Connexions et segmentation d'image

Jean Serra
Centre de Morphologie Mathématique,
Ecole des Mines de Paris, 35, rue Saint-Honoré,

77305 Fontainebleau (FRANCE)
janvier 2002

Abstract

A new class of set connections is proposed, that interprets in terms of connexions the concept of image segmentation.

Mots clé : segmentation, connexion, $\rho-$continuité, Lipschitz, zones quasi-plates, connexion par sauts, connexions lisse, nivellements, couleur.

1 Critères et segmentation

En traitement d'image, on dit qu'on a segmenté une image, ou une séquence, lorsqu'on a partitionné l'espace où elle est définie en zones homogènes au regard d'un critère que l'on s'est donné. Par exemple, si l'on représente cette image par une fonction numérique $f : E \rightarrow \overline{R}$ où E est un ensemble équipé d'une connexion, on *segmente f en zones plates et connexes* lorsqu'on crée la partition D de E telle que pour tout x$\in E$ la classe $D(x)$ est la plus grande composante connexe de E contenant le point x et sur laquelle la fonction f est constante et égale à $f(x)$.

Les critères portant sur f ne se prêtent pas tous à un tel découpage. Supposons par exemple qu'on veuille partitionner E en zones, connexes ou pas, où la fonction f est Lipschitz de paramètre unité. On risque fort bien de trouver trois zones disjointes A, B, et C telles que le critère soit vérifié sur $A \cup B$ et sur $A \cup C$, mais pas sur $B \cup C$. Dans ce cas, il n'existe pas de *plus grande composante* contenant les points de A et où le critère soit réalisé. Donc pas de segmentation.

En d'autres termes les partitions auxquelles l'idée de segmentation fait référence sont *maximales* en ce sens que parmi tous les découpages de l'espace en zones plates (par exemple), il en est un qui conduit aux classes les plus grandes. On a d'ailleurs aussi un plus petit découpage, à savoir celui qui pulvérise l'espace E en tous ses points.

Ces remarques nous conduisent à donner une expression plus formelle, donc plus précise, aux deux notions de critère et de segmentation

Definition 1 *Critère: Soit $f \in \mathcal{F}$ une fonction d'un ensemble E dans un treillis complet, mais pas nécessairement à ordre total, T . Un critère $\sigma : \mathcal{F} \otimes \mathcal{P}(E) \rightarrow [0,1]$ est une fonctionnelle binaire, et décroissante sur $\mathcal{P}(E)$. Notant $f(A) = \{f(x), x \in a\}$, il vient donc:*

$\sigma[f(A)] = 1$ *(critère vérifié sur A)*

$\sigma[f(A)] = 0$ *(critère infirmé sur A)*

De plus avec en particulier $\sigma[f(x)] = 1$ pour tout $x \in E$.

Cette dernière condition nous garantit que quel que soit le critère, il y a toujours au moins une manière de partitionner E en zones (les points) qui le vérifient. Il y en a souvent bien davantage, et même, dans le cas d'une segmentation de l'image, une plus grande partition. La condition de décroissance signifie simplement que si critère vérifié sur A il l'est a fortiori sur tout $B \subseteq A$.

Lorsqu'on dit par exemple que pour l'ensemble A et la fonction f la fonctionnelle σ est vérifiée si A est réduit à un point ou si

$$\inf\{f(x),\, x \in A\} \geq t_0 \text{ et } \sup\{f(x),\, x \in A\} \leq t_1\}$$

avec t_0 et t_1 fixés, on construit un critère, celui du seuillage.

De même l'espace E etant métrique de distance d, on considère les zones A où

$$x, y \in A \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq kd(x,y),$$

et si l'on remarque que lorsque A est réduit à un point cette implication est toujours vraie, on construit encore un critère, celui de la k-lipschitzcité.

Definition 2 *Segmentation: Etant donnés une fonction f et un critère σ, soit $\{D_i\}$ la famille, non vide, des partitions de E en zones homogènes de f selon σ. On dit que le critère σ* segmente *les fonctions lorsque pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$ la famille $\{D_i\}$ est stable pour la réunion. La partition $\vee D_i$ définit alors la* segmentation de f selon σ.

C'est cette partition maximale qui fait défaut dans le critère ci-dessus du découpage de l'espace en fonctions k-Lipschitz.

2 Critères connectifs

Nous nous proposons de caractériser les conditions que doit vérfier le critère σ pour devenir un outil de segmentation. L'apparition de partitions maximales, comme aussi bien l'exemple des zones plates nous orientent vers l'axiomatique des connexions par l'intermédiaire du concept de *critère connectif.*

Definition 3 *Un critère $\sigma : \mathcal{F} \otimes \mathcal{P}(E) \rightarrow [0,1]$ est* connectif *quand pour toute famille $\{A_i\}$ dans $\mathcal{P}(E)$ l'on a*

$$\cap A_i \neq \emptyset \quad \textit{et} \ \wedge \sigma[f(A_i)] = 1 \Rightarrow \sigma[f(\cup A_i)] = 1 \tag{1}$$

Autrement dit, si le critère σ est vérifié par la fonction f dans toutes les régions A_i de l'espace, et que ces régions ont un point en commun, alors est aussi vérifié sur la réunion $\cup A_i$.

Proposition 1 *L'infimum de toute famille $\{\sigma_j, j \in J\}$ de critères connectifs est lui-même un critère connectif.*

Proof. (démonstration évidente) ■

Plus généralement d'ailleurs, les critères connectifs forment un treillis complet.

Theorem 1 *Soit $\mathcal{F}$ la famille des fonctions $f : E \to T$ où T est un treillis complet. Un critère σ segmente les fonctions $f \in \mathcal{F}$ si et seulement si il est connectif.*

Proof. *Soit σ un critère connectif sur $\mathcal{F}$, et soit $f \in \mathcal{F}$. Désignons par $\mathcal{C}$ la réunion de l'image inverse de 1 selon σ et de l'ensemble vide*

$$\mathcal{C} = \{A \mid A \in \mathcal{P}(E) \text{ et } \sigma[f(A)] = 1\} \cup \emptyset. \tag{2}$$

Si A_i est une famille d'intersection non vide dans $\mathcal{C}$, alors d'après la relation (1), $\cup C_i \in \mathcal{C}$. Comme de plus les points et l'ensemble vide sont dans $\mathcal{C}$, cette classe est une connexion. Elle partitionne donc tout ensemble, et en particulier E lui-même en composantes maximales vérifiant le critère σ. Et comme cette propriété reste vraie pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$, σ induit une segmentation. Inversement, étant donné un critère de segmentation σ, considérons la classe $\mathcal{C}$ définie par l'équation (1), et une famille A_i dans $\mathcal{C}$ dont l'intersection n'est pas vide. Choisissons un point $y \in \cap A_i$. Comme la partition engendrée par (σ, f) sur E est maximale, la classe $D(y)$ qu'elle induit en y contient chacun des A_i, donc $D(y) \supseteq \cup A_i$, et par décroissance de σ, il vient $\sigma[f(\cup A_i)] = 1$ ■

Il est à remarquer que bien que E n'ait pas été doté d'une connexion au départ, le critère connectif lui en fournit une. Inversement, si E est déjà équipé de la connexion $\mathcal{C}'$, l'intersection $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$, qui est une connexion, engendre à son tour une partition maximale pour l'intersection des deux contraintes. Par exemple, le critère "la fonction f est constante sur A" conduit à partitionner E selon toutes les valeurs de seuil de f. Si l'on impose en plus que A doive être connexe (au sens de $\mathcal{C}'$), on obtient alors la segmentation de f en zones plates et connexes présentée plus haut.

Autre remarque: dans les critères connectifs que nous construisons ci-après, le treillis T d'arrivée sera toujours $\overline{R}, \overline{Z}$ ou certains de leurs quasi sous-treillis. Toutefois, rien n'y oblige dans le théorème que nous venons de voir, qui s'applique aussi bien à l'imagerie multispectrale, ou à tout autre type de treillis.

3 Critères lipschitziens

3.1 ω-continuité locale

E est maintenant un espace métrique, de distance d, et le treillis T la droite achevée. On sait que les fonctions ω-continues sont définies par la condition

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega(d(x,y)) \qquad \forall\ x,y \in E \tag{3}$$

où $\omega : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}_+}$ est une fonction continue à l'origine. Le paramètre ω se nomme *module de continuité* [1]. Pour chaque fonction ω, les fonctions ω-continues forment un sous treillis complet $\mathcal{F}_\omega$ de T^E, i.e. un treillis où le sup l'inf coïncident avec les supremum and infimum *numériques* en chaque point. En pratique, les deux classes ω-continues les plus utiles sont les fonctions de Lipschitz où l'on remplace $\omega(d(x,y))$ par $kd(x,y)$ dans l'inégalité (3), et les fonctions à variation bornée, de module

$$\omega \ = kd(x,y) \quad \text{si} \ \ d \leq d_0 \quad ; \quad \omega = kd_0 \quad \text{si}\ d \geq d_0 \tag{4}$$

La forme de la relation (3) suggère une définition équivalente, mais de style plus morphologique, de la ω-continuité. Introduisons le *module d'accroissement* α comme

$$\alpha_b(f) = (\delta_b f - f) \vee (f - \varepsilon_b f) \tag{5}$$

où δ_b et ε_b sont respectivement la dilatation et l'érosion par la boule fermée de rayon b, et qui n'est pas sans analogie avec le gradient de Beucher. Une fonction est alors ω-continue si et seulement si

$$\alpha_b(f) \leq \omega(b).$$

Pour élaborer des segmentations à base de ω-continuité, il est commode d'exprimer celle-ci sous une forme locale.

Definition 4 *Une fonction $f \in \mathcal{F}$ est localement ω-continue, de portée $a > 0$ lorsqu'elle est ω-continue dans toute boule de rayon a.*

Le critère "la fonction f est localement ω-continue de portée a sur A" est manifestement connectif, puisqu'aussi bien la réunion de plusieurs régions de ce type, même d'intersection vide, est encore ω-continue.

3.2 Connexion lipschitzienne

Par exemple, la fonction f est localement lipschitzienne sur un ensemble A lorsque pour tous $x,y \in A$ on a

$$d(x,y) \leq a \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq kd(x,y) \tag{6}$$

On appelle alors "connexion lipschitzienne de portée a et de pente k " celle qui est engendrée par les zones localement lipschitziennes au sens de la relation (6).

Dans le cas euclidien, cette relation (6) équivaut à dire, plus géométriquement, que f et égale à la fois à son érodée et à sa dilatée par le crayon $H(k,a)$ (cylindre coiffé d'un cône) de pente k et d'extension a

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) = (f \ominus H)(x) = (f \oplus H)(x) \tag{7}$$

qui fournit aussi un algorithme pour mettre en oeuvre cette segmentation en imagerie digitale: il suffit d'éroder les fonctions f et $-f$ par le cône H ayant pour base le carré ou l'hexagone unité, et pour hauteur k, l'origine étant placée au sommet, puis de prendre l'intersection des deux ensembles où f est égale à son érodée d'une part, et à sa dilatée de l'autre.

Toutefois, l'expression du critère sur A nécessite la connaissance de f sur le dilaté de A par la boule de rayon a (et pas seulement sur A lui-même). Lorsque E est l'espace euclidien, avec sa connexité par arcs, le critère se prête à une interpétation très géométrique. Considérons une composante connexe A où f est localement ω-continue, et deux points quelconques x et y dans A. Si nous relions x à y par une ligne incluse dans A, alors la fonction f est ω-continue tout au long de cette ligne; qui plus est, la fonction reste ω-continue dans les dilaté de cette ligne par la boule de rayon a.

Le critère précédent détecte, certes, des zones localement ω-continues, mais tout en les réduisant par érosion selon la boule de rayon a. Les bandes limitrophes entre deux plages homogènes ont pour épaisseur $2a$ (cf. figure 1-b), et deviennent dans la partition maximale des ensembles de classes réduites chacune à un point. D'où l'idée d'améliorer ce premier critère en prenant pour classes A_i les regions où la fonction f coïncide avec son ouvert et avec son fermé selon le crayon H :

$$x \in A_i \Leftrightarrow f(x) = [(f \ominus H) \oplus H](x) = [(f \oplus H) \ominus H](x).$$

Comme le précédent, ce nouveau critère est connectif et son interprétation géométrique (dans le cas euclidien) change assez peu. Si l'on reprend les deux points x et y précédents, il existe un point x_0 avec $d(x,x_0) \leq a$ tel que f est ω-continue sur le segment $[x,x_0]$. De manière symétrique on trouve un point y_0 qui tient le même rôle vis à vis de y. De x_0 à y_0 on est ramené à la situation précédente, à savoir que f est ω-continue sur toutes les lignes de x_0 à y_0 incluses dans A_i ainsi que dans leurs dilaté. Les figures 1-b et 1-c illustrent la différence entre les deux critères en les comparant pour un même élément structurant $H(k,a)$ de hauteur $k = 6$ et de rayon $a = 7$.

4 Connexions par cheminements

Les quatre connexions de segmentation que nous présentons maintenant partagent la caractéristique de reposer sur des critères connectifs liés à des chemins. Par ailleurs elles diffèrent beaucoup, puisque certaines sont proches de dilatations, géodésiques pour les zones qu plates, ou euclidiennes dans le modèle lipschitzien, d'autres comme la LPE relèvent d'opérateurs non croissants. Toutes

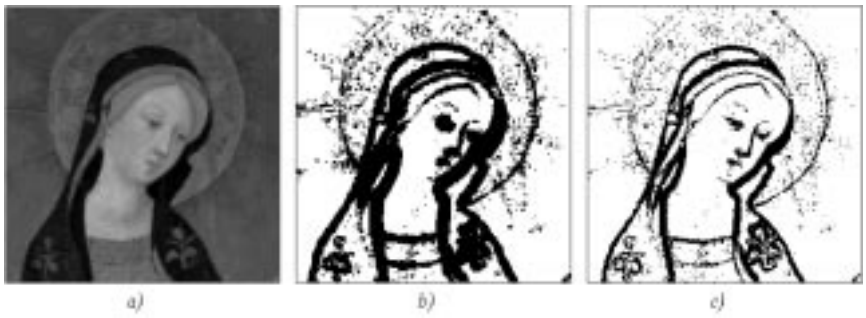

Figure 1: a) Image initiale (256×256 pixels sur 8 bits) ; b) Zones localement lipschitiziennes par érosion pour H(6,7) (en blanc) ; c) Zones localement lipschitiziennes par ouverture pour H(6,7) (en blanc). En noir, zones dont tous les points sont des composantes connexes.

en revanche imposent l'existence sur E d'une connexion par arcs préalable pour pouvoir être formulées.

4.1 Connexion lisse

On peut atténuer le critère lipschitzien local, qui érode les zones d'intérêt, en remarquant que quand la portée a augmente, à pente k fixée, les partitions maximales $D_{a,k}$ diminuent. Cela suggère de s'intéresser à la partition $D_k = \curlywedge\{ D_{a,k}\ , a > 0\}$, où l'infimum est pris au sens des partitions. On trouve encore une partition maximale nommée *connexion lisse*, dont l'interprétation euclidienne s'apparente aux précédentes: la fonction f est ω-continue sur tous les chemins de x à y inclus dans A, mais elle ne l'est plus dans leurs dilatés. La connexion lisse digitale est donc de taille unité. Son implantation peut se conduire comme précédemment, mais on peut aussi remarquer qu'il suffit de seuiller le module d'accroissement (5) pour $b = 1$, entre 0 et k pour obtenir les zones ponctuelles de D_k.

Cette connexion s'avère un bon outil de segmentation pour séparer les zones lisses des régions plus grumeleuses de niveau de gris similaire, comme cela apparait souvent en microscopie électronique [6]. La figure (2) montre deux segmentations d'une micrographie de béton à l'aide de connexions lisses.

4.2 Connexion lisse en HLS

Comme le modèle lipschitzien local (6) ne repose que sur des accroissement, on peut l'étendre aux mages en couleur HLS moyennant certaines précautions.En effet, seuls les opérateurs composés de l, s et des accroissements $\mid h(x) \div h(y) \mid$; $x, y \in E$, où $\mid h(x) \div h(y) \mid$indique la valeur de l'angle aigu des teintes aux points x et y, sont indépendants du choix dune origine des teintes [2]. Ce sera

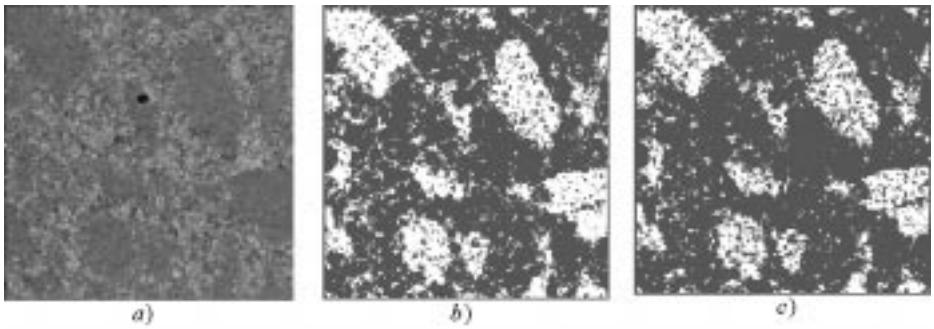

Figure 2: $a)$ micrographie électronique de roche; $b)$ et $c)$ connexions lisses de paramètre 7 et 6 de l'image $a)$

le cas si l'on remplace le module d'accroissement (5) par

$$\alpha'_b(h) = (\delta_b h \div h) \vee (h \div \varepsilon_b h)$$

suivi du barycentre des modules de l et h, pondérés par la saturation:

$$\beta_b = s\alpha'_b(h) + (1-s)\alpha_b(l)$$

La figure (3) montre à partir d'un tabeau initial de Juan Miro, la fonction numérique de synthèse ainsi que la connexion lisse qui s'en déduit par seuillage entre les valeurs 0 et 20.

4.3 Zones quasi- plates

Au lieu d'imposer que f soit ω-continue le long de *tous* les chemins inclus dans A, on peut aussi exiger seulement qu'il y en ait au mois un. Ce nouveau critère, plus généreux, est encore connectif, mais la ω-continuité n'intervient plus. Il conduit à la connexion selon les zones "*quasi-plates*" de F. Meyer [3]. La mise en oeuvre digitale passe cette fois-ci par des reconstructions géodésiques.

4.4 Lignes de paratge des eaux

Citons enfin l'une des plus anciennes connexions par cheminement: la ligne de partage des eaux. Le critère «tous les points de A sont inondés à partir d'un même minimum» étant connectif, la LPE segmente l'espace de définition E en bassins versants connexes par arc, plus en un ensemble de composantes connexes ponctuelles qui constituent les lignes de partage.

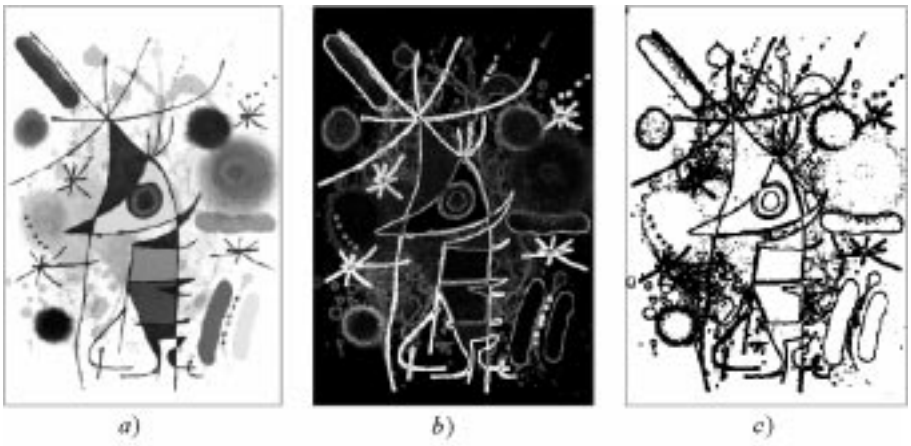

Figure 3: a) original de J.Miro; b) module d'accroissement synthétique β_b; c) connexion lisse pour $b = 20$.

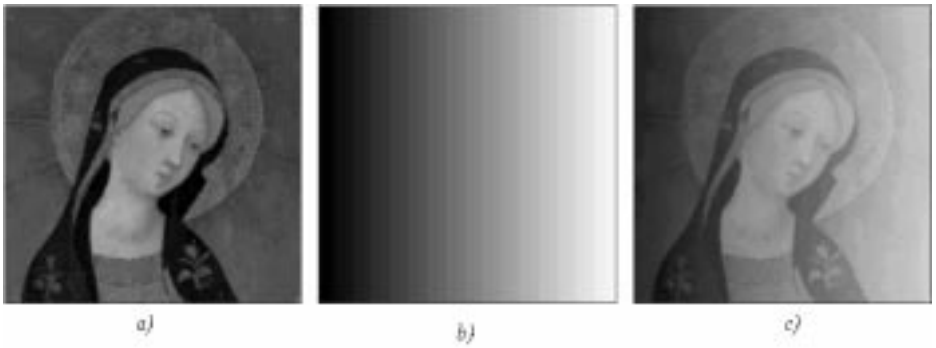

Figure 4: a) Image initiale ; b) dérive ; c) somme pondérée de a) plus b).

5 Fonctions à variations localement bornées

5.1 Connexion par variations d'amplitude

Nous considérons maintenant la ω-continuité par variation bornée, dans sa version locale. Son module, défini par l'équation (4) conduit à de bons opérateurs de pseudo-horizontalité, d'autant meilleurs qu'ils ne jouent pas sur des accroissements progressifs, comme la continuité lipschitzienne locale, mais sur des sauts. On peut d'ailleurs supposer la portée d_0 de petite dimension par rapport aux conditions expérimentales et l'éliminer du formalisme. L'équation (4) se réduit alors à

$$d(x,y) \leq a \Rightarrow \mid f(x) - f(y) \mid \leq \kappa$$

L'implémentation opère maintenant avec un élément structurant H qui n'est plus un "crayon", mais qui est porté par deux plans: H comprend l'origine et le disque centré verticalement, de rayon a et de cote $-\kappa$. On retrouve ici le module d'accroissement de la relation (5), dont le seuillage pour les valeurs $\leq \kappa$ fournit les classes de la partition. Comme on peut s'y attendre cette ω-continuité est plus sensible aux lentes dérives que les précédentes. Si par exemple on rajoute à l'image initiale précédente une dérive croissant de gauche à droite (cf. la figure 4), la segmentation des deux images des figures 4 a et c, obtenue pour les mêmes valeur de paramètres ($\kappa = 6, a = 7$), montre une différence notable. A l'opposé, la segmentation des deux mêmes images par continuité lipschitzienne locale (érosions) est pratiquement insensible à la présence d'une dérive. On retrouve cependant, comme dans le cas lipschitzien, des zones de classes ponctuelles assez épaisses. Elles seront réduites partiellement si dans la relation (5) du module d'accroissement, l'on remplace l'érosion et la dilatation respectivement par leur ouverture et fermeture adjointes.

5.2 Connexion par sauts

On améliore sensiblement la connexion précédente en fixant les origines des variations aux minima ou aux maxima de la fonction f. Pour une variation d'amplitude k donnée, considérons l'ensemble des composantes connexes dont les points z accusent un dénivelé $f(z) - m$ au dessus d'un minimum m tel que $0 < f(z) - m \leq k$, puis celles de dénivellés $k < f(z) - m \leq 2k$, puis $2k < f(z) - m \leq 3k$,etc... La segmentation selon ce critère, manifestement connectif, engendre la *connexion par sauts.* La procédure alternative à partir des maxima se construit par dualité, et l'on peut combiner les deux dans une démarche symétrique, où la remontée s'arrète quand elle rencontre une descente, et où les zones à cheval entre montée et descente sont subdivisées [7] [6].

A l'usage la segmentation par sauts s'avère l'une des meilleures par la qualité des partitions qu'elle engendre (peu de zones ponctuelles,classes visuellement significatives), ainsi que par son économie en temps de calcul. Non seulement pyramidale au sens qu'elle dépend d'un paramètre, elle engendre des semi-groupes granulométriques lorsqu'on restreint les valeurs du paramètre aux progressions géométriques. Lorsqu'on trace le graphe du nombre de zones plates en

Figure 5: Segmentations du portrait de la Vierge, sans dérive puis avec selon la continuité lipschitzienne [a) et b)], et selon la continuité à variation bornée [c) et d)].

fonction de l'amplitude du saut, les changements de pente de la courbe repèrent les valeurs de sauts dont les segmentations sont les plus significatives. La figure (6) illustre ce point.

Une connexion peut servir à en renforcer une autre. Ainsi les connexions lisses de la figure (2) sont elles améliorées quand on en prend l'infimum avec une connexion par sauts de paramètre convenable (cf figure 7)

La bonne qualité de la connexion par sauts suggère qu'on l'étende à l'imagerie en couleurs. On pourrait encore procéder ici par accroissements à partir d'un axe numérique synthétique, comme pour la connexion lisse, ou plus simplement s'appuyer sur la seule luminance, dont les extrema sont visuellement plus significatifs que ceux de la saturation ou de la teinte. C'est ce à quoi il a été procédé en figure (8). Pour donner une meilleure idée des segmentations résultantes, on a calculé les moyenne arithmétiques du rouge, du vert, et du bleu dans chaque classe connexe, créant ainsi une mosaïque que l'on peut comparer à l'image originale. On remarquera l'absence de fausses couleurs dans les résultats.

6 Quelques critères par mesures

Nous faisons maintenant agir des critères connectifs sur des mesures portant sur les zones A_i.

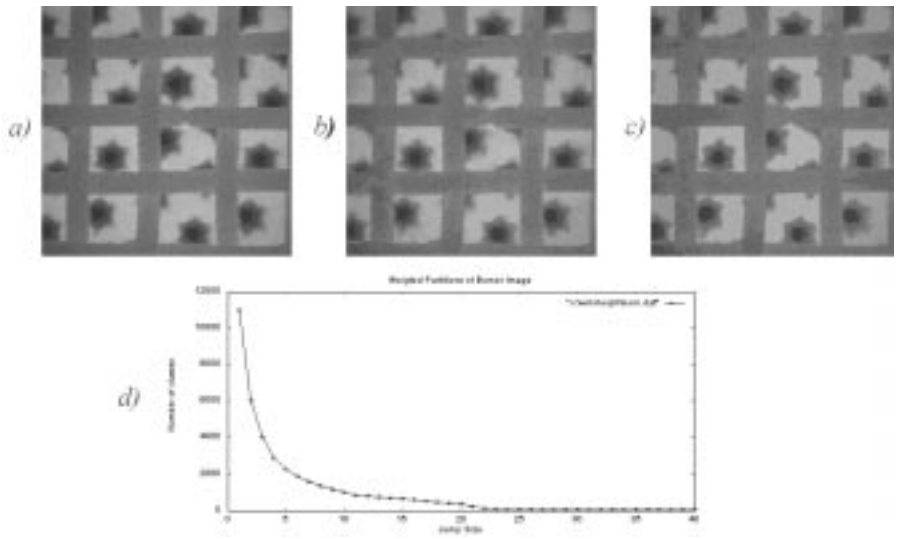

Figure 6: *a*) Image initiale : brûleur de gaz; *b*) saut d'amplitude 12 : 783 zones; *c*) saut d'amplitude 24 : 63 zones; *d*) Nombre de zones en fonction des amplitudes des sauts

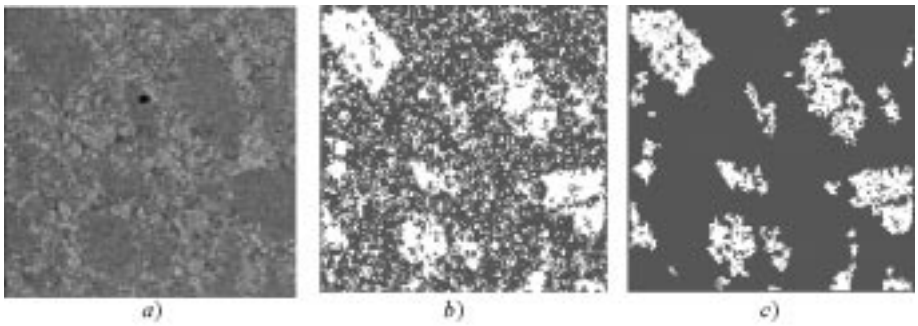

Figure 7: *a*) micrographie électronique de roche; *b*) connexion par sauts damplitude 12; *c*) intersection des connexions par sauts (12) et lisse (6) .

Figure 8: $a)$ image initiale; $b)$ et $c)$ connexions par sauts d'amplitude 5 (326 zones) et 10 (145 zones)

- Le seuillage. Il est clair que l'opérateur de seuil entre les niveaux t_0 et t_1

$$\inf\{f(x), x \in A\} \geq t_0 \ et \ \sup\{f(x), x \in A\} < t_1\}$$

  est connectif. On peut l'améliorer de bien des manières. D'abord en prenant le supremum de toutes les partitions maximales associées à $[t_0, t_1[$, $[t_1, t_2[, etc.$. ce qui segmente l'image en seuils successifs. On peut aussi intersecter ces seuillages avec une connexion pré-existante, ou en rajoutant encore un critère de volume minimal sur les zones A_i, comme celui-ci

$$\int_{A_i} f(x)dx \geq v_0$$

  qui sélectionne les A_i où l'intégrale de la fonction est suffisamment élevée. On notera que le critère de volume minimal, pris seul, est connectif mais assez trivial puisqu'il ne peut conduire qu'à la partition la plus grande de l'espace E ou à la plus petite, mais que combiné à un autre critère connectif, il l'infléchit de façon significative.

- A l'inverse de ce critère de volume minimal, on peut aussi construire d'autres, plus locaux, où la taille est bornée supérieurement. En voici un: on part d'une connexion pré-existante sur E, et l'on considère les composantes connexes où l'intégrale de f sur tout disque de rayon $\leq r_0$ (où r_0 est un paramètre fixé) est plus petite qu'une valeur donnée v_1. On obtient alors un critère connectif pour les zones où la fonction ne monte pas trop haut ni trop rapidement. On peut lui associer le critère dual pour la multiplication par -1 de façon à encadrer les zones régulières.

- On peut songer encore à tous les critères texturaux ou de couleur associés au cercle unité [2], et considérer par exemple les régions du type "la zone A appartient à un ouvert selon le disque de rayon r et où toutes les directions (ou toutes les teintes) restent comprises à l'interieur d'un intervalle angulaire donné".

7 Conclusion

Dans cette note axée sur le concept de la segmentation vue comme une connexion, nous n'avons pas vraiment abordé le point de vue des opérateurs connexes associés. En fait, il apparait en filligrane à plusieurs reprises: les zones plates sont à l'origine des reconstructions géodésiques, les zones quasi-plates conduisent à des nivellements performants [8] et [4]. On trouvera une étude plus générale de la géodésie appliquée aux fonctions numériques dans [5]

References

[1] **G. Choquet** *Topologie* Academic Press, N.Y. 1966.

[2] **A.Hanbury, J.Serra** Morphological operators on the unit circle, *IEEE Transactions on Image Processing* 10 (12) pp. 1842-1850, 2001

[3] **F. Meyer,** The levelings. In *Mathematical Morphology and its applications to image and signal processing,* Kluwer, 1998.

[4] **F. Meyer**, Alpha-bêta flat zones, levelings and flattenings *Tech. Report EMP Déc.2001* (Three parts)

[5] **C. Ronse, J.Serra** Geodesy and connectivity in lattices *Fundamenta Informaticae*, Vol 46, issue 4, sept. 2001, pp. 349-395

[6] **J. Serra** Connectivity for sets and functions *fundamenta Informaticae, 41 (2000) 147-186*

[7] Serra J. Connectivity on complete lattices. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 9, (1998), pp 231-251

[8] **M-F. Zanoguera** *Segmentation interactive d'images fixes et de séquences video basée sur des hiérarchies de partitions,* thèse Ecole des Mines de Paris, décembre 2001, 200 p.