

# *Treillis visqueux*

*Définition*

*Connexions*

*Reconstruction géodésique*

*Application à la LPE*

*Par J. Serra*

*Ecole des Mines de Paris ( 2000 )*

# Bibliographie

- *Idée initiale :*

F.Meyer, La viscosité en ligne de partage des eaux. Note CMM 1994

- *Applications :*

1- Ph. Degrize, Reconstruction d'images IRM ; Analyse automatique d'images par Morphologie Mathématique. Thèse, Université Paris 7, 1994 ;

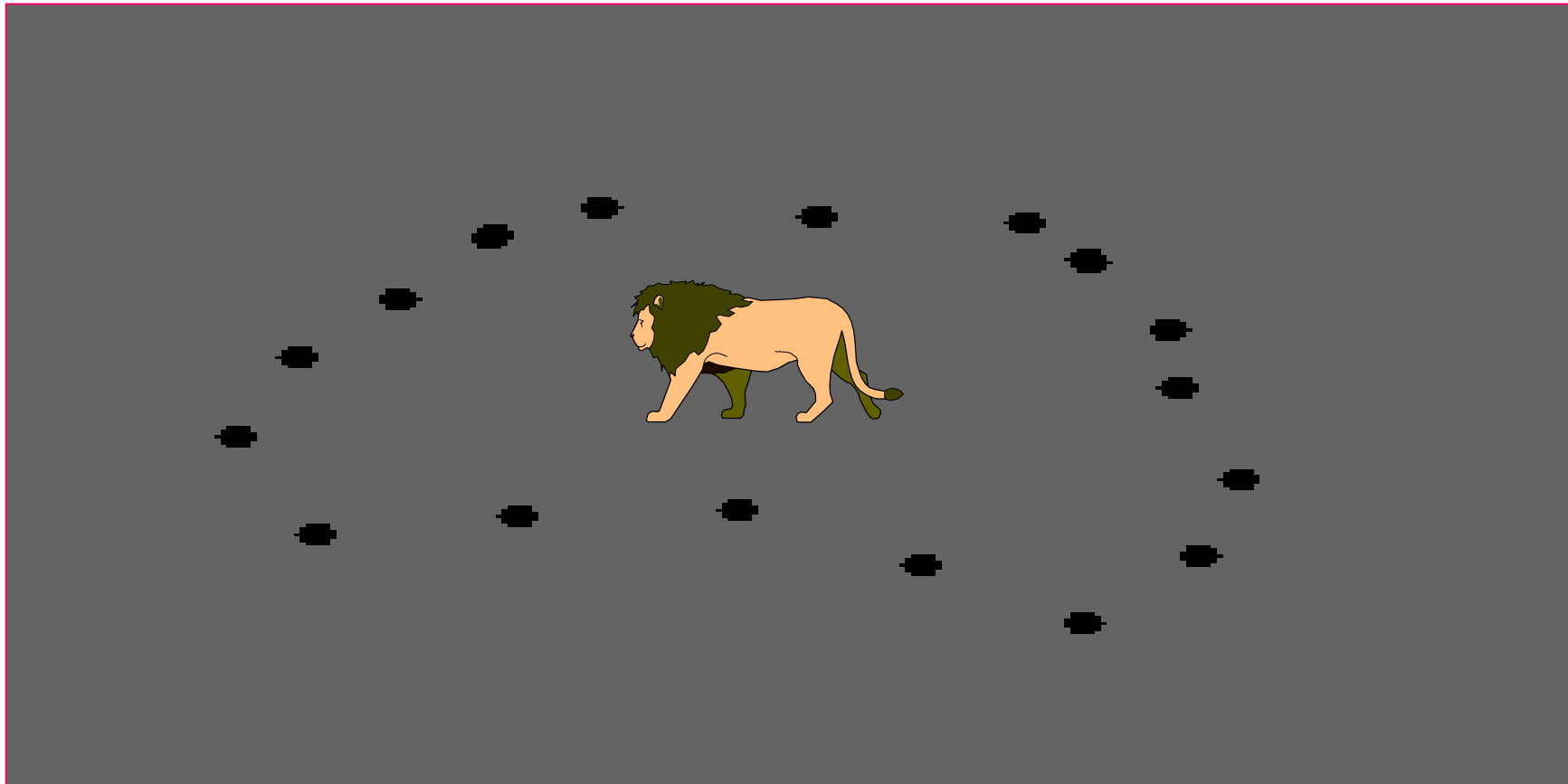
2- C. Vachier, F. Meyer et R. Lamara : Segmentation d'image par simulation d'une inondation visqueuse. A paraître dans RFIA 2000 - Paris ;

- *Développement actuel :*

J. Serra , les treillis visqueux Note CMM 2000, (avec exemple du contourage du muscle cardiaque par LPE visqueuse).

# Objectifs (1)

*But : Gonfler le lion pour qu 'il reste coincé dans sa cage*



# Objectifs

- *Méthode :*

Créer des reconstructions *visqueuses*, i.e. de ménisque donné.

- *Moyens :*

1- Construire le treillis adapté, dit *visqueux*, généré par les dilatés des points selon un  $\delta$  donné (la viscosité) ;

2- Elaborer des connexions sur  $\Lambda$  et les ouvertures connexes associées ;

- *Exemple :*

Contourage de muscle cardiaque par LPE visqueuse.

# Notations et rappel

- **Notation :**

$E$  : ensemble quelconque et  $\Pi(E)$  le treillis de ses parties;

$\delta$  : dilatation  $\Pi(E) \rightarrow \Pi(E)$ , d'érosion adjointe  $\partial$ .  $\delta$  est déterminée par les images des singletons  $\{\downarrow\}$  de  $\Pi(E)$  :

$$\delta(X) = \bigcap \{ \delta(\downarrow), \downarrow \in X \} \quad X \in \Pi(E) \quad (1);$$

$B = \{ \delta(\downarrow), \downarrow \in E \}$  : classe des dilatés des singletons;  
 $\gamma = \delta \partial$  = ouverture adjointe à la dilatation  $\delta$ .

- **Rappel :** La famille  $\Lambda = \{ \delta(X), X \in \Pi(E) \}$  des dilatés des éléments de  $\Pi(E)$  est aussi l'image de  $\Pi(E)$  dans l'ouverture  $\gamma = \delta \partial$ , adjointe de la dilatation  $\delta$ .

# Treillis Visqueux

- **Proposition 1 :**

*L'ensemble  $\Lambda$  se structure en treillis complet pour l'ordre de l'inclusion. Dans ce treillis le supremum coïncide avec la réunion ensembliste, alors que l'infimum  $\wedge$  est l'ouverture selon  $\gamma = \delta \partial$  de l'intersection*

$$\wedge \{X_i, i \in I\} = \gamma(\cup \{X_i, i \in I\}) \quad \{X_i, i \in I\} \in \Lambda(2)$$

- *Les éléments extrêmes de  $\Lambda$  sont  $E$  et l'ensemble vide  $\emptyset$ .*
- *On dit que  $\Lambda$  est le **treillis visqueux de dilatation  $\delta$***

# Atomes et sup-générateurs

- *Sup-générateurs :*

la classe  $B$  est sup-génératrice du treillis  $\Lambda$  .

- *Atomes :*

En revanche, les  $\delta(\lrcorner)$  ne sont pas des atomes en général. Toutefois quand  $E = \nabla^n$  ou  $\wedge^n$  et pour une  $\delta$  invariante par translation, les éléments de  $B$  sont les translatés de l'image  $B \equiv \delta(0)$  de l'origine.

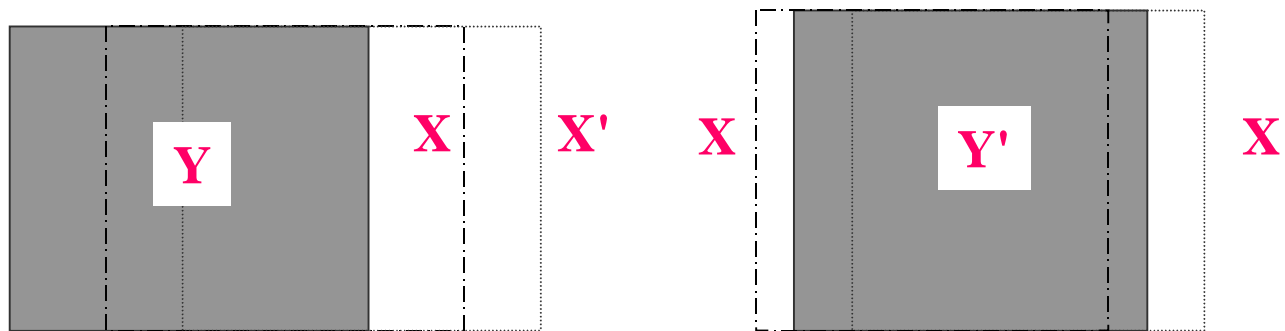
On sait que dans ce cas, si  $B$  est compact, le treillis visqueux associé est atomique, d'atomes les translatés de  $B$  .

# Quelques contre-performances

- **Proposition 2:**

*Le treillis visqueux  $\Lambda$ , de dilatation  $\delta$ , n'est en général ni distributif, ni co-primaire, ni n'admet de complément unique.*

- **Exemple de non distributivité:**



$$(X \wedge X') \cap Y = \emptyset \cap Y \neq (X \cap Y) \wedge (X' \cap Y) = (X \cap Y)$$

$$(X \cap X') \wedge Y' = Y' \neq (X \wedge Y') \cap (X' \wedge Y') = \emptyset$$



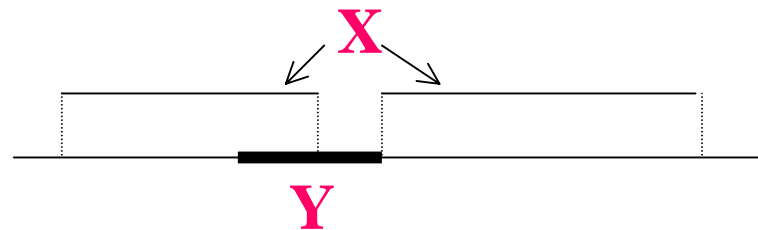
# Quelques contre-performances (2)

- *Complément :*

Est complément de  $X \in \Lambda$  tout ensemble  $Y \in \Lambda$  tel que

$$Y \subseteq X^c \quad \text{et} \quad \gamma(Y \cup X) = \emptyset$$

- *Exemple :*



- *Ce qui reste :*

l'involution de Galois entre dilatation et érosion adjointes, i.e

$$\delta(Y) \subseteq X \iff \epsilon(X) \subseteq Y \quad X, Y \in \Lambda \quad (3)$$

# Dilatation et érosion sur $\Lambda$

- *Liens entre une dilatation envisagée dans  $\Lambda$  et dans  $\Pi(E)$  :*

$$\alpha \Pi(E) \rightarrow \Pi(E) \quad \alpha^1 : \Pi(E) \rightarrow \Pi(E)$$

$$\alpha : \Lambda \rightarrow \Lambda \quad \beta : \Lambda \rightarrow \Lambda$$

Identité de  $\alpha$  agissant dans  $\Pi(E)$  ou dans  $\Lambda$ ...

- *Liens entre une érosion envisagée dans  $\Lambda$  et dans  $\Pi(E)$  :*

$$\beta(X) = \bigcap \{ \delta(\downarrow), \delta(\downarrow) \subseteq \alpha^1(X) \} = \beta(X) = \delta \partial \alpha^1(X)$$

L'érodé dans  $\Lambda$  est égal à l'ouvert par  $\delta \partial$  de l'érodé homologue (i.e. de même dilatation adjointe) dans  $\Pi(E)$ .

# Connexion (Rappel)

- *Cas ensembliste :*

Toute famille d'ensembles  $X \subseteq \Pi(E)$  qui vérifie les trois axiomes suivant

i /  $\emptyset \in X$

ii/  $\downarrow \in E \Rightarrow \{\downarrow\} \in X$  (la classe  $X$  est sup génératrice)

iii/  $\{X_i, i \in I\} \in X$  et  $\cup X_i \neq \emptyset \Rightarrow \cap X_i \in X$  (la classe  $X$  est conditionnellement stable pour la réunion).

- *Généralisation :*

Cette définition s'étend à tout treillis complet sup-généré en remplaçant  $\emptyset$  par le zéro du treillis, puis l'intersection et la réunion, ensemblistes, par le sup et l'inf. Le second axiome consiste à dire que  $X$  est une classe sup-génératrice.

# Premières connexions sur $\Lambda(1)$

- *Définition :*

Soit un treillis visqueux  $\Lambda$  de dilatation  $\delta$  sur  $\Pi(E)$ . Une classe  $X'$  de  $\Lambda$  définit une connexion sur  $\Lambda$  quand

$$\text{i / } \emptyset \in X'$$

$$\text{ii / } \delta^{-1}(X') \subseteq X' \quad (5)$$

$$\text{iii / } \{X_i, i \in I\} \in X' \text{ et } \bigwedge X_i \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap X_i \in X'$$

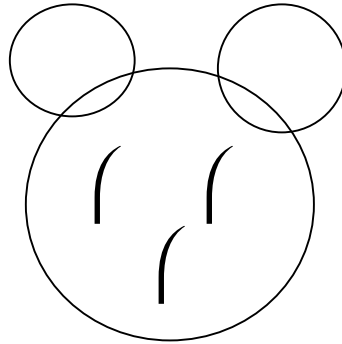
- *Proposition 3:*

Une classe  $X' \subseteq \Lambda$  est une connexion sur  $\Lambda$ , si elle est la restriction à  $\Lambda$  de la réunion d'une connexion  $X$  sur  $\Pi(E)$ , et de l'image  $B$  des singletons de  $\Pi(E)$  par  $\delta$ , i.e. si

$$X' = (X \cap \Lambda) \cup B = (X \cap B) \cup \Lambda$$

# Premières connexions sur $\Lambda(2)$

- *Exemple :*



$X$  = connexion par arcs, et  $\Lambda$  = treillis des ouverts selon le disque unité  $B$ . la réunion des trois lobes de la figure est à la fois élément de  $X$  et de  $\Lambda$ , donc de  $X'$ . Pourtant dans le treillis  $\Lambda$  des ouverts, ces trois lobes sont deux à deux disjoints. Et ils sont disjoints parce que leurs érodés par  $B$  sont disjoints dans  $\Pi(E)$ .

On obtiendra trois particules séparées pour les connexions sur  $\Lambda$  qui tiendront compte de l'état de connexité des éléments de  $\Pi(E)$  *avant* la dilatation  $\delta$ .

# Secondes connexions sur $\Lambda(1)$

- ***Théorème 1 :***

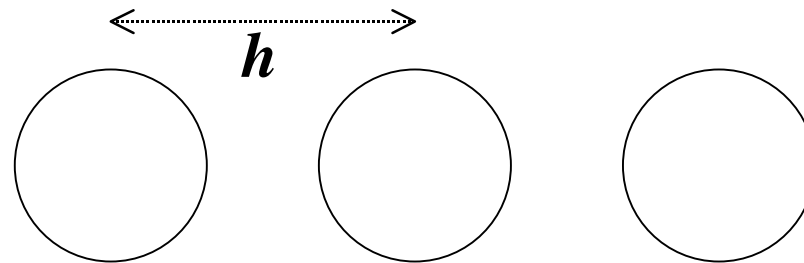
*Soit  $X$  une connexion sur  $\Pi(E)$  et  $\delta : \Pi(E) \rightarrow \Pi(E)$  une dilatation, d'érosion adjointe  $\partial$ , qui engendre le treillis d'ouverts  $\Lambda$ . L'image  $X' = \delta(X)$  de la connexion  $X$  constitue alors une connexion sur le treillis  $\Lambda$ .*

- ***Commentaires :***

- Ces nouvelles connexions sur  $\Lambda$  sont sensiblement plus restrictives que celles de la proposition 3.
- Ainsi, les trois lobes de la figure sont maintenant trois composantes connexes disjointes.

# Secondes connexions sur $\Lambda(2)$

- *Généralité du théorème :*
- Il n'est pas supposé que les images des éléments de  $X$  soient  $X$ -connexes. Par exemple, si dans  $\nabla^2$ , muni de sa connexion par arcs, on prend pour  $\delta$  la dilatation par un doublet de points distants de  $h$ , les deux disques de gauche de la figure forment un ensemble connexe, mais qui cesse de l'être si on rajoute le troisième disque, placé à droite.



- Toutefois, si  $\downarrow \varepsilon E \Rightarrow \delta \{ \downarrow \} \varepsilon X$ , alors  $X' = \delta (X) \subseteq )X$  et les éléments de  $X'$  sont alors connexes à la fois dans le treillis des ouverts  $\Lambda$  et dans  $\Pi(E)$ .

# Opérations géodésiques (1)

- *Théorème 2 :*

*Lorsque la connexion  $X$  est préservée par  $\delta$ , alors la connexion  $X'$  induite sur  $\Lambda$ , au sens du théorème 1, est elle aussi préservée par  $\delta$ .*

*Si de plus  $\gamma_{\perp}$  et  $\gamma'_{\delta(\perp)}$  désignent les ouvertures connexes élémentaires sur  $\Pi(E)$  et  $\Lambda$  respectivement, alors*

$$\gamma'_{\delta(\perp)} = \delta \gamma_{\perp} \delta \quad \leftarrow \mathbb{E}$$

- *Commentaire :*

Toute est l'ouverte selon  $\delta \partial$  de la  $X$ -particule correspondante, ce qui permet d'extraire les  $X'$ -particules. Mais peut-on, alternativement, construire des dilatations géodésiques **directement** dans  $\Lambda$  ?



# Opérations géodésiques (2)

- **Proposition 4 :**

Soit  $\delta$  extensive et préservant la connexion  $X \subseteq \Pi(E)$ . Etant donné  $A; Z \in \Pi(E)$ , avec  $A \subseteq Z$  et  $X$ -connexe, le dilaté conditionnel

$$\zeta(A) = \delta(A) \wedge Z$$

est alors  $X'$ -connexe et inclus dans  $Z$ .

- **N. B. :** Cela ne veut pas dire que les itérées de  $\zeta$  tendent vers une  $X'$ -composante de  $Z$ . Contre-exemple dans  $\mathbb{V}^2$  :

$E =$  carré  $D$  de côté  $a$  et de centre  $y$  ;

$B(y) =$  disque de diamètre  $< a$  centré en  $y$

$$\text{Dilatation} = \delta(\downarrow) = \{\downarrow\} \quad \downarrow \in D / y \quad ; \quad \delta(y) = B(y)$$

# Opérations géodésiques (3)

- **Définition:**

On dit que  $\delta$  est **complètement extensive** quand pour tout point  $\leftarrow \varepsilon E$  ( $E$  topologique) et pour tout compact  $K \subseteq E$ , il existe un entier  $n$  tel que l'itérée d'ordre  $n$  de  $\delta(\leftarrow)$  contient  $K$ .

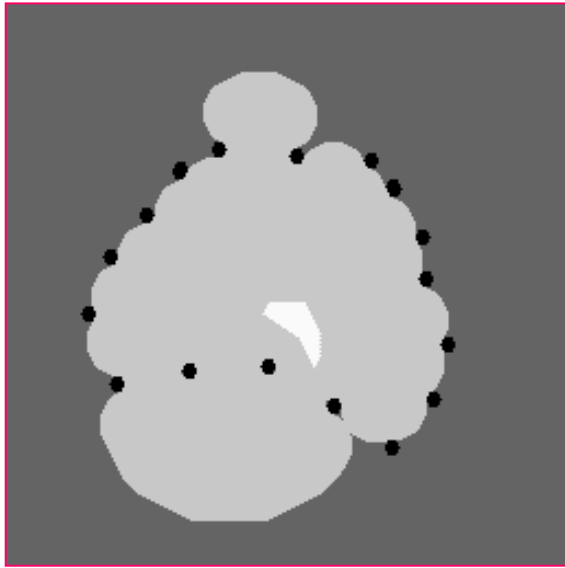
- **Proposition 5:**

Quand  $\delta$  est complètement extensive, la composante  $X'$ -connexe  $Z$  de  $\Lambda$  marquée par  $A \varepsilon X'(\Lambda)$  s'écrit, si elle est contenue dans un compact  $Z_0$  de  $\Pi(E)$ ,

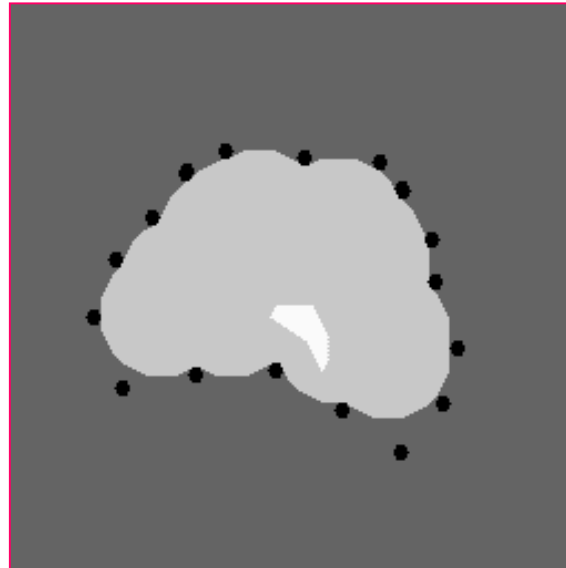
$$Z = \zeta^{(n)}(A)$$

pour un entier  $n$  convenable.

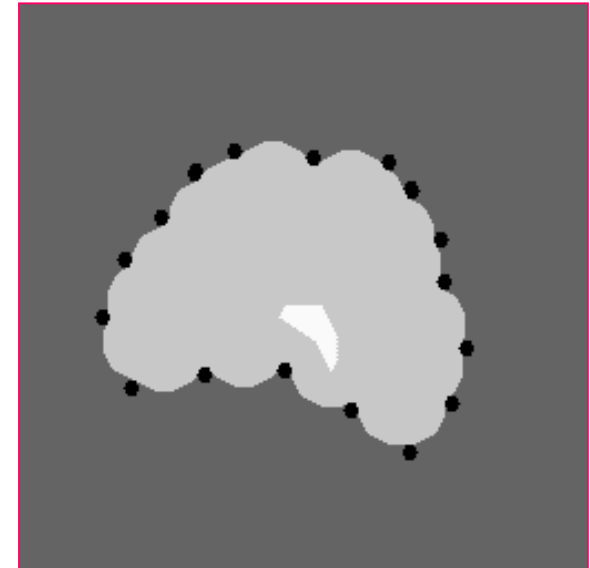
# Exemple géodésique binaire (1)



*a)*



*b)*

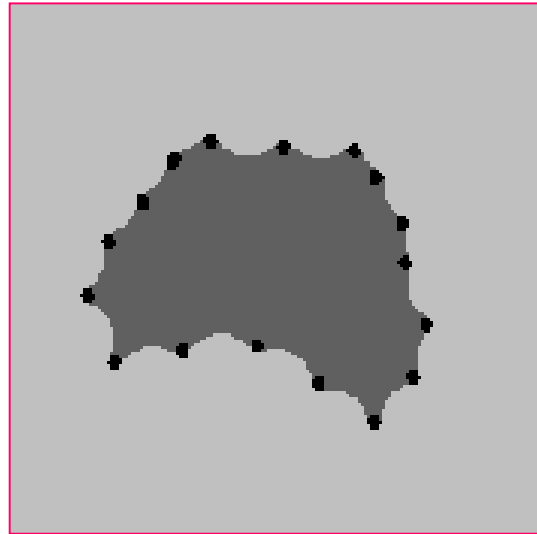


*c)*

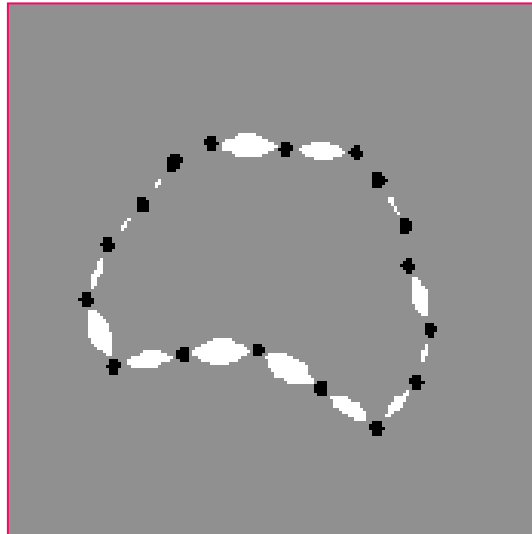
**Exemple binaire** : en blanc, le marqueur A ; en noir, le complément du masque Z; dilatations  $\delta$  par des disques de rayon  $r$  :

- a)* étape de reconstruction pour  $r = 15$  ;
- b)* reconstruction pour  $r = 27$  ;
- c)* reconstruction maximale, correspondant à  $r = 17$  .

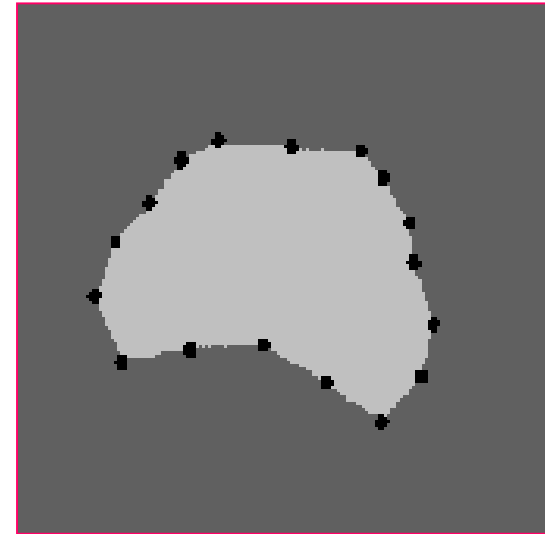
## Exemple géodésique binaire (2)



*a)*



*b)*

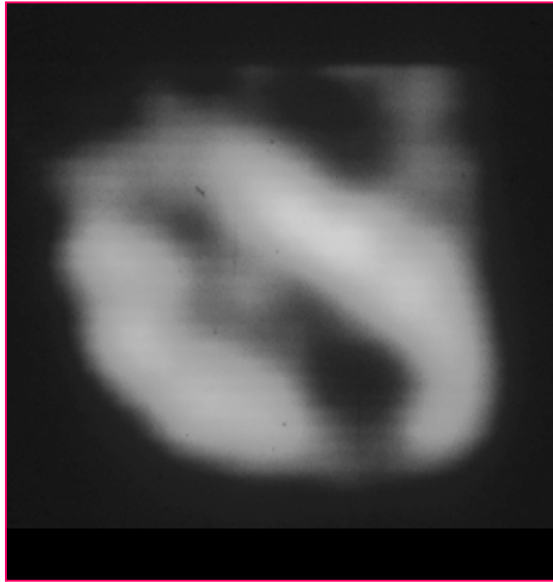


*c)*

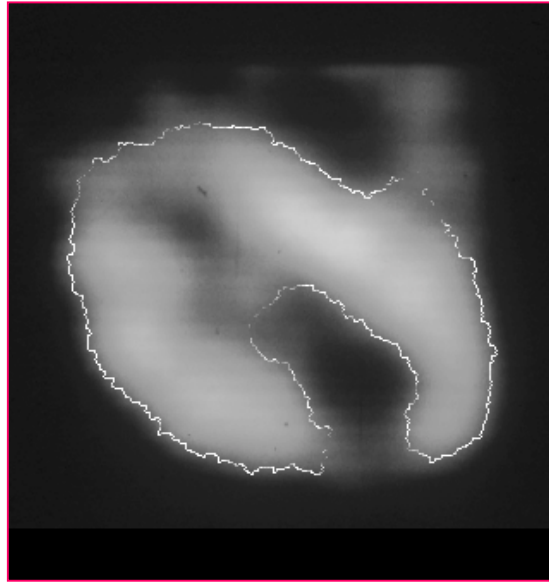
*Exemple binaire (suite) :*

- a)* reconstruction maximale à partir des bords du champs
- b)* partition de  $Z$  en ses deux composantes  $X'$ -connexes pour  $\delta_{\max}$
- c)* élément médian correspondant.

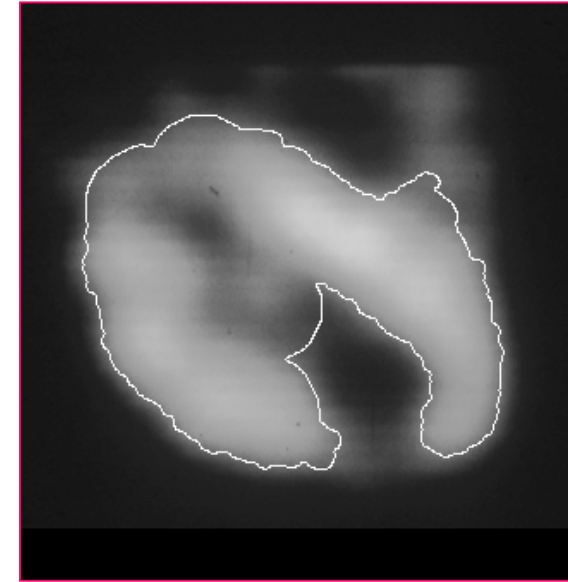
# Exemple géodésique numérique (1)



*a)*



*b)*

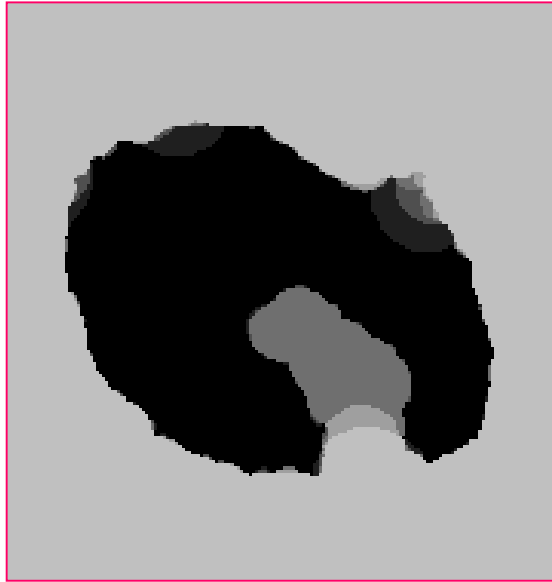


*c)*

## *Exemple numérique :*

- a)* image positrons du muscle cardiaque (copyright CEA-ARMINES) ;
- b)* ligne de partage des eaux numérique du gradient de fig.a
- c)* reconstruction optimale des X'-composantes internes à la zone b.

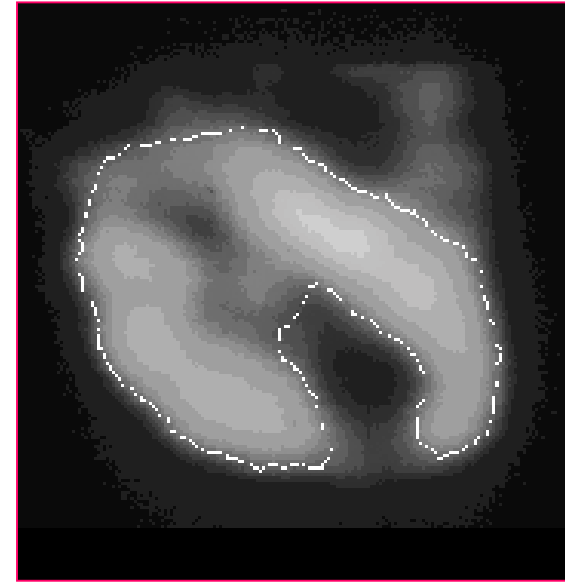
# Exemple géodésique numérique (2)



*a)*



*b)*



*c)*

## *Exemple numérique (2) :*

- a)* surface externe de viscosité maximale ;
- b)* contours externe et interne ;
- c)* élément médian entre les deux contours.