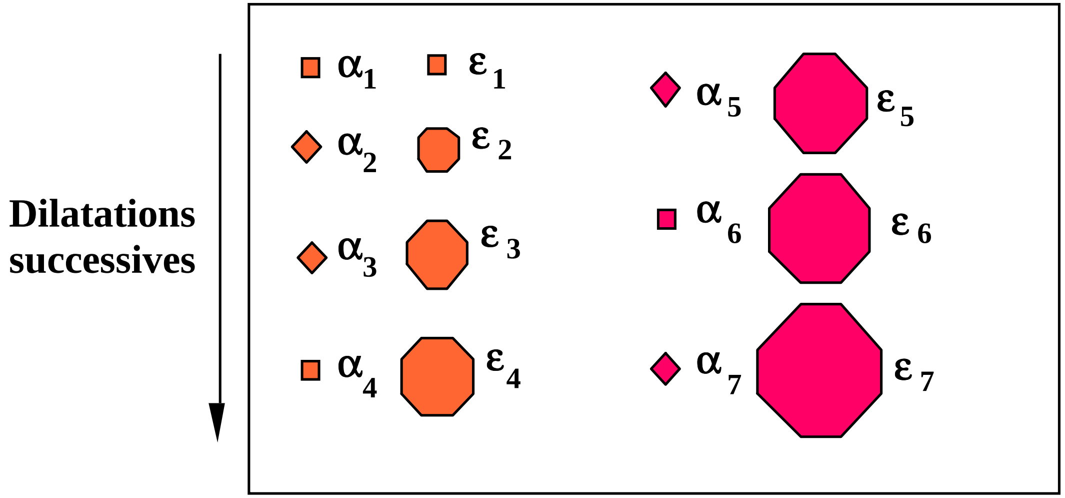
$$\Rightarrow \quad \varepsilon_i = (\alpha)^i$$

- C’est le cas pour les familles $\{\varepsilon_i\}$dont les dilatations adjointes sont des additions de Minkowski par des convexes homothétiques et symétriques (cercle, carré, polygone), qui engendrent alors une métrique:



Exemples de familles (II):Famille hétérogène

- Il est parfois nécessaire de disposer d'un moyen d'analyse plus fin, c'est à dire d'avoir une progression plus lente de la famille. Dans ce cas, les érosions élémentaires peuvent varier .
- En particulier, on peut partir d' érosions élémentaires par des **convexes arbitraires** :



Erosion ultime digitale (I)

Définition *(J. Serra)***:**

- Soit $\alpha = \varepsilon$ une érosion digitale dite élémentaire, et $\varepsilon_i = (\varepsilon)^i$ son itérée d' ordre i. L' érosion ultime dérivée de ε se définit alors comme le résidu entre $\{\varepsilon_i\}$ et les ouvertures par reconstruction de chaque érosion dans la précédente :

$$\mathbf{U(X) = \sim\{U_i(X)\ ,\ i \in N\ \} = \sim\{\varepsilon_i(X) \setminus \gamma^{rec}[\varepsilon_i(X),\ \varepsilon_{i+1}(X)]\ ,\ \ i \in N\ \}}$$

Propriétés:

- L'érosion ultime est ***anti-extensive*** et les U_i sont ***disjoints***.
- $U(X)$ est d' ***épaisseur faible***, i.e. son érodé par ε est vide .
- l'érosion ultime est ***idempotente***.
- Si on dilate un $U_i(X)$ avec l'élément structurant n°i, le résultat est une ***boule maximale***.

[*Ces propriétés viennent de ce que la famille* $\{\varepsilon_i\}$ *est granulométrique*]

Erosion ultime digitale(II)

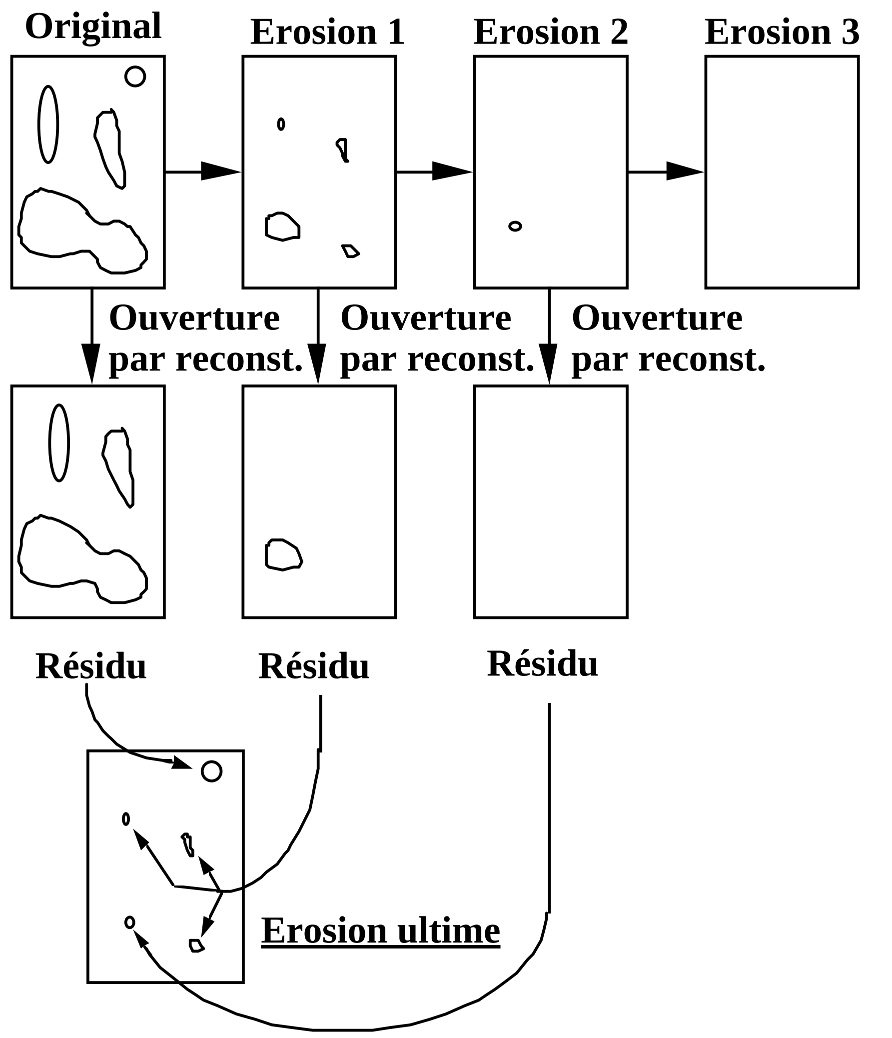
Interprétation géométrique:

Le but est de marquer les ensembles. Pour celà, on effectue des érosions successives et on regarde les particules qui disparaissent entre deux étapes..

Pour savoir si une composante connexe va disparaître à l'étape i, on reconstruit le i-ème érodé à partir du i+1ième. Deux cas possibles:

1) *L'érosion a éliminé une composante connexe*: Le résultat de la reconstruction est vide.

2) *L'érosion n'a pas éliminé d' objet* Le résultat de la reconstruction est la composante connexe de l'étape i-1 .



Extrémités d'une particule

- La particule X est supposée ***simplement connexe*** (*i.e*. connexe et sans trous) ;
- On lui associe un ***centroïde interieur*** (*par ex*. à l' aide de l' amincissement **Dthin**) ;
- Les extrémités de la particule sont alors définies comme l' érodé ultime géodésique, dans X, de l'ensemble Y égal à X diminué de son centre . Posons:

  $\varepsilon_n = \varepsilon_{X,n}(Y)$, il vient : ***extrémités*** $= \sim[\varepsilon_n \setminus \gamma^{rec}(\varepsilon_n ; \varepsilon_{n+1}) , n \in N]$

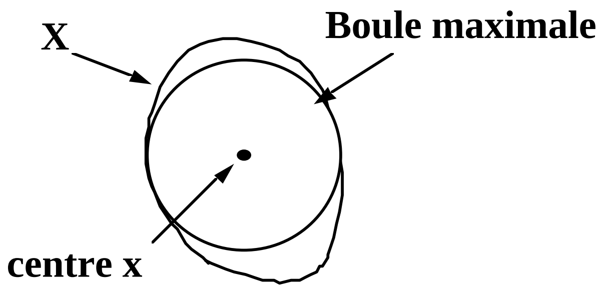
Boules maximales

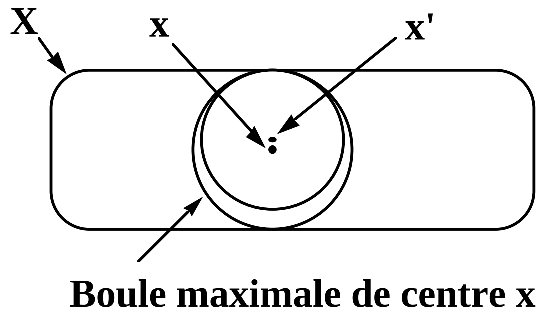
- L'érosion ultime a introduit le concept de ***boule maximale***, dont la définition formelle est la suivante.

Définition:

- Une boule $\delta_n(x)$ de taille n et de centre x est maximale vis à vis de l'ensemble X, s'il n'existe aucun autre indice k et aucun autre centre y tels que:

$$\delta_n(x) \; 5 \; \delta_k(y) \; 5 \; X \,, \quad k \geq n$$





En pratique, les disques maximaux touchent la frontière en au moins deux points distincts.

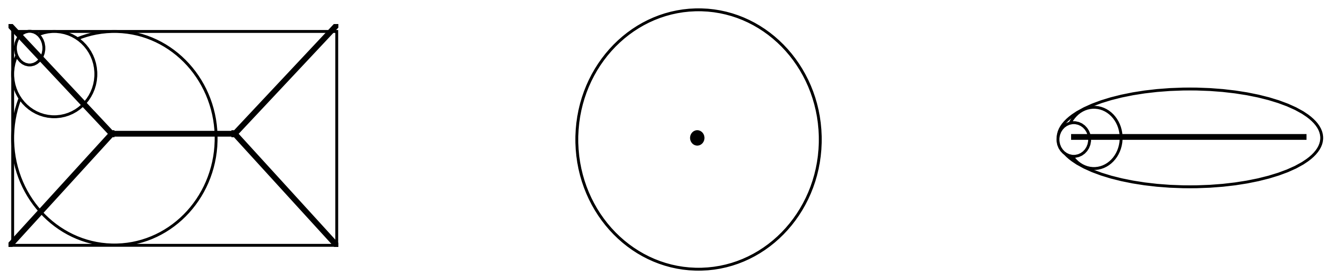
Squelette: définition

- L'érosion ultime était déjà un lieu de centres de boules maximales. Plus généralement,

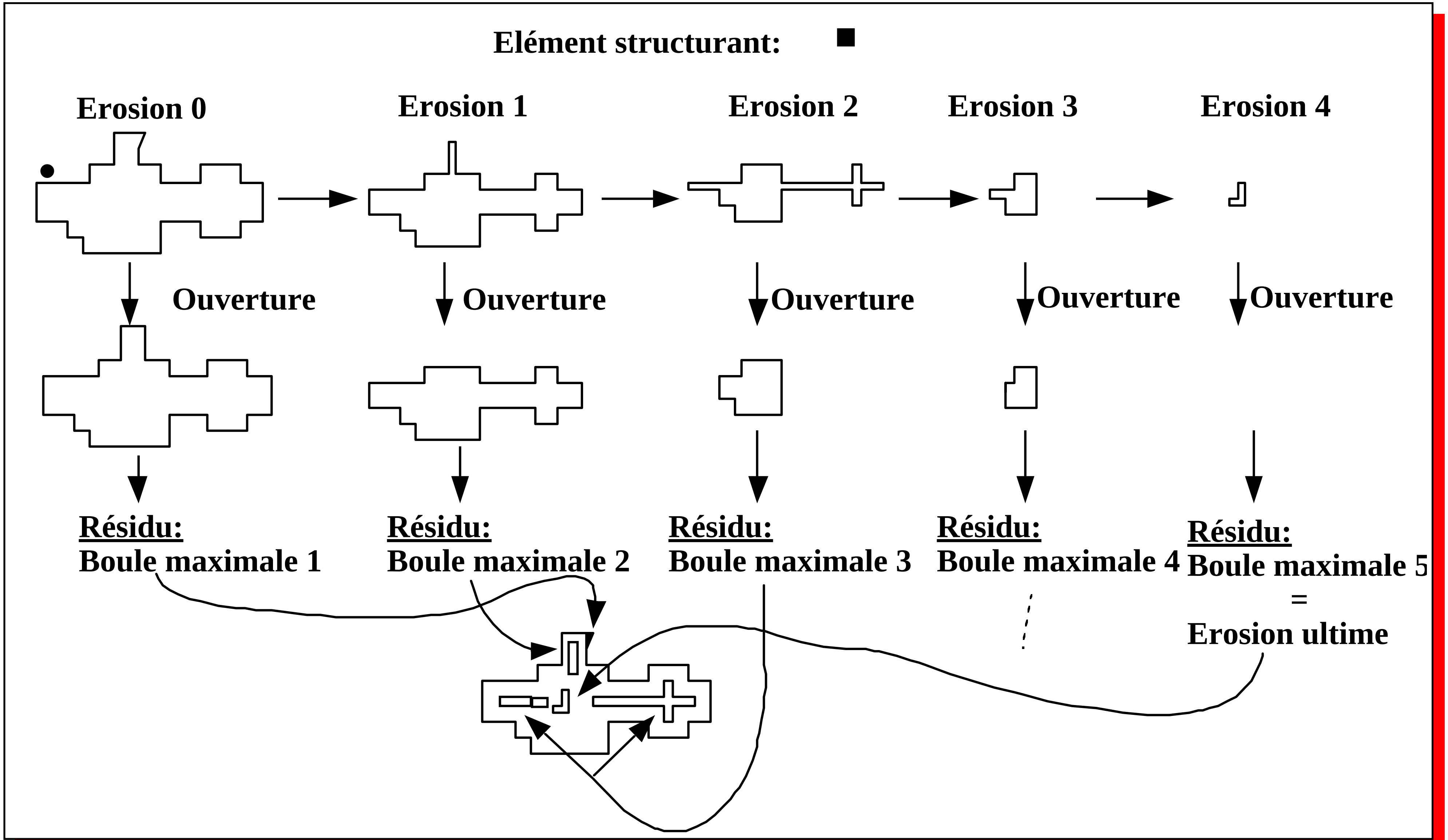
Définition *(H.Blum)***:**

- Le **squelette** d'un ensemble X selon une famille de boules $\{\delta_n\}$ est le lieu géométrique des centres de toutes ses boules maximales .

Remarque: Si les boules sont symétriques, le squelette s'interprète comme une sorte de ligne médiane de l'ensemble .



Squelette : Construction



Squelette : Algorithme

- L'algorithme permettant d'obtenir le squelette est exactement le même que celui de l'érosion ultime. Il suffit de remplacer l'ouverture par reconstruction par une ouverture de taille unitaire :

***Algorithme** (formule de Lantuéjoul)* **:**

- Dans le cas d'une famille homogène, le squelette est le résidu entre les familles $\{\varepsilon_i\}$ et $\{\gamma\,\varepsilon_i\}$, où γ est l'ouverture adjointe unitaire de l'érosion ε, *i.e.*:

$$\mathbf{S(X) = \sim\{S_i(X)\,,\, i \in N\} = \sim\{\varepsilon_i(X) \setminus \gamma[\varepsilon_i(X)]\,,\ i \in N\}}$$

- Dans le cas d'une famille hétérogène, l' ouverture γ est remplaçée par une ouverture γ_i variable avec l'indice i

Remarque: La fonction possédant le squelette comme support et le rayon de la boule maximale comme valeur s'appelle **fonction d'extinction.**

Squelette : Propriétés (I)

Taille :

- Le squelette est d'épaisseur faible et disparaît par érosion
  - par ε (cas homogène)
  - par la réunion ~αi des érosions élémentaires (cas non homogène).

Anti-extensivité et idempotence :

$\mathbf{X \supset S(X)}$, et, si la famille est homogène , $\mathbf{S(S(X)) = S(X)}$

Préservation de l'information :

- L'ensemble X, ainsi que ses ouverts, peuvent être construits à partir du squelette et de la fonction d'extinction; en effet

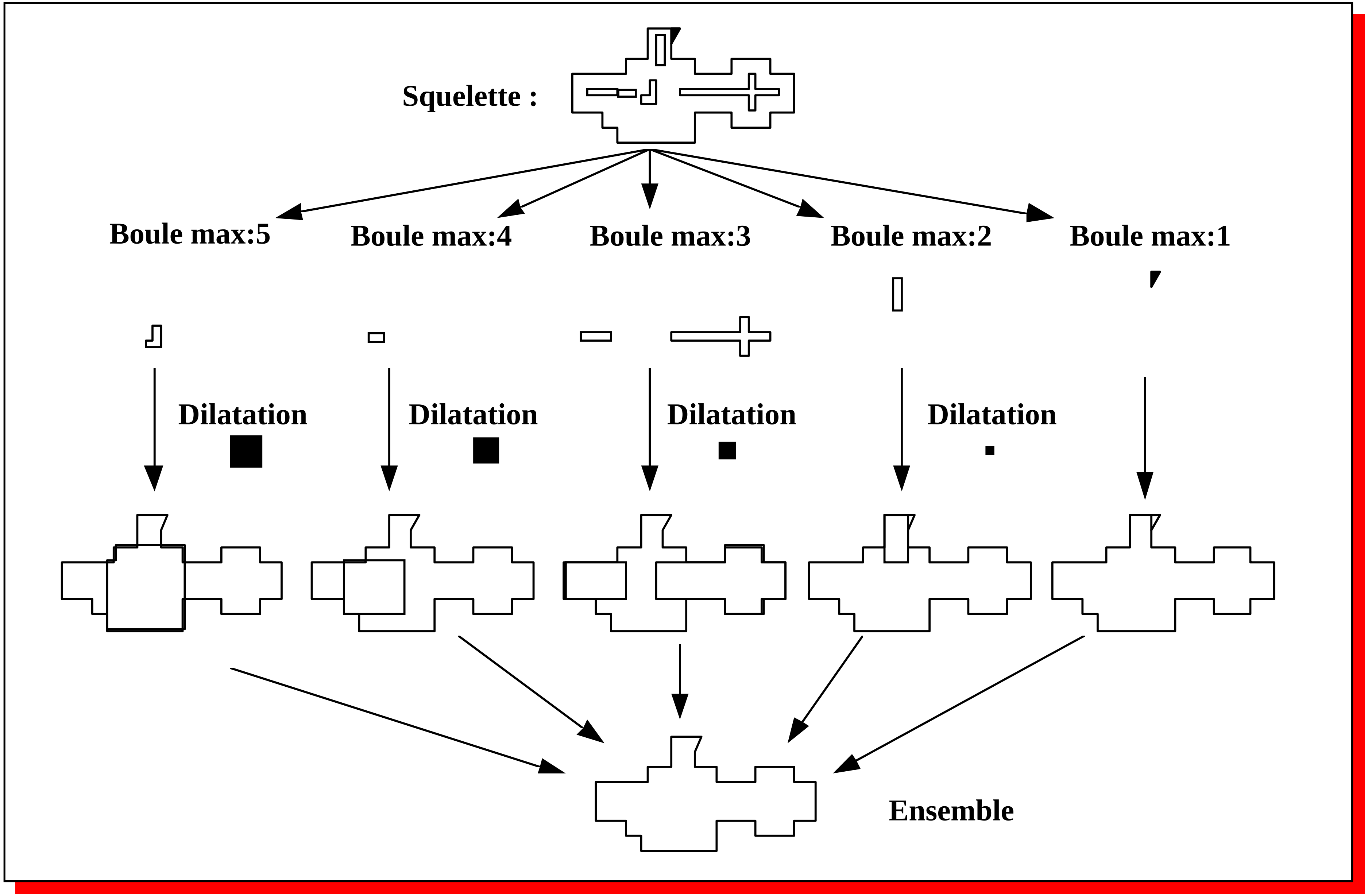
$$X = [X \setminus \gamma(X)] \sim \gamma(X) = S_0(X) \sim \delta[\varepsilon(X) \setminus \gamma\varepsilon(X)] \sim 2\delta[2\varepsilon(X)]$$

$$= S_0(X) \sim \delta[S_1(X)] \sim \ldots$$ d'où, finalement:

$$\mathbf{X = \sim\{\delta_i\,[S_i(X)]\,,\, i \in N\} \quad ; \quad \gamma_j(X) = \sim\{\delta_i\,[S_i(X)]\,,\ i \geq j\}}$$

=> La transformation, réversible, fournit une autre ***représentation*** de X.

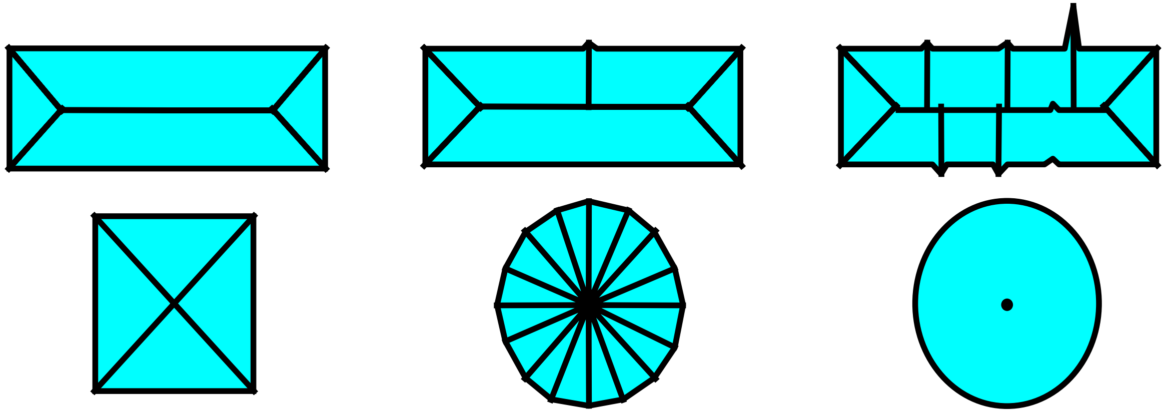
Réversibilité du squelette



Squelette: Propriétés (II)

Semi-continuité :

- La squelettisation n'est pas une transformation continue. En effet, une petite variation de l'ensemble initial peut conduire à des squelettes très différents :



=> Pour atténuer ce phénomène, on a introduit une variante plus robuste du squelette nommée "bissectrice conditionnelle" .

Connexité :

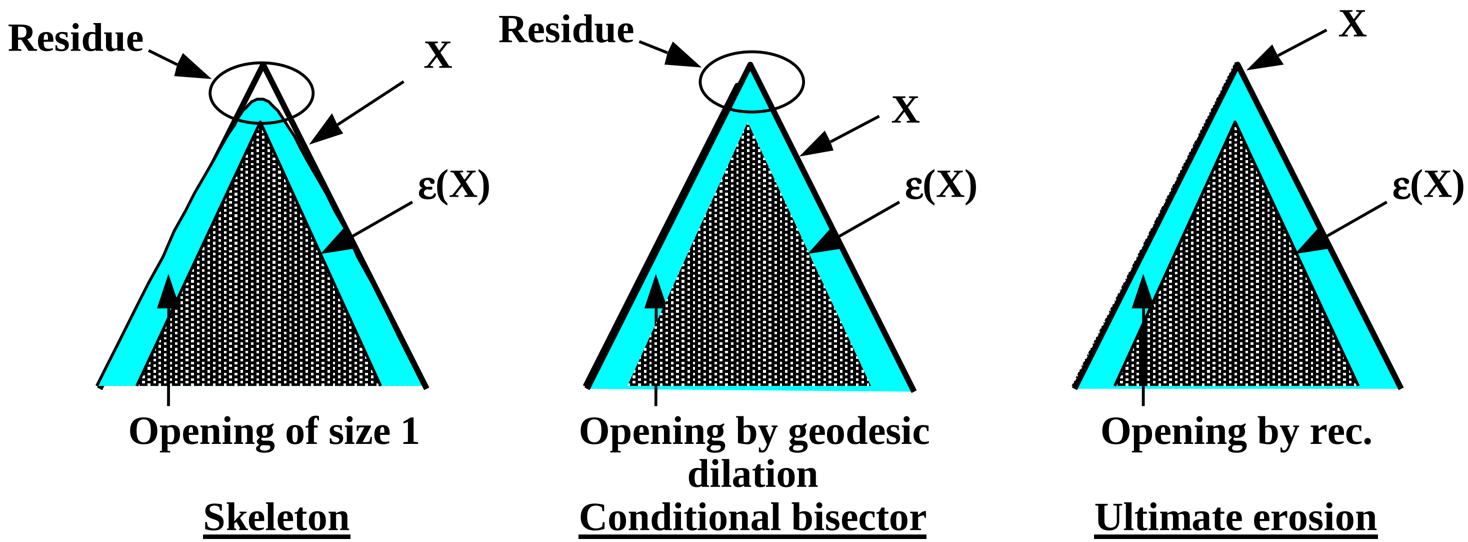
- Dans le cas continu, le squelette **préserve la connexité**, mais cette propriété disparaît en digital. Pour la retrouver, on utilise d'autres techniques, fondées sur la transformation en tout ou rien (Ch. VIII).

Bissectrice conditionnelle

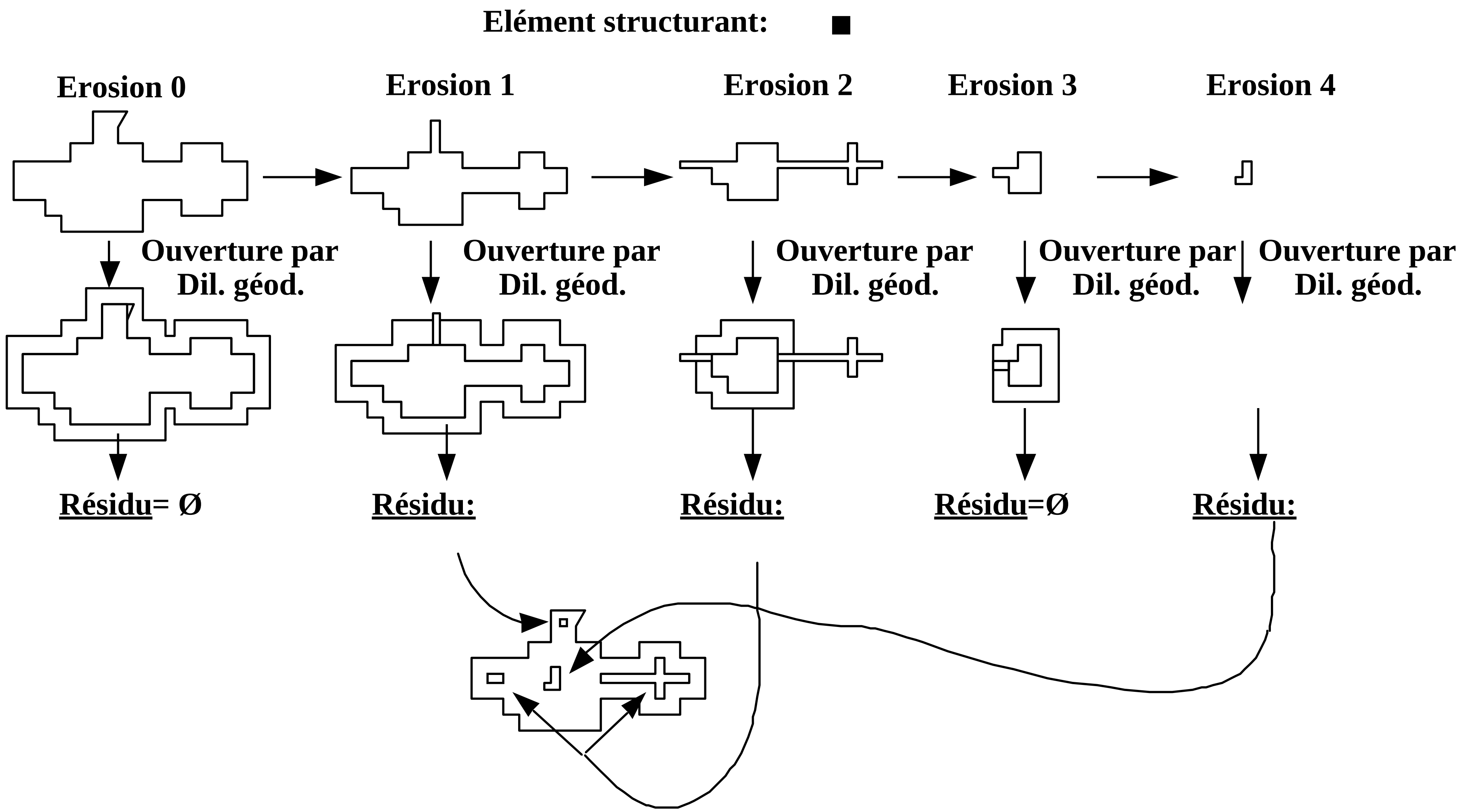
- La différence entre l'érosion ultime et le squelette a consisté à remplacer l'ouverture par reconstruction par une ouverture élémentaire, plus petite.
- La bissectrice conditionnelle s'inscrit entre ces deux extrêmes. Elle repose sur la famille de dilatations géodésiques $[\delta_{\varepsilon\, i}]^n \varepsilon_{\,i+1}$ qui sont telles que :

$$\gamma\, \varepsilon_i \;\leq\; [\delta_{\varepsilon\, i}]^n \varepsilon_{\,i+1} \;\leq\; \gamma^{rec}[\varepsilon_i\,,\, \varepsilon_{i+1}]$$

Ces dilatations croissent avec n, jusqu'à l'ouverture par reconstruction .



Bissectrice conditionnelle: Construction



Bissectrice conditionnelle: Algorithme

***Définition** (F.Meyer)*:

- La bissectrice conditionnelle est le résidu entre la famille d'érosions et la dilatation géodésique de taille n de ces érosions:

$$\mathbf{B(X) = \sim\{B_i(X)\ ,\ i\in N\} = \sim\{\varepsilon_i(X) \setminus [\delta_{\varepsilon\ i}]^n\ \varepsilon_{\ i+1}\ (X)]\ ,\ i\in N\}}$$

Propriétés :

- La bissectrice possède les mêmes propriétés que l'érosion ultime ou le squelette (***faible épaisseur, anti-extensivité, idempotence***, etc)
- En pratique, la bissectrice élimine les ramifications parasites du squelette et permet une identification plus précise des composantes des ensembles que l'érosion ultime .

Récapitulatif des résidus de deux familles de primitives

Résidus:	**Première famille:**	**Seconde famille:**
• Erosion ultime	ε	• Ouverture par recons.
• Bissectrice conditionnelle	ε	• Ouverture géodésique
• Squelette	ε	• Ouverture unitaire

avec ε : érosion digitale unité

Références

Sur les résidus :

- Le terme de "résidu" regroupe des notions d'origines très variées et apparues à des époques différentes: l'érosion ultime en 1973 {SER73}, et la bissectrice conditionnelle en 1979 {MEY79}.

Sur le squelette :

- Depuis l'article original de H.Blum {BLU62}, on a beaucoup écrit sur le squelette. La formule de Lantuejoul se trouve dans {LAN78}, {LAN80} (cas discret) et sa forme générale dans {SER92a}.
- On trouve dans {MAT88b} une analyse topologique du squelette euclidien et dans {MEY89a} un examen approfondi de la version digitale.
- Des améliorations sensibles du sqelette digital on été proposées, en particulier dans {BEU90} (préservation de la connexité), dans {SCH94} (épaisseur d'un pixel), dans {BRI94} (encodage),