

# Chapitre IX

## SKIZ et Ligne de partage des eaux

SKIZ euclidien et géodésique

Fonction distance

Ligne de partage des eaux

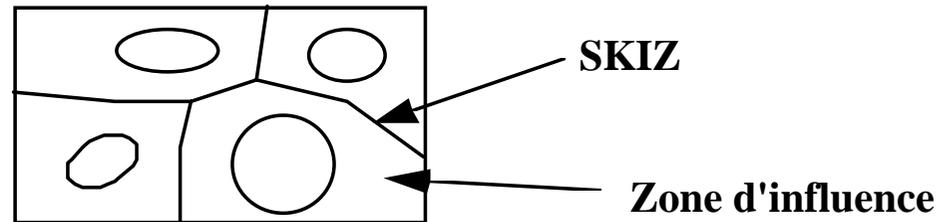
*Définition et propriétés*

*Algorithmes*

# Le squelette par zones d'influence : SKIZ

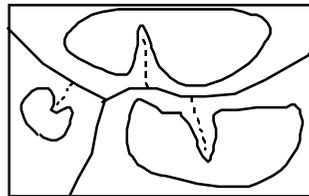
**Définition (C.Lantuejoul) :** Considérons un compact  $X$  de  $\mathbb{R}^2$ .

- La zone d'influence d'une composante  $X_i$  de  $X$  est l'ensemble des points du plan qui sont plus près de  $X_i$  que de toute autre composante
- Le SKIZ est alors la **frontière** de ces zones d'influence .



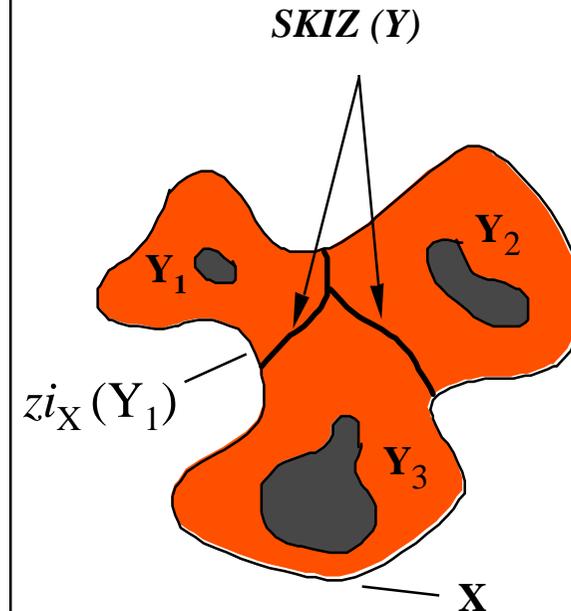
**Construction :**

- En digital, le SKIZ se construit en deux étapes :
  - 1) Amincissement du fond (avec "L" en maille hexagonale)
  - 2) Ebarbulage du résultat de l'amincissement (avec "E" en maille hexagonale)



# SKIZ géodésique

- Soit, dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $Y = \sim\{ Y_i, i \in I \}$  formé de  $I$  composantes connexes compactes, toutes incluses dans le compact  $X$ .
- La **zone d'influence géodésique** de  $Y_i$  dans  $X$  se définit comme le lieu des points  $a$  de  $X$  qui sont géodésiquement plus proches de  $Y_i$  que de toute autre composante connexe de  $Y$   
 $z_i(Y_i \setminus X) = \{ a \in X, \forall k \neq i, d_X(a, Y_i) \leq d_X(a, Y_k) \}$   
où la distance géodésique  $d_X(a, Y)$  est la plus petite des distances géodésiques du point  $a$  à tous ceux de l'ensemble  $Y$ .
- Le **SKIZ géodésique** est alors la frontière entre les différentes zones d'influence.



*Exemple de SKIZ géodésique*

# Propriétés du Skiz

Nous supposons ici que l'ensemble euclidien  $X$  est réunion finie de  $I$  composantes connexes compactes et disjointes  $K_i$ . Toute image de  $[0,1]$  par une bijection bicontinue est dite *arc simple*. Les deux propriétés qui suivent sont dues à *C. Lantuejoul*

- **Finesse**

L'ensemble  $skiz(X)$  est réunion localement finie d'arcs simples, formant exclusivement des contours fermés (avec éventuellement des points à l'infini).

- **Continuité**

Soit  $X_n = \{ \sim K_{i,n} \}$  une suite d'ensembles du type ci-dessus, où chaque compact  $K_{i,n}$  converge vers le compact  $K_i$ , lui même disjoint de toutes les autres limites  $K_j$ ,  $j \neq i$ ,  $j \in I$  i.e.

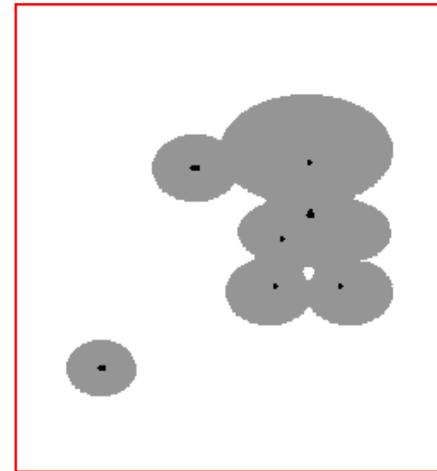
$$X_n = \sim K_{i,n} \rightarrow X = \sim K_i$$

alors

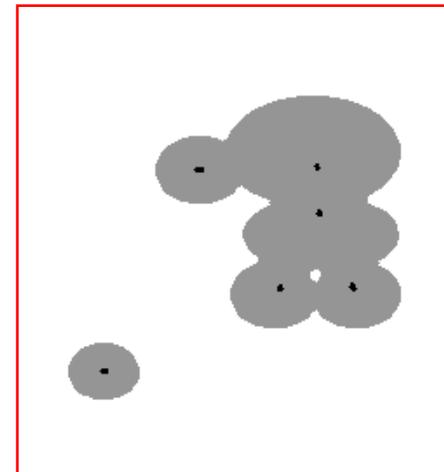
$$\mathbf{Skiz}(X_n) \rightarrow \mathbf{Skiz}(X).$$

# Les deux problèmes de la segmentation (I)

- Quand on veut segmenter l'ensemble ci-contre, la première question est : "**en combien de morceaux** ?" (dans le cas présent, 6 ou 7 grains ?)
- On peut **décider** soi-même, et marquer, de façon interactive, les centres supposés.
- On peut aussi faire confiance à un **procédé de marquage**. Mais les résultats risquent de varier selon la méthode (ici, entre 6 et 7)
- Qui qu'il en soit, ce premier acte est **distinct** de celui du tracé de la frontière.



*Objet et son érodé ultime .*

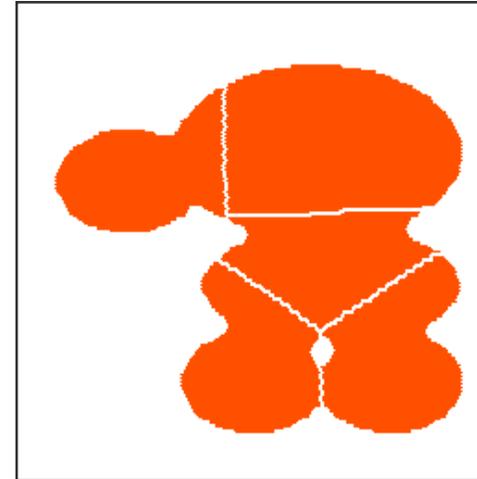


*Erodé ultime après filtrage de l'objet .*

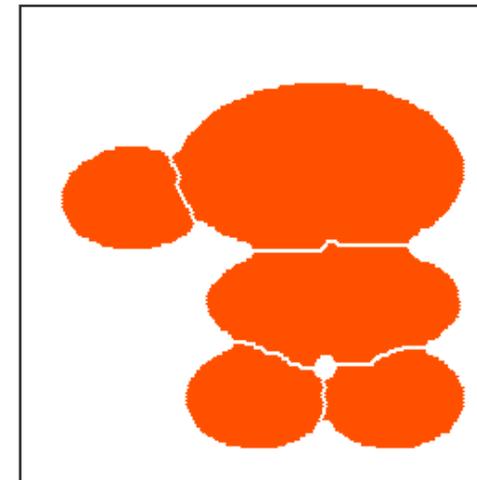
# Les deux problèmes de la segmentation (II)

Quand on a **choisi** les marqueurs (ici, la bissectrice conditionnelle), le tracé de la frontière peut **s'optimiser**

- L'expression la plus grossière s'obtient en prenant l'exosquelette des marqueurs (on ignore alors la forme de l'ensemble)
- On peut en tenir compte (un peu) en dilatant, au préalable, chaque marqueur par un disque égal au nombre d'étapes qui le sépare du marqueur ultime ;
- Dans cet esprit, le procédé le plus fin consiste à calculer le skiz géodésique de l'érodé  $n^{\circ} i$  dans l'érodé  $n^{\circ} i-1$ , quand  $i$  varie de l'érodé ultime à 0, et prendre la réunion des skiz obtenus.



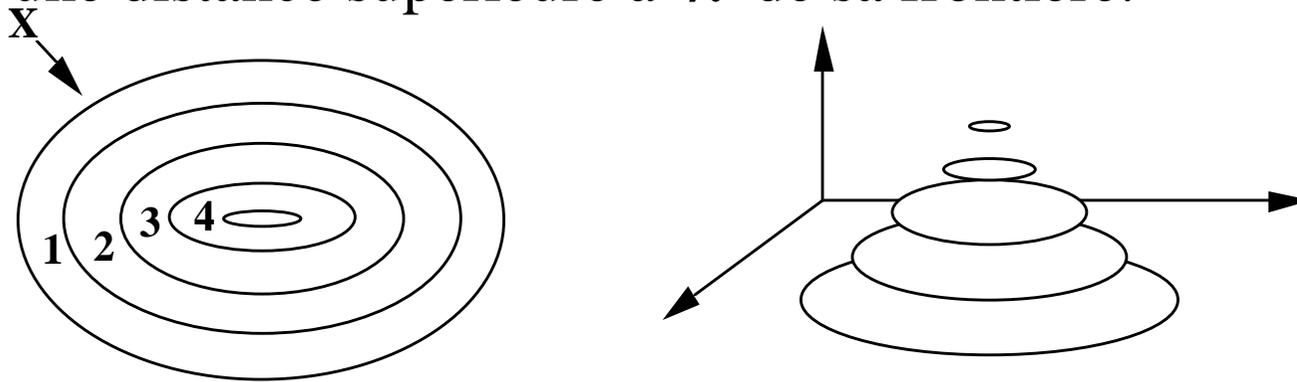
*Exosquelette  
des marqueurs.*



*Skiz  
géodésiques  
successifs.*

# Fonction distance (I) : Définition

- La fonction distance sert de transition entre les ensembles et les fonctions. Si l'on a défini une distance dans l'espace étudié, on peut associer à chaque ensemble  $X$  le sous-ensemble  $X_\lambda$  constitué des points qui sont à une distance supérieure à  $\lambda$  de sa frontière.



- Quand  $\lambda$  augmente, les sous-ensembles sont inclus les uns dans les autres. Ils peuvent être interprétés comme les sections horizontales d'une fonction valant  $\lambda$  en  $x$  si  $x$  est à une distance  $\lambda$  de la frontière. Cette fonction est appelée **fonction distance**. Les lignes de plus grande pente  $y$  sont des segments de droite partant de la frontière et aboutissant au squelette .

## Fonction distance (II) : propriétés

- Comme la distance est caractérisée par les disques  $\delta_\lambda$  de taille  $\lambda$ , les sous-ensembles  $X_\lambda$  sont les résultats des érosions à l'aide de cette famille de disques. Plus précisément, l'on a :

$$i) \quad \lambda \geq \mu \Rightarrow \delta_\lambda \geq \delta_\mu$$

$$ii) \quad \delta_\lambda \delta_\mu \leq \delta_{\lambda+\mu} \quad \lambda, \mu \geq 0 \quad (\text{inégalité triangulaire})$$

$$iii) \quad \{\delta_\lambda, \lambda \geq 0\} = \text{Id} \quad (\text{opérateur identité})$$

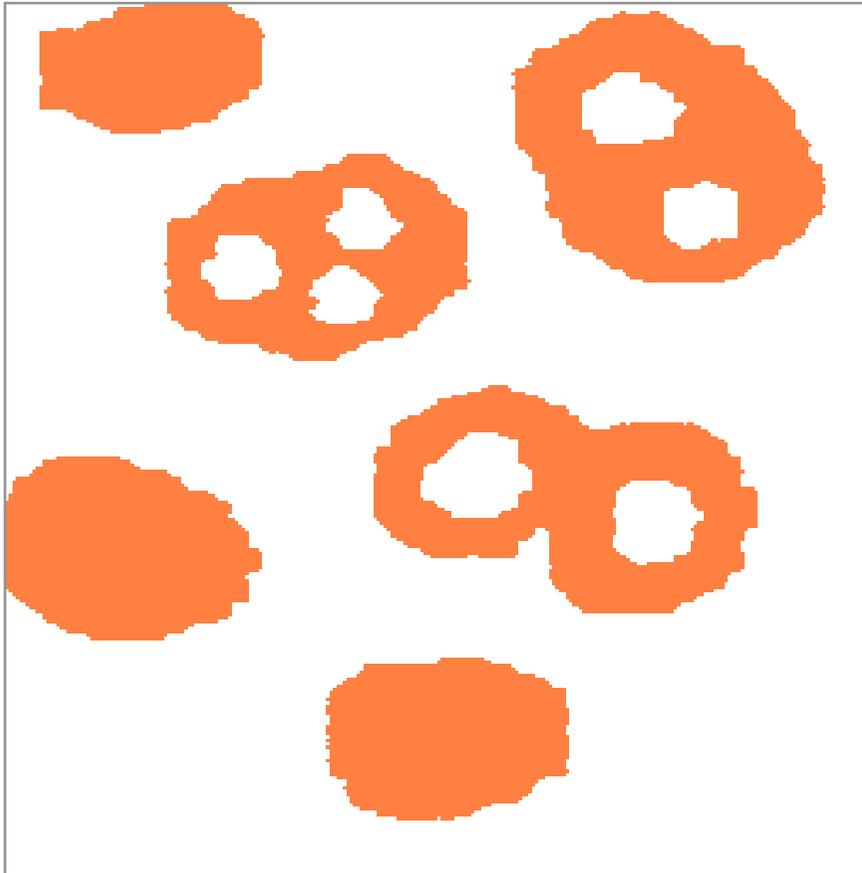
$$iv) \quad x \in \delta(y) \Leftrightarrow y \in \delta(x) \quad (\text{symétrie})$$

- Inversement, toute famille de dilatations qui possède ces quatre propriétés définit une **distance d** par la relation:

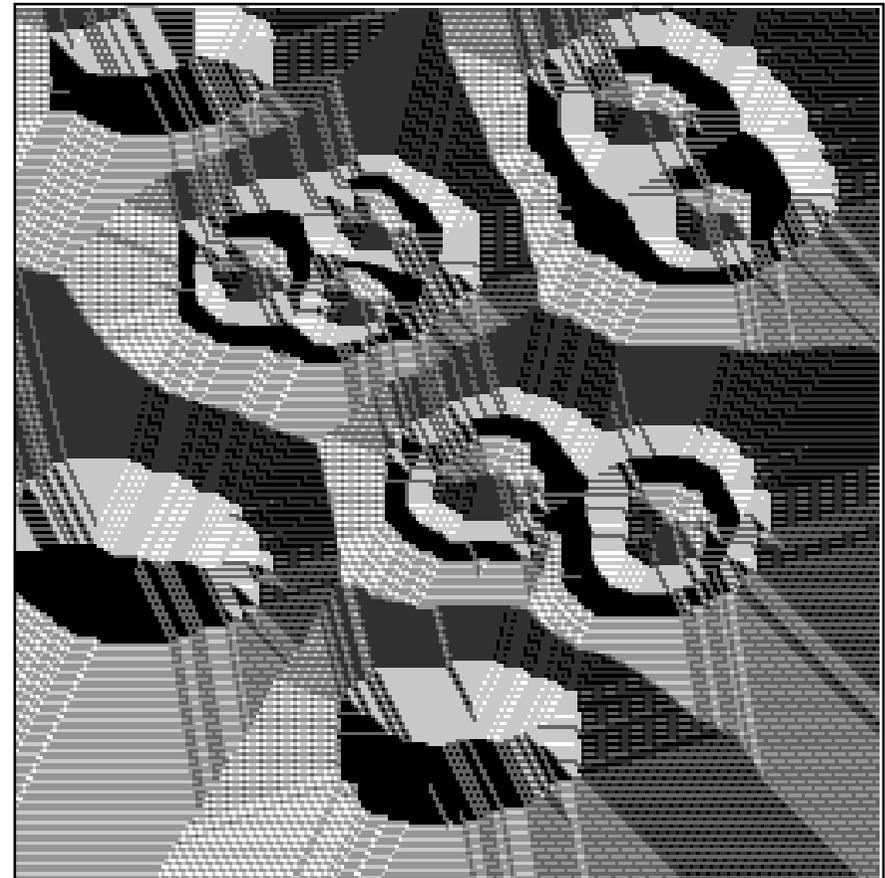
$$d(x,y) = \text{Inf} \{ \lambda : x \in \delta_\lambda(y) ; y \in \delta_\lambda(x) \}$$

$\delta_\lambda(y)$  est alors la boule de centre  $y$  et de rayon  $\lambda$  (*J.Serra*).

# Exemple de fonctions distance



*Ensemble A*



*Fonctions distance des ensembles  
A et  $A^c$ .*

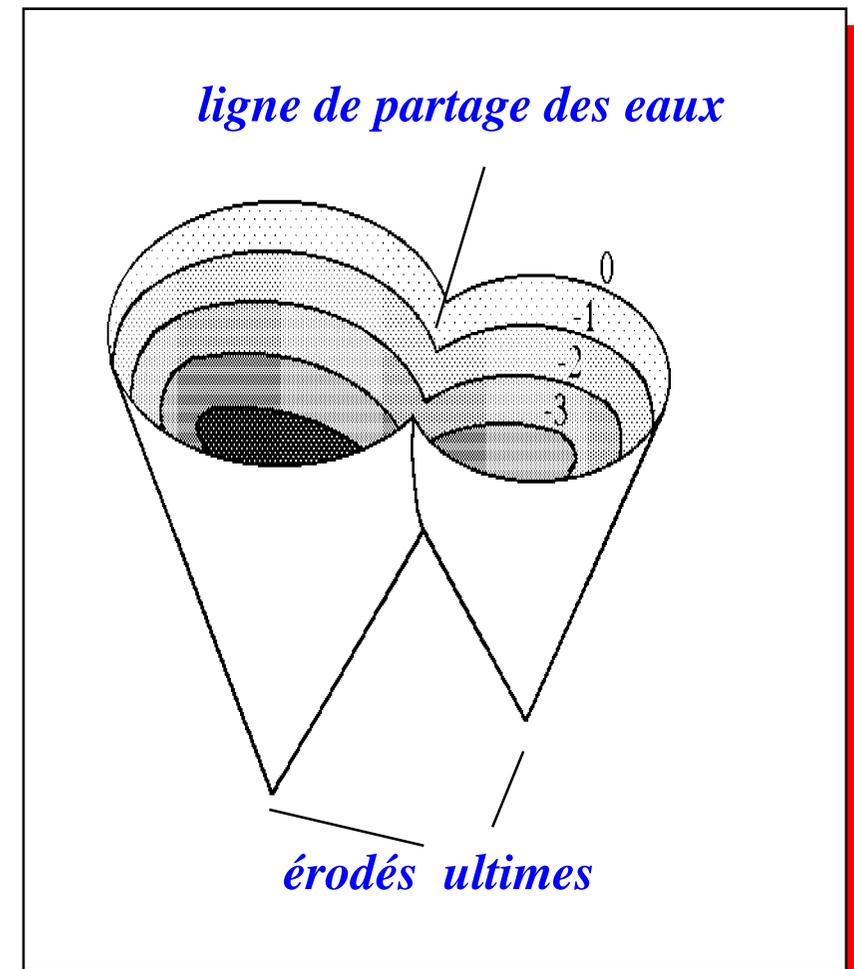
## Autre Exemple



*Le voyage des Hommes et des Femmes Tingary (Papunya, Australie)*

# Segmentation fine et fonction distance

- Les érodés successifs de l'ensemble  $X$  constituant les sections horizontales de sa fonction distance,
- la procédure de segmentation fine précédente, par Skiz géodésiques revient donc à déterminer les **lignes de partage des eaux** de la fonction distance (tout au moins quand les marqueurs sont les érodés ultimes).
- Aussi bien, par dualité, il s'agit des **lignes de vallées** sur la fonction inverse



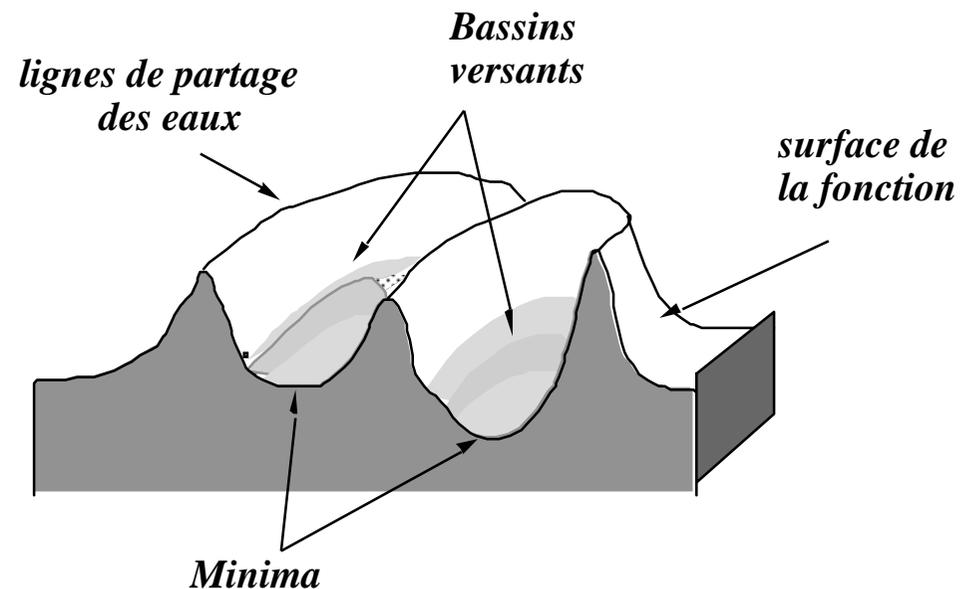
# L. P. E. d'une fonction numérique

La méthode suggérée par le cas des fonctions distance s'applique aussi bien à toute **image numérique** (S.Beucher)

L'analogie entre niveaux de gris et altitudes justifie les termes de ligne de partage des eaux et de bassins versants.

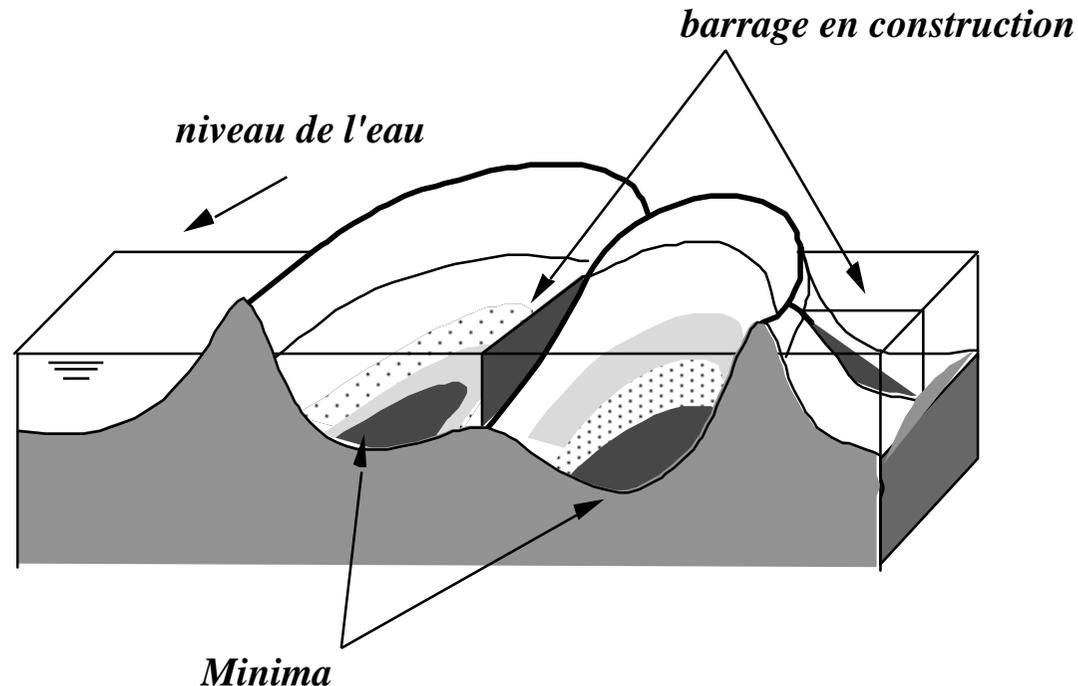
Toutefois, il ne s'agit pas ici de ruissellement, mais au contraire, d'eau qui **sourd des minima**.

*caractères topographiques  
d'une image numérique*



*N.B. L'algorithme de Beucher et Lantuejoul (ci-dessous), est pédagogiquement le plus parlant. Il a été amélioré par L.Vincent et P.Soille. A noter surtout celui par files d'attente hiérarchiques de F.Meyer, sensiblement plus performant.*

# Construction de la L.P.E. par inondation (I)



Imaginons que de l'eau jaillisse de chaque minimum et que la surface soit inondée à partir de ces sources. Progressivement, le niveau de l'eau s'élève.

- Pour empêcher le mélange des eaux venant de minima différents, on crée un barrage élémentaire en chaque point de contact. L'eau continue de s'élever;
- A la fin, ne restent que les digues achevées, entourées d'eau: c'est la **L.P.E.**

# Construction de la L.P.E. par inondation (II)

## Algorithme (S.Beucher, Ch Lantuejoul)

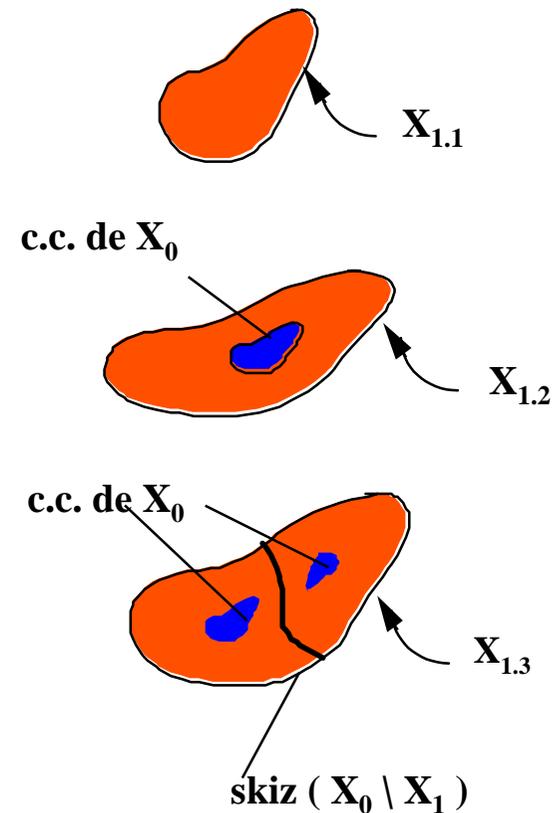
- Soit  $m$  la valeur minimale de la fonction  $f$ .  
Posons:

$$X_0 = \{ x: f(x) = m \},$$

$$X_k = \{ x: f(x) \leq m+k \} \text{ avec } 1 \leq k \leq \max f$$

- Appelons  $Y_1$  les zones d'influence géodésiques de  $X_0$  dans  $X_1$  et distinguons trois types de composantes connexes de  $X$ 
  - celles,  $X_{1,1}$  qui ne contiennent pas de points de  $X_0$ : elles sont absentes de  $Y_1$
  - celles,  $X_{1,2}$  qui contiennent une seule c.c. de  $X_0$ : elles font alors partie de  $Y_1$
  - celles,  $X_{1,3}$  qui contiennent plusieurs c.c. de  $X_0$ :  $Y_1$  récupère alors  $X_{1,3}$  diminué des branches de son skiz géodésique.

## évolution de l'inondation



# Construction de la L.P.E. par inondation (III)

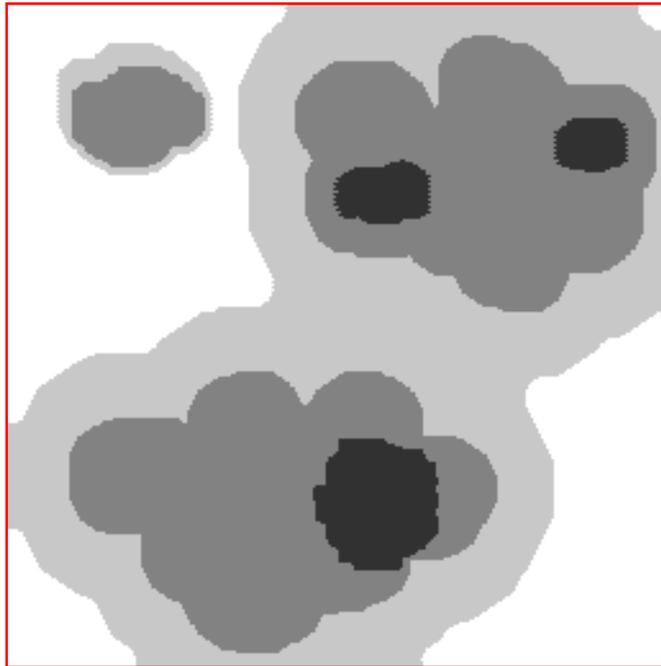
- Comme les  $X_{1,1}$  sont des minima apparus à la cote 1, il convient de les incorporer à l'inondation. On remplace donc

$$X_1 \quad \text{par} \quad Y_{1 \sim X_{1,1}}$$

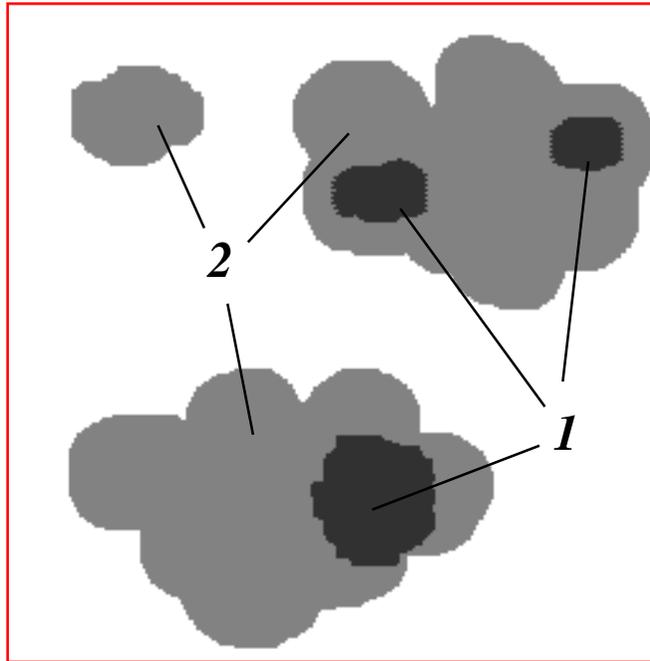
- et l'on itère : c'est à dire que l'on calcule les zones d'influence géodésiques  $Y_2$  de  $Y_{1 \sim X_{1,1}}$  dans  $X_2$ , d'où le marqueur  $Y_{2 \sim X_{2,1}}$ , etc...
- Le processus s'arrête quand on atteint le niveau  $k = \max f$ . On a alors :

$$\begin{aligned} Y_{\max f} &= \text{réunion des bassins versant} \\ [Y_{\max f}]^c &= \text{ligne de partage des eaux.} \end{aligned}$$

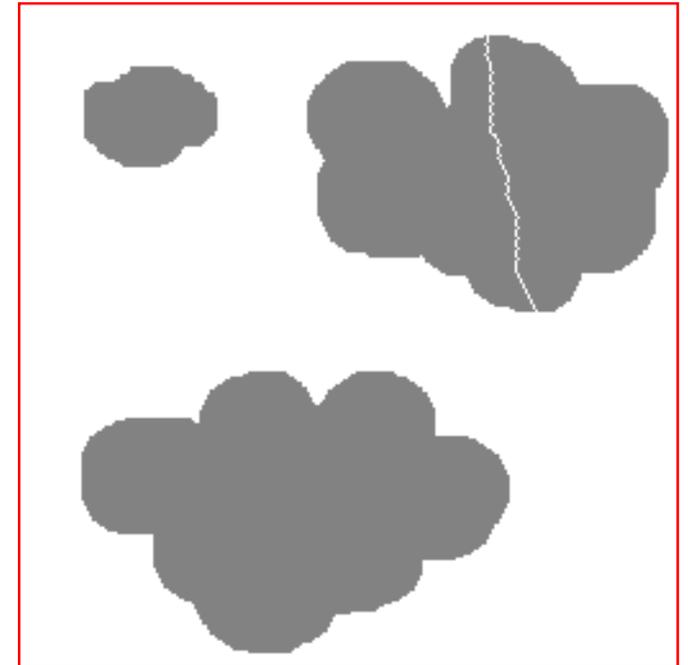
# Exemple de L.P.E. par inondation (I)



*Image initiale.*

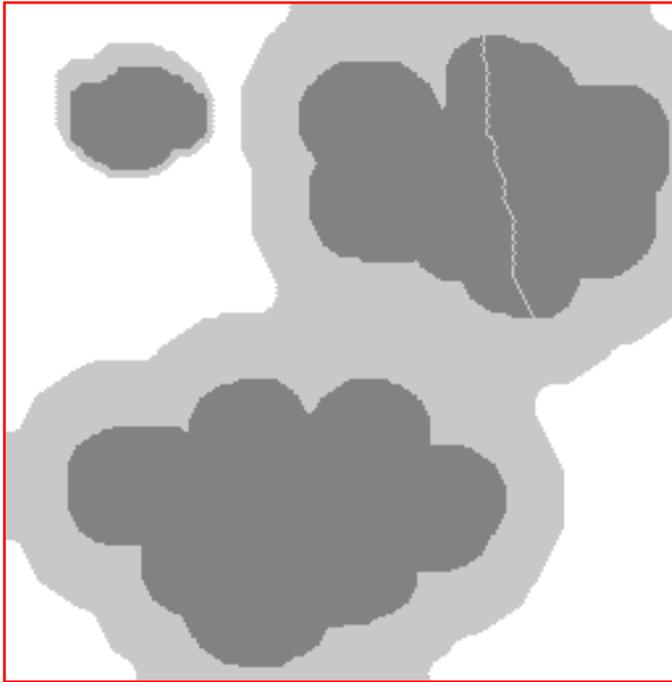


*Minima (1), et  
niveau suivant (2).*

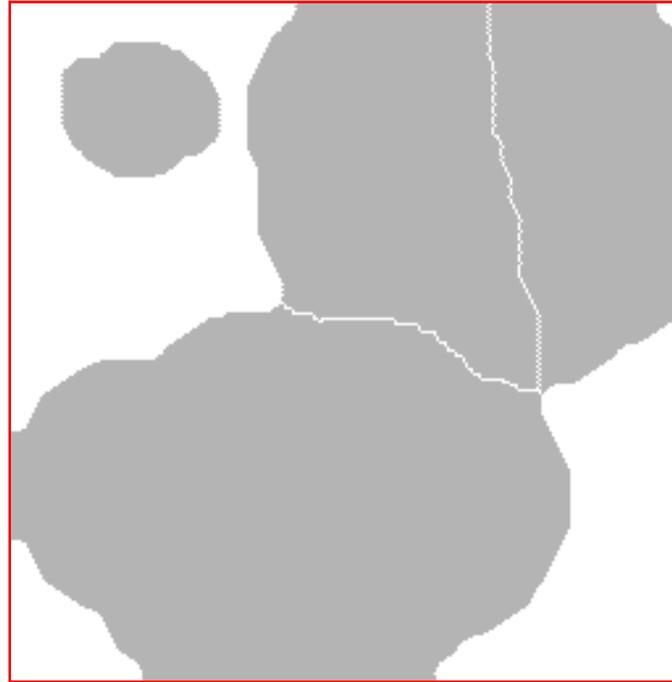


*Skiz géodésique  
de (1) dans (2)  
(en trait blanc).*

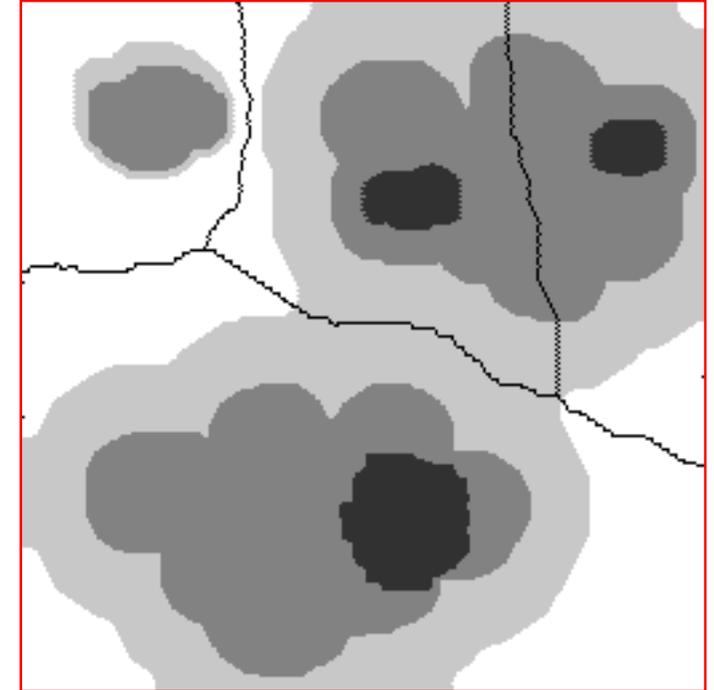
## Exemple de L.P.E. par inondation (II)



*Niveau (2), diminué  
du premier skiz,  
et niveau (3).*



*Deuxième skiz  
(on notera qu' il  
prolonge le premier).*



*L.P.E. finale  
(le résultat est significatif  
malgré le faible nombre  
de niveaux).*

# Références

## *Sur la fonction distance :*

- Le concept d'ensembles parallèles (*i.e.* de dilatés selon des boules) date de J.Steiner{STE40} en 1840. Mais la fonction distance apparaît en traitement d'image avec G.Matheron en 1967, cas euclidien {MAT67}, et A.Rosenfeld en 1968, cas digital{ROS66}. La littérature est riche d'algorithmes pour calculer cette fonction {MEY89a},{VIN90},{SOI91} et {DAN80}. Le théorème liant dilations et distance est établi dans {SER88, ch2}.

## *Sur la ligne de partage des eaux ( LPE) :*

- La transformation par LPE à fins de segmentation d'image de gris est due à S.Beucher et Ch.Lantuejoul, en 1979 {BEU79}. Pendant les années 80 S.Beucher and F.Meyer ont élaboré les concepts de marqueur et de «swamping» {BEU90} and {MEY90}. L'algorithme de calcul de la LPE le plus performant a été trouvé par F.Meyer {MEY91} (files d'attente hiérarchiques). Voir aussi {SER98} (LPE et connexions) et {ALB97} (méthode de la LPE et agrandissements).