Chapitre VIII : Amincissements

Transformations:
- en "tout ou rien"
- amincissement
- épaississement

Homotopie

Homotopie et connexité dans le cas digital

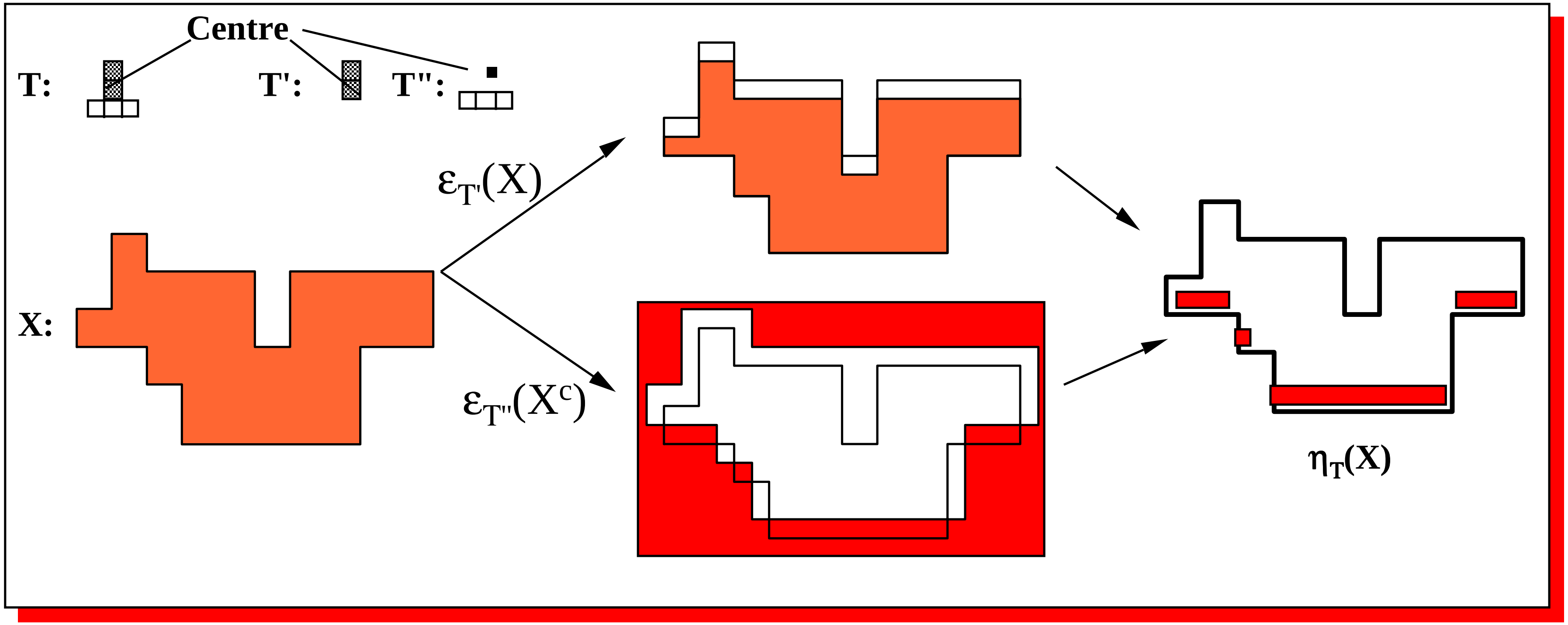
Amincissement et épaississement homotopiques

Transformation par tout ou rien

Définition (*J.Serra*) **:**

- La transformation en tout ou rien η_T (sect.II-2) généralise à la fois érosion et dilatation, en mettant en jeu le couple d'éléments structurants disjoints T= {T',T''}

$$\eta_T(X) = \{z: T''(z) \subseteq X^c ;\ T'(z) \subseteq X\} = \varepsilon_{T'}(X) \cap \varepsilon_{T''}(X^c)$$

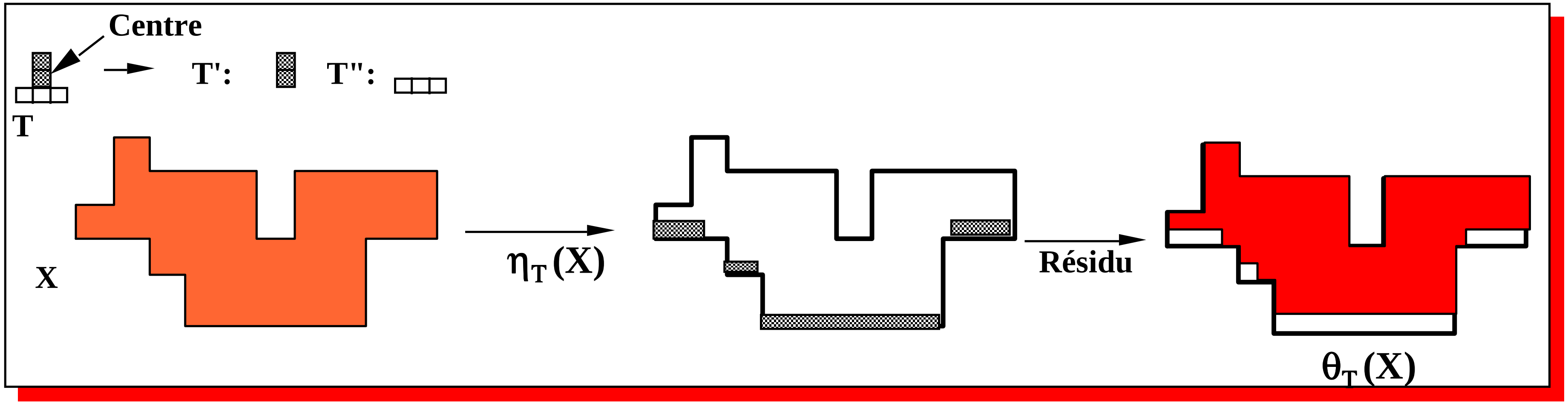


Amincissement - Epaississement

Définition *(A. Rosenfeld, J.Serra)* **:**

- L'amincissement θ_T est le résidu entre l'ensemble initial et sa transformation par tout ou rien :

$$\theta_T(X) = X \setminus \eta_T(X) = X \setminus [\varepsilon_{T'}(X) \cap \varepsilon_{T''}(X^c)]$$



- L'épaississement ξ_T est introduit alors par dualité pour le complément

$$\xi_T(X) = X \cup \eta_T(X) = X \cup [\varepsilon_{T'}(X) \cap \varepsilon_{T''}(X^c)]$$

Propriétés

Theorème de représentation *(G.Banon and J.Barrera)* ***:***

- Tout opérateur ψ sur $\sigma(E)$ qui est invariant par translation peut se représenter comme réunion de transformations en tout-ou-rien :

$$\psi(X) = \cup\, \eta_{T\,i}\,(X)$$

pour une famille $\{T_i', T_i''\}$ convenable, qui dépend du noyau de ψ.

Dualité :

- L'amincissement selon (T',T") est le dual pour le complément de l'épaississement selon (T",T') :

$$\theta_{\,T',\,T''}\,(X) = [\,\xi_{T'',T'}\,(\,X^c)\,]^c$$

En particulier, tout amincissement est anti-extensif, et tout épaississement extensif. Pour que ces opérations ne se réduisent pas à l 'identité, il faut que $0 \in T'$ (amincissements) ou $0 \in T''$ (épaississements).

Utilisation :

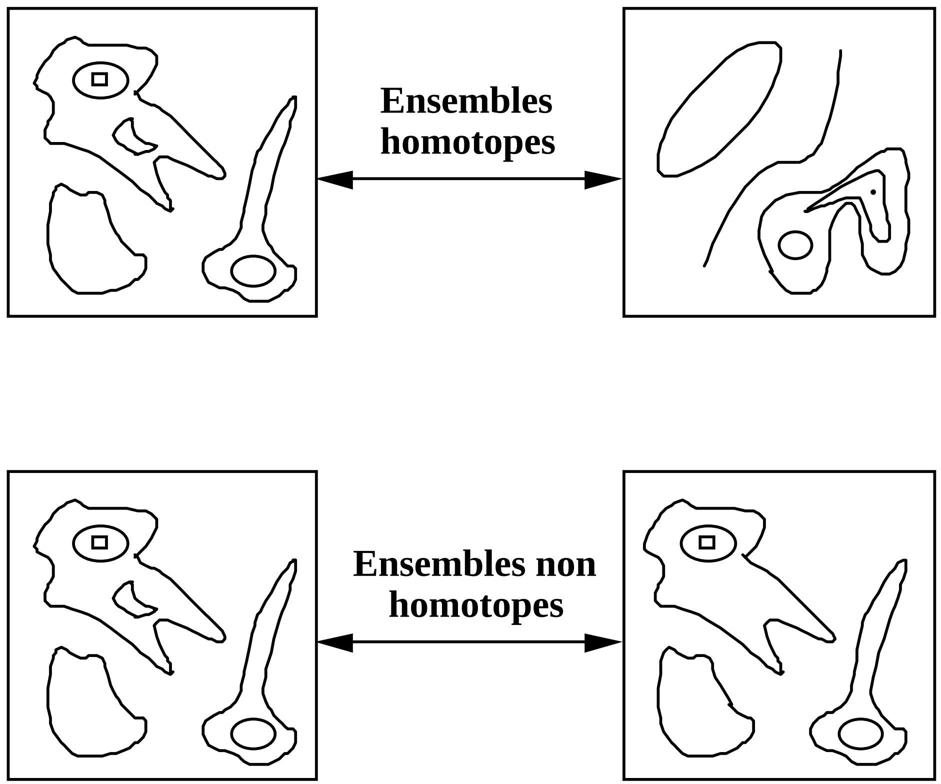
- En morphologie, ces opérations sont utilisés pour construire des transformations conservant l'homotopie, (squelettes homotopiques).

Homotopie pour les ensembles

Définition de l'homotopie :

- Deux ensembles sont homotopes s'il existe une transformation bicontinue pour passer de l'un à l'autre, telle que
  - chaque grain contient le même nombre de pores que son transformé,
  - chaque pore contient le même nombre de grains que son transformé.

l'homotopie décrit **l'organisation** des grains et des pores entre eux.

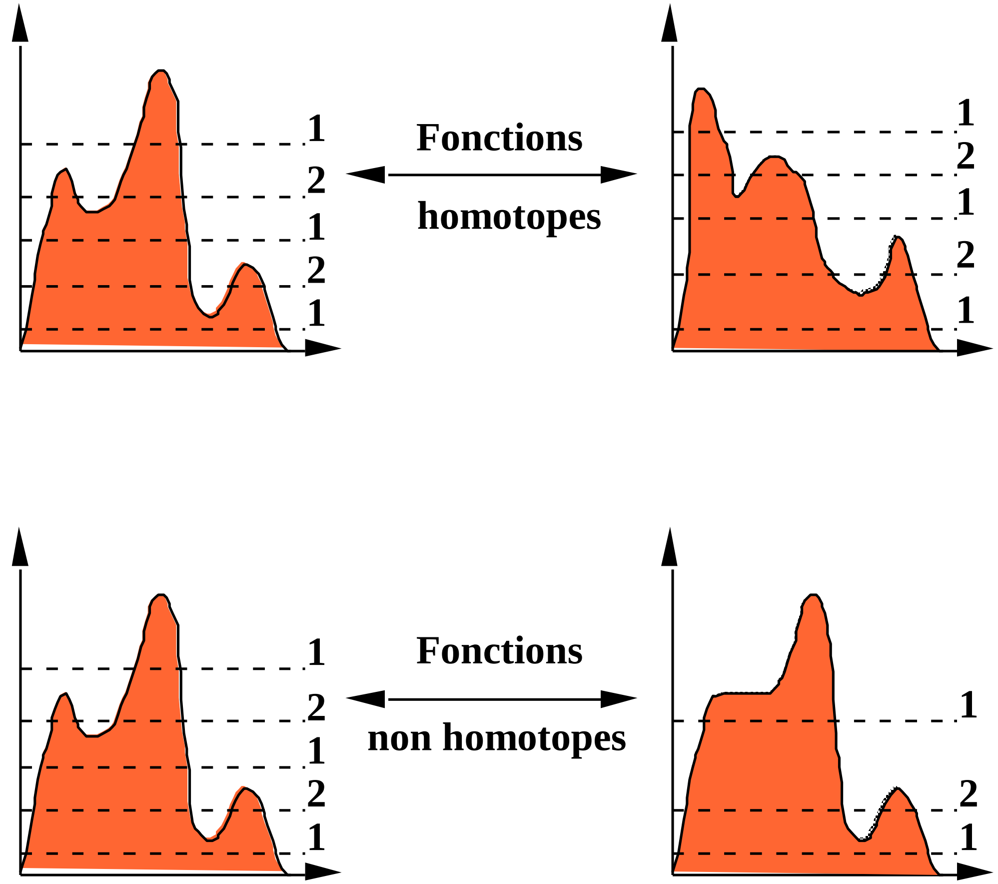


Homotopie pour les Fonctions Numériques

Homotopie (*J.Serra*) **:**

- On introduit l'homotopie pour les fonctions à partir de leurs sections planes. Deux fonctions sont homotopes quand on peut trouver une anamorphose des niveaux de gris qui rende homotopes leurs sections de mêmes cotes.

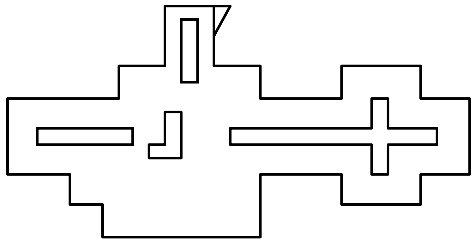
- Ainsi, l' homotopie caractérise la **structure des pics, des vallées, et des cols**.



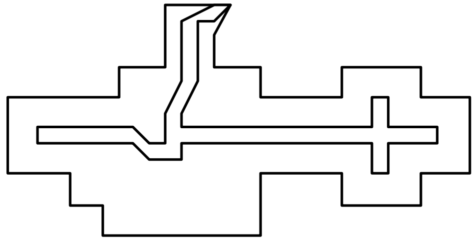
Transformations Homotopiques

Définition :

- Une transformation est dite **homotopique** quand entrée et sortie sont homotopes .
- La seule transformation homotopique que nous ayons rencontrée jusqu' ici est le squelette *euclidien*. En trame digitale, cette propriété disparaît.
- Pour la récupérer, nous devons renoncer au squelette (digital) et le remplacer par la notion "voisine" d'amincissement .



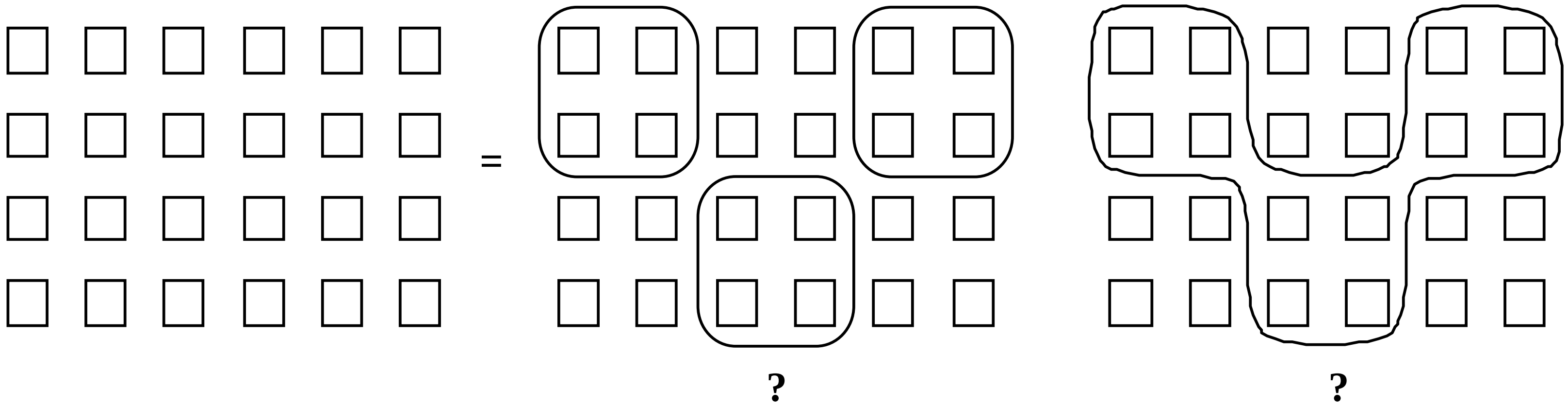
Squelette digital



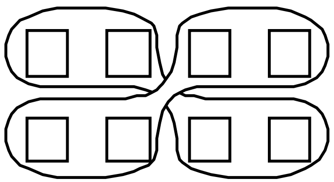
Squelette continu

Homotopie et connexité dans le cas digital

- Dans le cas digital, la définition de l'homotopie dépend de la donnée d' une ***connexité par arcs***. Or, il n'est pas trivial de définir combien de composantes la figure suivante possède :



- Il faut choisir des ***règles de connection*** portant sur les configurations diagonales. Pour que la connexité réalisée ait une structure de ***graphe planaire***, ces règles doivent interdire les croisements figure-fond:



Connexité en maille carrée (I)

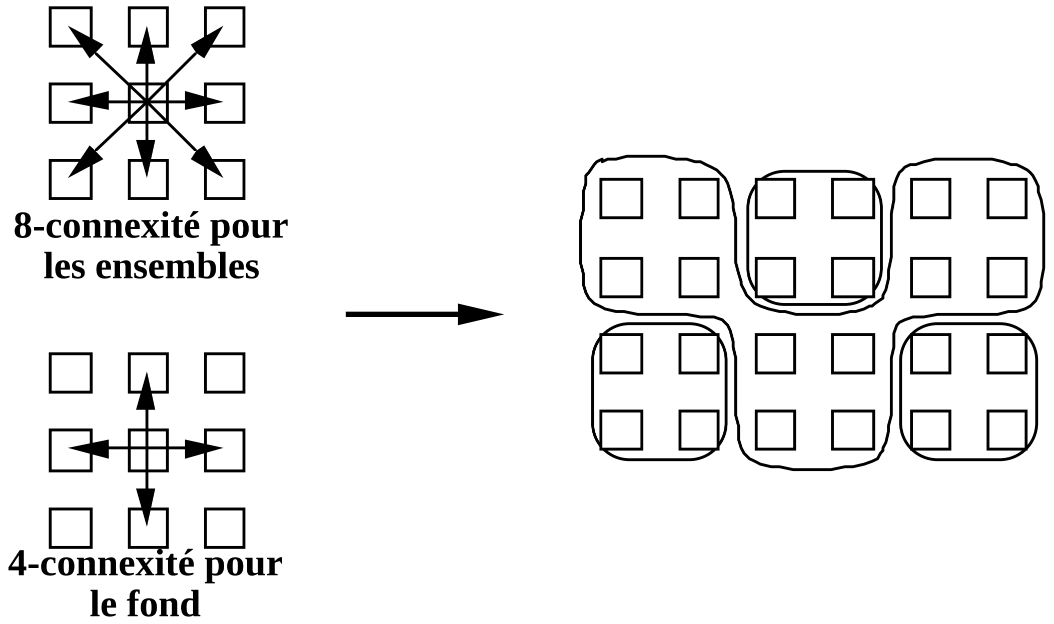
En pratique, on rencontre trois cas de figure :

1er ***cas*** *(A. Rosenfeld)* **:**

8-connexité pour la forme, 4-connexité pour le fond.

Propriétés :

-Invariance par translation;
-invariance par rotations de 90 degrés;
-pas d' autodualité.



Connexité en maille carrée (II)

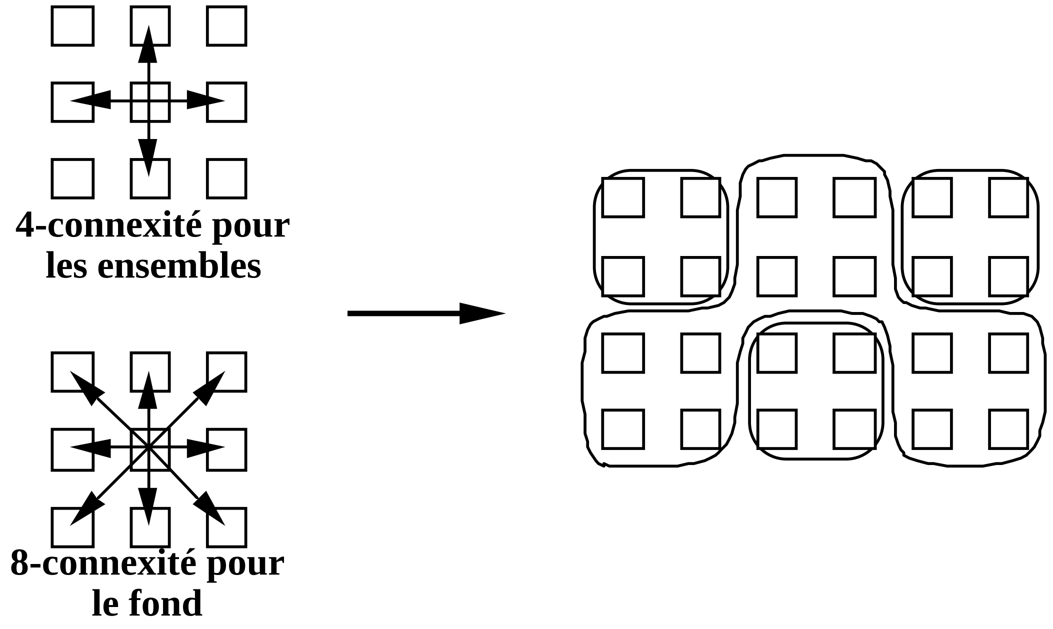
2ème ***cas*** *(A. Rosenfeld)* **:**

4-connexité pour le fond, 8-connexité pour la forme.

Propriétés **:**

Par dualité, les mêmes que celles du cas précédent.

Le premier cas convient quand les **objets** sont convexes, le second quand c'est le fond qui l'est.



Connexité en maille hexagonale

3ème ***cas*** *(M.J.E. Golay)* **:**

6-connexité pour la forme;

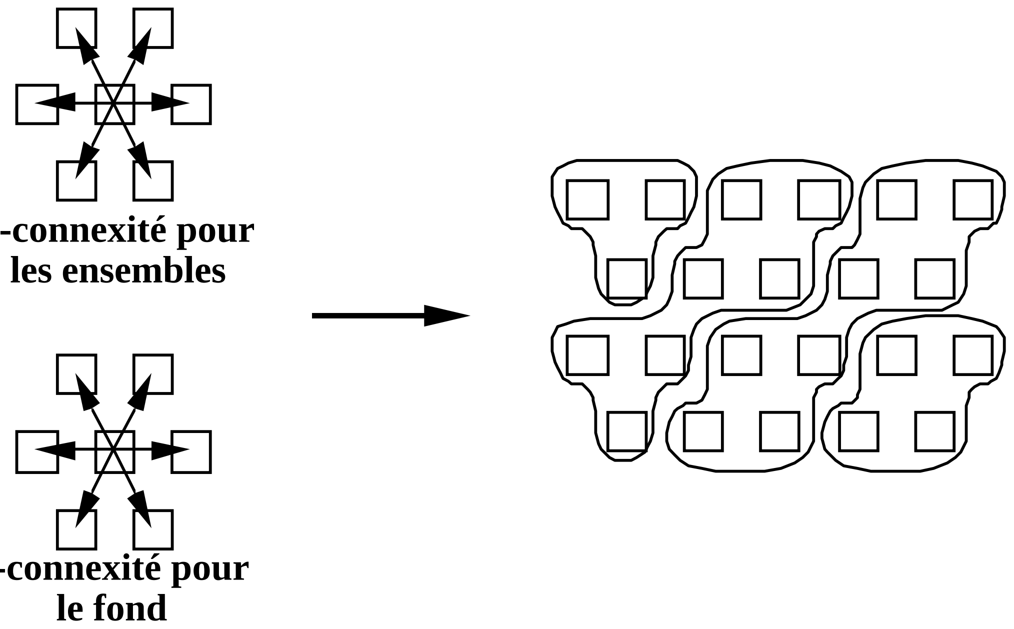
6-connexité pour le fond.

Propriétés **:**

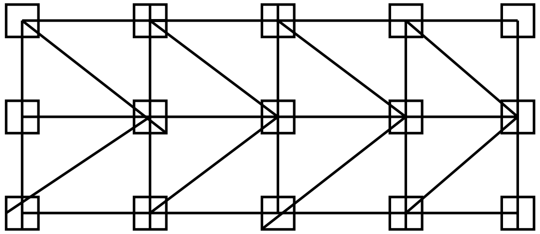
-Invariance par translations

-Invariance par rotations de 60 degrés;

-Autoduale.



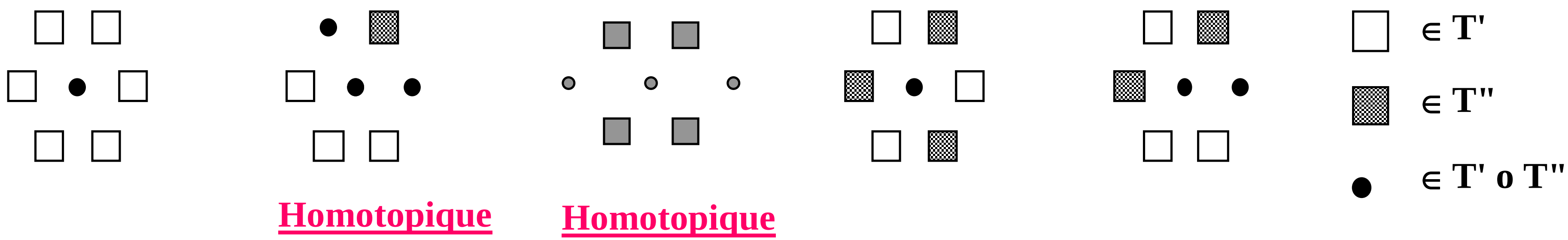
N.B.En pratique, la maille hexagonale est ***simulée algorithmiquement*** à partir de données expérimentales en maille carrée.



Amincissements et épaississements homotopiques

Un amincissement ou un épaississement est homotopique s'il utilise un élément structurant T=(T',T") qui préserve l' homotopie.

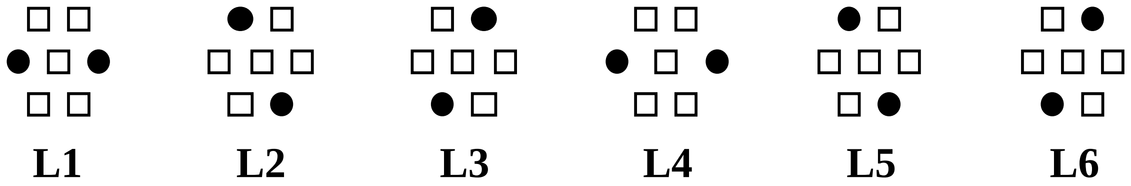
- ***Proposition*** *(J. Serra)*: En maille hexagonale, il n’existe que cinq paires (T',T") dans l’hexagone unité (toutes les autres s'obtiennent à partir de ces cinq types par rotation, symétrie ou complémentation):



et la modification du point central préserve l' homotopie si et seulement si le contour del'élément possède un unique passage de "0" a "1". Cette propriété est vérifiée uniquement pour les éléments des second et du troisième types .

Amincissement et Epaississement séquentiels

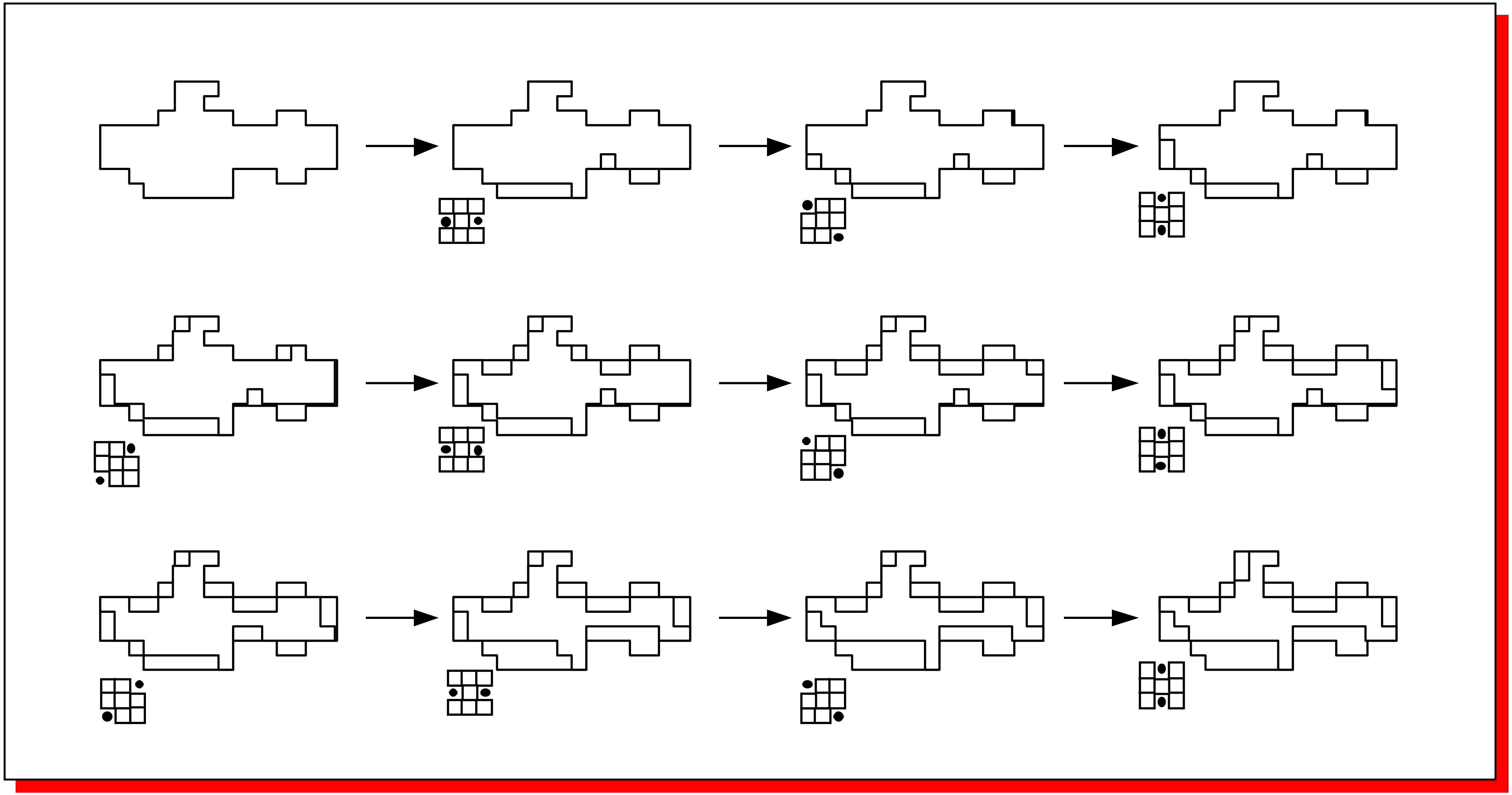
- Les amincissements et épaississements sont souvent utilisés de manière séquentielle. Par exemple, étant donné un élément structurant L=(L',L"), on procède à plusieurs amincissements avec toutes les rotations de l'élément et on répète la transformation jusqu'à idempotence .



$$\theta_L = \mathbf{lim}_{n\to\infty}\ (\theta_{L1}\dots(\theta_{L5}\,(\theta_{L6}\,)))^n$$

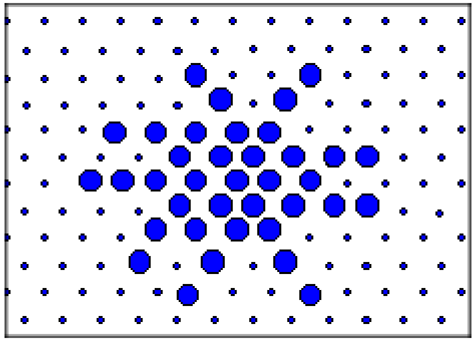
- Pour un n suffisamment grand, l'amincissement limite θ_L est **anti-extensif, idempotent** et **préserve l'homotopie** (mais il n'est pas croissant).

Exemple d'amincissement séquentiel



Propriétés des Amincissements Séquentiels

- Le résultat n'est pas toujours mince. Par exemple, l'ensemble suivant n'est pas modifié par amincissement à l'aide des éléments structurants L_i :



- Le choix de l'élément initial et de l'ordre de la série des éléments influent sur le résultat final .

- Les amincissements ne sont pas robustes : ce défaut de robustesse se traduit par de nombreuses ramifications qui dépendent fortement de l'élément structurant .

Liste des éléments structurants principaux, en hexagonal

Elément structurant		Amincissement séquentiel	Epaississement séquentiel	Transformation en tout ou rien
L	● □ □ □ □ □ ●	Squelette	Squelette du fond	
M	● □ □ □ ● □ □	Squelette avec ramifications	Epaississement à partir de points isolés	
D	● □ □ □ □ ● □	Marqueur homotopique	Enveloppe quasi-convexe	
E	● ○ □ □ □ □ □	Ebarbulage du squelette	Ebarbulage du fond	Points extrémaux
F	□ □ □ □ □ □ □			Points triples
I	□ □ □ □ □ □ □			Points isolés

Homotopiques

Non homotopiques

Références

***Sur la transformation par tout ou rien* :**

- La transformation par tout ou rien peut être considérée comme le coup d'envoi de la morphologie mathématique. Elle fut introduite par J.Serra en 1965{SER65a and b}, et, indépendamment, par M.J.Golay en 1969 pour la trame hexagonale {GOL69}. Toutefois, le théorème majeur de G.Banon et J.Barrera est sensiblement plus récent {BAN91}.

***Sur les amincissements* :**

- La squelettisation digitale obtenue au moyen d'amincissements remonte à A.Rosenfeld, qui a traité le cas de la trame carrée {ROS70}. On trouve dans{SER82} un examen plus systématique des amincissements discrets hexagonaux, ainsi que la première étude sur l'homotopie des fonctions numériques, au sens où elle est entendue ici (il en existe d'autres définitions).