

Caractérisation et modélisation probabiliste de milieux hétérogènes

François Willot

Centre de Morphologie Mathématique, Mines-ParisTech – PSL Research University,
35 rue S^t Honoré, 77300 Fontainebleau, France.

Réf. : “Ingénierie mécanique en contexte incertain – des approches classiques à quelques développements récents”, sous la direction de C. Gogu, 2020, ISTE Editions, Londres, Chap. 2, pp. 51–90. ISBN 978-1-78948-0108.

Résumé

Ce chapitre a pour but de présenter les outils permettant d’une part de caractériser les microstructures hétérogènes et leur morphologie et d’autre part de les modéliser, à l’aide d’ensembles aléatoires. On aborde les ensembles de points aléatoires de Poisson, les modèles booléens, les modèles à sphères dures enfin quelques modèles de partitions aléatoires et de champs Gaussiens, et on présente plusieurs exemples d’application.

1 Introduction

La structure fine des métaux, composites et autres matériaux, examinée sous l’œil d’un microscope, dépend de l’échelle à laquelle on la regarde. Un exemple typique est le béton, qui est constitué aux échelles inférieures de mortier, de granulats, et de ciment (Stroeven, 2000). Dans la plupart des cas, une telle microstructure apparaît comme un arrangement aléatoire, dans l’espace, de « phases », c’est-à-dire de ses différents constituants à l’échelle considérée. Comme l’a noté Matheron (1967), derrière la multiplicité de formes et de tailles, et la variété du réseau des interstices entre agrégats, et des amas de particules, ces arrangements aléatoires présentent également un caractère répétitif (voir la figure 1). La théorie des ensembles aléatoires, dont les développements modernes ont pour origine les travaux de Choquet (1954); Matheron (1965) et Kendall (1974) a pour but de quantifier et de simuler la morphologie de milieux hétérogènes par des méthodes probabilistes. Pour reprendre l’exemple du béton, les formes d’agrégats qu’on y trouve, sans être jamais identiques, présentent pourtant des caractéristiques (granulométrie, notamment) bien précises (Escoda *et al.*, 2015). Il est dès lors naturel d’étudier s’il est possible, au moyen d’un nombre restreint de descripteurs « morphologiques », de rendre compte d’une microstructure donnée, vue comme la réalisation d’un ensemble aléatoire (Molchanov, 2005), dans l’objectif de prédire ses propriétés mécaniques notamment, par homogénéisation (Milton, 2002).

La première question, traitée dans ce chapitre, est l’objet de la géométrie intégrale (ou géométrie stochastique) développée entre autre par Matheron (1975) et Kendall (1974). Deux problèmes principaux se posent. D’une part, la mise au point de critères morphologiques permettant de quantifier la forme des objets et leur répartition dans l’espace. Ces critères font appel à des transformations de l’image qui sont le plus souvent des opérateurs non-linéaires issus de la morphologie mathématique (Matheron & Serra, 1982). Ces méthodes s’appliquent à des ensembles ou fonctions aléatoires qui peuvent être très généraux, par exemple à valeur tensorielle (Angulo, 2012), tel un champ de déformation ou de contrainte. D’autre part se pose la question de la simulation de microstructures



FIGURE 1 – Carotte de béton « Biloba », d’après Escoda (2012) (source : EDF).

aléatoires représentatives de milieux réels, c’est-à-dire la possibilité de caler les modèles sur des critères morphologiques. Les modèles probabilistes de structures, qui s’appuient pour certains sur des outils analytiques exacts, permettent de définir et de simuler des réalisations aléatoires représentatives, de milieux réels. On peut citer, parmi de nombreux exemples, les travaux de Bortolussi *et al.* (2018); Greco *et al.* (1979); Jeulin *et al.* (1995); Redenbach *et al.* (2011).

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : la section (2) porte sur les principaux outils théoriques et numériques permettant de caractériser les microstructures à partir d’image bi ou tridimensionnelle. Les processus de points aléatoires sont introduits en section (3), les modèles booléens en section (4) et les modèles à répulsion en section (5). Les principaux modèles de partition aléatoire sont introduits en section (6) et les structures aléatoires par champs gaussiens sont brièvement abordées en section (7). On conclut le chapitre en section (8).

2 Caractérisation probabiliste des microstructures

2.1 Ensembles aléatoires

Un ensemble aléatoire est un modèle stochastique dont les réalisations sont des parties de \mathbb{R}^d ($d = 2$ ou 3 est la dimension). Pour des raisons qui seront explicitées plus loin, on s’intéresse

aux ensembles fermés inclus dans \mathbb{R}^d . La distribution d'un ensemble aléatoire est complètement spécifiée par une mesure de probabilité définie sur une σ -algèbre, c'est-à-dire un espace contenant \mathbb{R}^d , l'ensemble vide, et qui est stable par un nombre dénombrable d'unions et d'intersections. Cette algèbre est utilisée pour définir des mesures sur des sous-ensembles de \mathbb{R}^d . Ces définitions sont explicitées en détail par [Lantuéjoul \(2002, chapitre 2\)](#).

Un outil théorique fondamental permettant de caractériser les ensembles aléatoires est la capacité de Choquet. Il s'écrit :

$$T(K) = P\{X \cap K \neq \emptyset\}, \quad (1)$$

où K est un compact de \mathbb{R}^d et X une réalisation d'un ensemble aléatoire. Elle satisfait les propriétés suivantes :

- i) $0 \leq T(K) \leq 1$ pour tout compact K , et $T(\emptyset) = 0$, $T(\mathbb{R}^d) = 1$,
- ii) $T(K) \leq T(K \cup K')$ pour tous compacts K et K' ,
- iii) Si K_n est une suite de compact décroissant (au sens de l'inclusion) dans \mathbb{R}^d , avec pour limite \mathcal{K} , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(K_n) = T(\mathcal{K}).$$

La « fonctionnelle de rencontre » (*hitting functional*) T peut être vue comme une généralisation de la fonction de distribution cumulée pour les ensembles aléatoires ([Matheron, 1975](#)). Cette interprétation est justifiée par le théorème suivant ([Choquet, 1954](#); [Kendall, 1974](#); [Matheron, 1975](#)).

Théorème 2.1. *Soit T une fonctionnelle définie sur l'ensemble des compacts \mathbb{K} de \mathbb{R}^d . Alors, il existe une unique mesure de probabilité P définie sur la σ -algèbre \mathbb{F}_K telle que*

$$P(\mathbb{F}_K) = T(K),$$

si, et seulement si, T est une capacité de Choquet vérifiant i), ii) et iii) ci-dessus.

La σ -algèbre \mathbb{F}_K est la plus petite σ -algèbre contenant les ensembles fermés qui rencontrent les compacts de \mathbb{R}^d :

$$\mathbb{F}_K = \{F \in \mathbb{F} : F \cap K \neq \emptyset\}, \quad K \in \mathbb{K}, \quad (2)$$

où \mathbb{F} est l'ensemble des fermés de \mathbb{R}^d et \mathbb{K} l'ensemble des compacts.

Les réalisations de l'ensemble aléatoire sont dans \mathbb{F} , c'est-à-dire des fermés. Cette restriction vient du fait que la fonctionnelle $T(K)$ ne permet pas de distinguer un ensemble de sa fermeture. Notons qu'il existe une théorie duale portant sur les ouverts de \mathbb{R}^d ([Lantuéjoul, 2002](#)). Cependant, on préfère en général travailler sur les fermés car ceux-ci incluent les processus de points ou de lignes aléatoires qui sont très importants pour un grand nombre de modèles.

Lorsqu'elle est restreinte à un ensemble fini de points, la fonctionnelle $T(K)$ définit la *loi spatiale* de l'ensemble aléatoire X . Si K est un ensemble fini de n points :

$$T_n(x_1, \dots, x_n) = P\{x_i \in X, 1 \leq i \leq n\}. \quad (3)$$

La loi spatiale ne permet pas de caractériser X entièrement. Par exemple, si X est lui-même un ensemble fini de points, il est clair que $T_n \equiv 0$ pour tout $n \geq 0$. La loi spatiale permet en revanche de définir un unique ensemble aléatoire qui est un minimiseur de $T(K)$, voir à ce sujet les travaux de [Matheron \(1975\)](#).

Définition 2.1. *On dit qu'un ensemble aléatoire est stationnaire si sa capacité de Choquet $T(K)$ est invariante par translation de K , c'est-à-dire :*

$$T(K) = T(K_x), \quad K_x = \{k + x; k \in K\}. \quad (4)$$

De plus, si les valeurs $T(K)$ prises par la fonctionnelle restent inchangées après un mouvement de corps rigide de K , incluant donc les rotations, on dit que le modèle aléatoire est isotrope.

On suppose dans la suite que X est un ensemble aléatoire stationnaire et ergodique. On trouve dans la littérature plusieurs définitions de l'ergodicité, une des plus générales étant donnée par [Heinrich \(1992\)](#). Celle-ci, un peu technique, n'est pas explicitée ici.

Intuitivement, l'ergodicité implique que la capacité de Choquet $T(K)$ peut être calculée à partir d'une seule réalisation X sur \mathbb{R}^d et plus précisément à partir de la densité moyenne de l'ensemble :

$$\{x \in \mathbb{R}^d : K_x \cap X \neq \emptyset\} \quad (5)$$

Dans un tel cas par exemple, la densité de X (fraction volumique ou surfacique), calculée sur un domaine suffisamment grand n'est plus, asymptotiquement, une variable aléatoire. Cette propriété rejoint une définition plus opératoire de l'ergodicité proposée par d'autres auteurs ([Lantuéjoul, 1991](#)). En pratique, on calcule la capacité de Choquet à partir d'une réalisation X de grande taille à l'aide de :

$$T(K_x) = P\{K_x \cap X \neq \emptyset\} = P\{x \in X \oplus \check{K}\}, \quad (6a)$$

$$X \otimes \check{K} = \{x - k, \quad x \in X, k \in K\}, \quad (6b)$$

les opérateurs \oplus et $\check{\cdot}$ définissant une dilatation morphologique, en l'occurrence ici appliquée à X par un élément structurant K ([Serra, 1980](#)). L'opérateur \oplus est l'addition de Minkowski :

$$K \oplus K' = \{x + x'; \quad x \in K, x' \in K'\}. \quad (7)$$

La théorie des ensembles aléatoires a été étendue par [Matheron \(1969\)](#) au cas de fonctions aléatoires $Z(x)$ ($x \in \mathbb{R}^d$) semi-continue supérieurement ou inférieurement. En effet, si par exemple $Z(x)$ est semi-continue supérieurement, le sur-graphe

$$\{(x, z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : Z(x) \geq z\} \quad (8)$$

est un ensemble aléatoire dans \mathbb{R}^{d+1} ([Lantuéjoul, 2002](#)).

Le cas de fonctions à valeur tensorielle (ou « spectrale ») nécessite des outils de morphologie mathématique plus sophistiqués ([Angulo, 2012](#)). On peut également définir des ensembles aléatoires sur des ensembles topologiques non ordinaires tels des nuages de points, des arbres aléatoires. Ces théories ne sont pas abordées dans ce chapitre.

2.2 Covariance

Dans le cas où K est un bipoint, la fonctionnelle $T(K)$ est la covariance de l'ensemble X .

Définition 2.2. *La covariance de l'ensemble aléatoire X est la fonction définie sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$:*

$$C(x, x + h) = P\{x \in X, x + h \in X\}, \quad x, h \in \mathbb{R}^d. \quad (9)$$

Dans le cas où X est stationnaire on a $C(x, x + h) = C(h)$. On note $\rho(h) = C(h)/C(0)$ la fonction de corrélation.

De plus, il est clair que $C(h)$ ne dépend que de la norme de h dans le cas d'un ensemble aléatoire isotrope. On estime la covariance à partir d'une réalisation d'un ensemble stationnaire ergodique par :

$$C(h) = P\{x \in X \cap X_{-h}\} = V(X \cap X_{-h}), \quad (10)$$

où $V(\cdot)$ désigne la densité moyenne (surface ou fraction volumique) de l'ensemble considérée.

Remarque 2.1. *La covariance permet d'accéder à des informations statistiques sur l'ensemble X , en particulier ([Lantuéjoul, 2002](#); [Matheron, 1975](#)) :*

$$i) C(0) = V(X),$$

$$ii) \lim_{|h| \rightarrow \infty} C(h) = C(0)^2,$$

$$iii) C_{X^c}(h) = 1 - 2C(0) + C(h) \text{ où } C_{X^c} \text{ est la covariance du complémentaire de } X.$$

La quantité en *i*) est la fraction volumique ou surfacique de l'ensemble X , la propriété *ii*) est obtenue si les deux événements $x \in X$ et $x + h \in X$ sont asymptotiquement indépendants, lorsque $h \rightarrow \infty$. Cette propriété est valable pour un ensemble stationnaire ergodique. Elle est fautive si par exemple l'ensemble X est périodique (dans ce cas, la covariance est elle-même une fonction périodique). La propriété *iii*) montre enfin que la covariance d'un ensemble et de son complémentaire se déduit l'une de l'autre.

De plus, la surface ($d = 3$) ou le périmètre ($d = 2$) spécifique $|\partial X|$ de X sont donnés par :

$$|\partial X| = -\frac{1}{\omega_{d-1}} \int_{S_d} d\alpha \left. \frac{\partial C(h)}{\partial h} \right|_{h=0}, \quad (11)$$

la somme étant effectuée sur tous les secteurs angulaires de la sphère unité S_d en dimension d , et ω_{d-1} désignant le volume de la boule unité de dimension $d - 1$. Ainsi en dimensions $d = 2$ et 3 :

$$S_V(X) = -\frac{1}{\pi} \int_{S_3} d\alpha \left. \frac{\partial C(h)}{\partial h} \right|_{h=0}, \quad (12a)$$

$$P_S(X) = -\frac{1}{2} \int_{S_2} d\alpha \left. \frac{\partial C(h)}{\partial h} \right|_{h=0}, \quad (12b)$$

S_V désignant la surface spécifique (densité de surface de la frontière de X) et P_S le périmètre spécifique. Tous deux sont exprimés en unité inverse d'une longueur. On note que dans un modèle isotrope avec $\partial C(h)/\partial h = +\infty$ en $h = 0$, la surface spécifique est alors infinie (cas d'un objet fractal). Plus précisément, on peut relier un comportement à l'origine en loi de puissance $C(h) \sim h^\beta$ lorsque $h \rightarrow 0$ ($0 < \beta < 1$) avec la dimension fractale (dimension de Hausdorff) de la surface $d_s = 3 - \beta$ (Matheron, 1989b).

La fonction covariance permet d'accéder à d'autres types d'informations. Par exemple, les points d'inflexion peuvent traduire la présence de structures imbriquées ou d'amas, les valeurs $C(h) < C(0)^2$ des phénomènes d'anti-corrélation. Ces dernières apparaissent notamment dans des modèles de type inclusion-matrice dans lesquels on interdit l'interpénétration entre particules.

D'autres propriétés concernent la dérivée seconde du variogramme à l'origine. Celle-ci est infinie en valeur absolue lorsque la surface de l'ensemble aléatoire présente un point de rebroussement, avec une probabilité finie dans un domaine borné. Dans le cas de points anguleux, la dérivée seconde est finie. Elle est nulle enfin si la surface est régulière (Emery & Lantuéjoul, 2011).

Remarque 2.2. Les fonctions covariances ne sont pas quelconques. Elles sont en particulier positives définies, c'est-à-dire que :

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^n \lambda_\alpha \lambda_\beta C(x_\alpha - x_\beta) \geq 0, \quad (13)$$

pour n'importe quelle séquence de points x_α et n'importe quelle suite finie de nombres réels λ_α ($\alpha = 1, \dots, n$).

Le théorème de Bochner montre que la propriété ci-dessus est vérifiée si et seulement si la covariance est la transformée de Fourier d'une mesure positive (Bochner, 1959; Christakos, 1984). Dans le cas d'une fonction aléatoire homogène $Z(x)$ dont la fonction d'autocovariance s'écrit :

$$\chi(h) = \langle [Z(x) - \mu][Z(y) - \mu] \rangle, \quad \mu = \langle Z(x) \rangle. \quad (14)$$

On montre alors que (Torquato, 2013) :

$$\tilde{\chi}(k) = \int_{\mathbb{R}^d} dr \chi(r) e^{-ik \cdot r} \geq 0, \quad (15)$$

pour tout k , dès lors que χ est intégrable, i.e.

$$\int_{\mathbb{R}^d} dr |\chi(r)| \leq \infty.$$

Remarque 2.3. *La propriété ci-dessus s'applique aux fonctions aléatoires. Elle ne permet pas néanmoins de caractériser totalement les fonctions qui sont des covariances d'ensembles aléatoires. Un contre-exemple est donné par Torquato (2013).*

2.3 Granulométrie

Les granulométries sont définies à l'aide d'une famille d'opérateurs Φ_λ dépendant d'un paramètre qui est dimensionné comme une longueur. Les propriétés de cet opérateur, croissant, anti-extensif et idempotent, ont été introduits par Matheron (1975). En pratique, on considère un convexe K et une famille d'ensemble λK ($\lambda > 0$) obtenus par homothétie, qui servent de paramètre à l'opérateur Φ . Dans le cas d'une granulométrie par ouverture, l'opérateur Φ_λ s'écrit :

$$\Phi_\lambda(X) = (X \ominus \check{K}) \oplus \lambda K, \quad (16)$$

où \ominus est la soustraction de Minkowski :

$$K \ominus K' = \{x - x'; x \in K, x' \in K'\}, \quad (17)$$

de sorte que Φ_λ est une ouverture par l'élément structurant K . De même on peut définir une fermeture $\Phi_\lambda(X) = (X \oplus \check{K}) \ominus K\lambda$.

Les érosions ou dilatations par λK définissent également des granulométries. En pratique cependant elles sont moins sensibles à la microstructures que les ouvertures et fermetures (Escoda *et al.*, 2015) et sont par conséquent moins souvent utilisées.

2.4 Fonctionnelles de Minkowski

On s'intéresse à l'ensemble \mathcal{C}^d des compacts convexes de \mathbb{R}^d et aux fonctionnelles $\Phi(K)$ définies dans \mathcal{C}^d , à valeurs réelles. On définit les propriétés suivantes :

Définition 2.3. *La fonctionnelle ϕ définie sur \mathcal{C}^d est*

- invariante par isométrie si pour toute isométrie \mathcal{G} (translation, rotation, réflexion etc.) et convexe compact K , $\Phi(\mathcal{G}K) = \Phi(K)$,
- monotone pour l'inclusion si $K_1 \subseteq K_2 \implies \Phi(K_1) \leq \Phi(K_2)$,
- \mathcal{C}^d -additive si pour toute paire de convexes K_1, K_2 tel que $K_1 \cup K_2 \in \mathcal{C}^d$, $\phi(K_1 \cup K_2) = \phi(K_1) + \phi(K_2) - \phi(K_1 \cap K_2)$.

Le théorème suivant est dû à Minkowski.

Théorème 2.2. *Les fonctionnelles invariantes par isométrie, monotones et \mathcal{C}^d -additives sont des combinaisons linéaires positives de $d + 1$ fonctions W_i dites de Minkowski homogènes de degrés $d - i$, c'est-à-dire vérifiant :*

$$\lambda > 0 \implies W_i(\lambda K) = \lambda^{d-i} W_i(K).$$

Par convention, les fonctionnelles de Minkowski prennent toutes la même valeur en la boule unité en dimension d .

Remarque 2.4. *Intéressons-nous aux cas $d = 2$ ou $d = 3$. On a :*

- $W_0(K) = |K|$ est le volume ($d = 3$) ou la surface ($d = 2$) de K ;
- $W_1(K) = |\partial K|/d$, où $|\partial K|$ est la longueur ($d = 2$) ou la surface ($d = 3$) de la frontière de K ;
- $W_{d-1}(K) = \omega_d \gamma(K)/2$ où $\gamma(K)$ désigne l'extension moyenne de K . Si $\gamma(K, v)$ est l'extension de K dans la direction v (la longueur de la projection de K sur une droite de direction v), alors :

$$\gamma(K) = \frac{\int_{v \in S_d} dv \gamma(K, v)}{\int_{v \in S_d} dv}.$$

- $W_d(K) = \omega_d$ si $K \neq \emptyset$, et 0 sinon.

Ainsi dans le cas $d = 2$,

$$b(K) = \frac{1}{\pi} |\partial K|.$$

Lorsque $d = 3$, W_2 est proportionnel à l'intégrale de la courbure moyenne :

$$M(K) = \int_{\partial K} dS m(x), \quad m(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (18)$$

où $R_1(x)$, $R_2(x)$ sont les rayons de courbures en x sur la surface du convexe.

La formule de Steiner permet de relier le volume de la dilatation d'un ensemble convexe K par une boule $B(0, r)$ de rayon r , connaissant les fonctionnelles de Minkowski de K .

Théorème 2.3. *Soit $K \in \mathcal{C}^d$ et $r > 0$. Le volume du dilaté de K par la boule de rayon r est :*

$$|K \oplus B(0, r)| = \sum_{j=0}^d \binom{d}{j} W_j(K) r^j, \quad (19)$$

où $\binom{d}{j}$ désigne le coefficient binomial en d , j .

2.5 Stéréologie

Un espace affine A_i de dimension $i < d$ coupe le convexe K en un convexe $A_i \cap K$. On note \mathcal{A}_i un espace affine de dimension i pris uniformément parmi tous ceux qui coupent K . La formule de Crofton (Hadwiger, 1957) donne la moyenne des fonctionnelles de Minkowski de $A_i \cap K$ (où $A_i \in \mathcal{A}_i$) en fonction de celles de K .

Théorème 2.4. *Les fonctionnelles de Minkowski $W_j^{(i)}$ de l'intersection de $K \in \mathcal{C}^d$ par un espace affine de dimension $i < d$ s'écrivent :*

$$E \left\{ W_j^{(i)}(K \cap A_i) \right\}_{A_i \in \mathcal{A}_i} = \frac{\omega_i \omega_{d-j}}{\omega_{d-i} \omega_{i-j}} \frac{W_j(K)}{W_i(K)}, \quad 0 \leq j < i. \quad (20)$$

Moyennant une hypothèse d'isotropie et de stationnarité, ces propriétés permettent de calculer le volume d'objets en 3D à partir d'une coupe bidimensionnelle supposée représentative, ou encore la surface de ces objets à partir d'une estimation du périmètre sur une coupe (Schneider & Weil, 2008).

2.6 Érosion linéaire

Au lieu de calculer la capacité de Choquet pour un compact réduit à un bi-point (ou n points), on choisit maintenant de l'appliquer à un segment L de longueur h et d'orientation α . Celle-ci s'obtient par l'érosion linéaire :

$$X \ominus \check{L} = \bigcap_{u \in L} \{X - u\}. \quad (21)$$

Pour un ensemble stationnaire, on définit le moment par érosion linéaire $P(h)$ de X par la mesure de Lebesgues de $X \ominus \check{L}$:

$$P(h) = |X \ominus \check{L}| = P\{L \subset X\}. \quad (22)$$

Les propriétés suivantes sont aisément vérifiées :

- $P(0) = C(0)$ est la fraction volumique (ou surfacique) de l'ensemble X ;
- le moment par érosion linéaire et la covariance ont la même pente à l'origine, i.e. $P'(0) = C'(0)$;
- pour un angle fixé α , $C(h) \geq P(h)$;
- à angle fixé α , $P(h)$ est une fonction décroissante de h ;
- $P(\infty) = 0$.

De plus, on peut caractériser la granulométrie par ouverture d'un segment L par :

$$P\{x \in X \circ L\} = P(h) - hP'(h), \quad X \circ L = (X \ominus L) \oplus L, \quad (23)$$

où $P'(h)$ est la dérivée de $P(h)$.

2.7 Volume élémentaire représentatif

On considère une mesure de la fraction volumique d'un ensemble aléatoire ergodique X , estimée à partir d'une réalisation dans un domaine borné :

$$f_V = \frac{1}{|V|} \int_V 1_X(x) dx. \quad (24)$$

Définition 2.4. *La portée intégrale de l'ensemble aléatoire X ergodique est la quantité, dimensionnée comme un volume :*

$$A_d = \int_{\mathbb{R}^d} dh \frac{C(h) - C(0)^2}{C(0) - C(0)^2}. \quad (25)$$

On montre que si X est de portée intégrale A_d finie, la variance des estimations f_V de f varie asymptotiquement comme (Matheron, 1989a) :

$$\mathbb{E}\{(f_V - f)^2\} = \frac{\sigma^2 A_d}{|V|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|V|}\right), \quad |V| \rightarrow \infty, \quad (26)$$

où les volumes V sont des compacts croissants qui recouvrent asymptotiquement \mathbb{R}^d . De plus, l'équation ci-dessus fournit une bonne estimation de la variance dès lors que $|V| \gg A_d$. Cette relation montre que le volume V se comporte comme $n = |V|/A_d$ domaines indépendants de volume la portée intégrale. Dans le cas où $A_d = +\infty$, c'est-à-dire lorsque la quantité $C(h) - f^2$ n'est pas intégrable en l'infini, la relation asymptotique (26) n'est plus valable. C'est le cas notamment de modèles contenant des variétés poissoniennes de taille infinie, dans lesquelles des corrélations existent à des échelles aussi grandes que l'on veut (Jeulin, 2016; Lantuéjoul, 1991). Des résultats exacts pour le comportement asymptotique de la variance de f_V de certains milieux booléens de cylindres sont donnés par Willot (2017). Dans le cas de milieux fibreux booléens en trois dimensions contenant des particules allongées de grande taille, par exemple, deux régimes apparaissent. La variance des

estimations f_V se comporte comme $\sim 1/|V|^{2/3}$ dans un domaine $h \ll \ell$ et comme $\sim 1/|V|$ lorsque $h \gg \ell$, le changement de régime se produisant en $h \approx \ell$ la longueur des fibres.

On peut également associer aux champs mécaniques (par exemple le tenseur de déformation) une portée intégrale, en étudiant le comportement asymptotique de la moyenne du champ sur des sous-volume, cette moyenne traduisant les propriétés apparentes (par exemple le module élastique apparent) associée à un volume de taille finie (Altendorf *et al.*, 2014). Azzimonti *et al.* (2013), par exemple, calcule numériquement des exposants distincts pour la microstructure et le champ de déplacement (en optique) d'un modèle à dépôt.

3 Processus de points

Un processus de points aléatoires est défini comme un ensemble aléatoire de points dont chaque réalisation est un fermé qui contient un nombre fini ou dénombrable de points. En général, on suppose que chaque réalisation est localement finie, c'est-à-dire que le nombre de points contenus dans un compact est fini presque sûrement.

Les processus de points aléatoires sont une classe très riche de modèles stochastiques qui permettent en particulier de définir des modèles d'ensembles aléatoires continus. Par exemple, une droite dans le plan peut-être représentée par un angle, mesuré par rapport à un axe fixe, et un réel positif, sa distance à un point fixe. À un processus de point aléatoire dans une bande semi-infinie $[0; 2\pi] \times \mathbb{R}_+$ correspond par conséquent un processus aléatoire de droites. Dans le cas d'un processus de points de Poisson (que l'on définira plus bas), on obtient un modèle de droites poissoniennes (voir la figure 2f). De même, un processus de points aléatoires peut-être utilisé comme germes de schémas booléens (voir la figure 2a,b) ou d'un modèle de feuilles mortes (voir la figure 2c) ou encore de partitions aléatoires (voir la figure 2d,e).

Dans la suite de cette section, on s'intéresse exclusivement aux processus de points de Poisson. On pourra voir Van Lieshout (2000) et Daley & Vere-Jones (1988) pour une description d'autres processus de points aléatoires.

3.1 Processus de points de Poisson homogène

Soit X une réalisation d'un modèle de points aléatoires et $T(K)$ sa capacité de Choquet. Par la suite, on s'intéresse à la loi spatiale :

$$P_K(n) = P\{N(K) = n\}, \quad n \geq 0,$$

définie pour tout compact K et entier n , avec $N(K)$ la « fonction de comptage », c'est-à-dire la fonction qui assigne à K le nombre de points de X contenus dans K . La capacité de Choquet s'écrit par ailleurs $T(K) = 1 - P_K(0)$.

Il est naturel de supposer que dans un compact δK de volume infinitésimal, la probabilité qu'un point soit inclus dans δK est de l'ordre du volume de δK :

$$\lim_{|\delta K| \rightarrow 0} T(\delta K) \propto |\delta K|. \quad (27)$$

Par la suite on suppose que :

$$\lim_{|\delta K| \rightarrow 0} T(\delta K) = \theta |\delta K|, \quad (28)$$

pour toute suite de compacts δK de volume tendant vers 0 contenant un point x , où θ (dimensionné comme l'inverse d'un d -volume) est une constante. Le paramètre θ est l'*intensité* du processus de point de Poisson et désigne une densité de points (nombre de points par unité de d -volume).

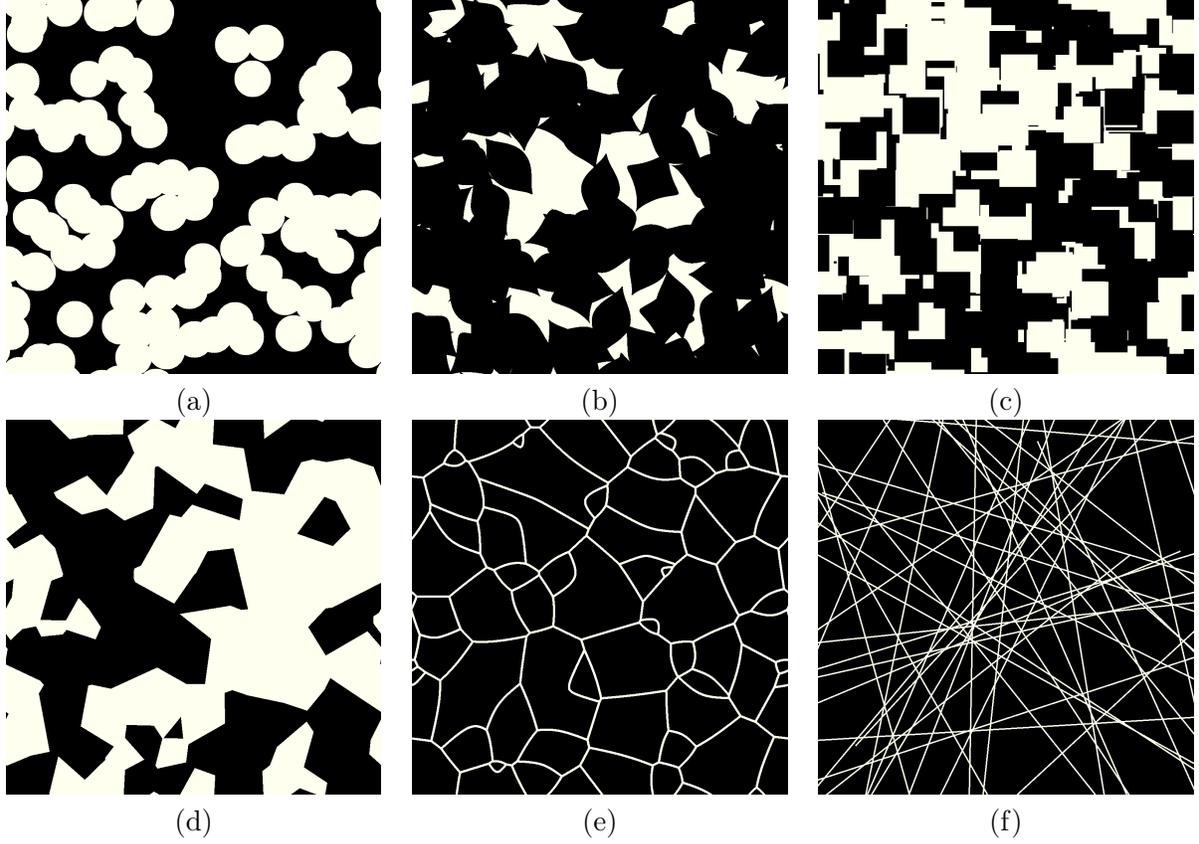


FIGURE 2 – Exemples de modèles stochastiques issus de processus de points aléatoires. (a) et (b) Modèles booléens. (c) Modèle de feuilles mortes. (d) Labellisation d’une partition aléatoire de Poisson-Voronoi. (e) Partition aléatoire de Johnson-Mehl. (f) Processus de lignes de Poisson.

Définition 3.1. *Un processus de point de Poisson homogène d’intensité $0 < \theta < \infty$ est un processus de points vérifiant (28) et tel que les événements $K \cap X \neq \emptyset$ et $K' \cap X \neq \emptyset$ pour K et K' inclus dans \mathbb{R}^d sont indépendants dès lors que K et K' sont disjoints.*

Calculons la loi spatiale d’un processus de points de Poisson homogène d’intensité θ . On considère un compact K que l’on partitionne en N sous-domaines de volume infinitésimal $|\delta K| = |K|/N$:

$$P_K(n) = (\theta|\delta K|)^n (1 - \theta|\delta K|)^{N-n} \frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{\theta^n |K|^n e^{-\theta|K|}}{n!}, \quad (29)$$

après utilisation de la formule de Stirling : $z! = z^z e^{-z} \sqrt{2\pi z}$. D’après (29), la loi spatiale du processus de points est donc, à K fixé, une distribution de Poisson de moyenne $\theta|K|$, d’où le nom de *processus de points de Poisson*. De plus, il est clair que :

$$T(K) = 1 - e^{-\theta|K|}. \quad (30)$$

On peut calculer à l’aide de (29) la probabilité d’événements simultanés portant sur N tels que :

$$\begin{aligned} & P\{N(K) = n, N(K') = n'\} \\ &= \sum_{i=0}^{n'} P\{N(K \cap K') = i\} P\{N(K \setminus K') = n - i\} P\{N(K' \setminus K) = n' - i\}, \end{aligned}$$

pour toute paire de compacts K, K' avec $n' \leq n$. Une formule générale similaire permet de calculer la probabilité de l'événement $(N(K_1) = n_1) \cap \dots \cap (N(K_N) = n_N)$ pour $K_i \in \mathbb{K}$, $n_i \geq 0$, $N \geq 1$.

Remarque 3.1. *La plupart des auteurs définissent un processus de points de Poisson comme un processus de loi spatiale (29) et tel que $N(K)$ et $N(K')$ sont des variables aléatoires indépendantes pour K et K' disjoints (voir par exemple Lantuéjoul (2002)).*

Théorème 3.1. *Supposons que $N(K) = n$ dans un certain domaine K . De par la propriété (28), les n points sont distribués uniformément dans K et on peut montrer que :*

$$P\{N(K') = n' | N(K) = n\} = \binom{n}{n'} \left(\frac{|K'|}{|K|} \right)^{n'} \left(1 - \frac{|K'|}{|K|} \right)^{n-n'}, \quad (31)$$

pour $K' \subset K$, $n' \leq n$. Ainsi, pour simuler un processus de Poisson dans un domaine de volume fini K , il suffit de tirer aléatoirement un entier n selon la loi de probabilité (29), puis d'implanter les n points uniformément dans K .

3.2 Processus de points de Poisson inhomogène

Dans un processus de points de Poisson inhomogène, la densité θ est maintenant une fonction de x :

$$\lim_{|\delta K(x)| \rightarrow 0} T(\delta K(x)) = \theta(x) |\delta K(x)|, \quad (32)$$

où les $\delta K(x)$ sont une suite de compacts de volume tendant vers 0 et contenant tous le point x . On définit de plus :

$$\theta(K) = \int_K dx \theta(x). \quad (33)$$

Comme pour un processus de points de Poisson homogène, les variables aléatoires $N(K)$ et $N(K')$ sont indépendantes si les compacts K et K' sont disjoints.

L'équation (29) reste alors valable, à condition de remplacer $\theta|K|$ par $\theta(K)$:

$$P_K(n) = \frac{\theta^n(K) e^{-\theta(K)}}{n!}, \quad (34)$$

qui est encore une loi de Poisson. On a de même :

$$T(K) = 1 - e^{-\theta(K)}. \quad (35)$$

Remarque 3.2. *On obtient dans le cas où l'intensité $\theta(x)$ est une fonction aléatoire, localement intégrable, un processus de Cox (Lantuéjoul, 2002). Ce processus de points aléatoires n'est pas un processus de point de Poisson car $N(K)$ n'est pas en général une variable aléatoire de Poisson (voir Lantuéjoul (2002), pour des exemples de distributions non poissonniennes). Un exemple important de processus de Cox est obtenu lorsque $\theta(x)$ est l'indicatrice d'un ensemble aléatoire, ce qui permet de construire des ensembles multi-échelles (Jeulin & Ostoja-Starzewski, 2001; Willot & Jeulin, 2011).*

4 Modèles booléens

4.1 Définition et capacité de Choquet

Le modèle booléen repose sur deux ingrédients fondamentaux :

- un processus de point aléatoire de Poisson d'intensité $\theta(x)$ (voir section 3) ;

– une famille $A(x)$ ($x \in \mathbb{R}^d$) de compacts non-vides aléatoires inclus dans \mathbb{R}^d , qui interviennent dans la définition suivante.

Définition 4.1. *Le modèle booléen d'intensité θ associé à la famille $(A(x))$ est l'union de tous les compacts $A(x)$ implantés sur les germes d'une réalisation de points de Poisson \mathcal{P} d'intensité θ :*

$$X = \bigcup_{x \in \mathcal{P}} A(x). \quad (36)$$

Théorème 4.1. *Soit maintenant K un compact de \mathbb{R}^d et X un modèle booléen de grain primaire A et d'intensité θ . Le nombre $N(K)$ de grains primaires intersectés par K suit une loi de Poisson de paramètre $\mathbb{E}\{\theta(\check{A} \oplus K)\}$:*

$$P\{N(K) = n\} = \frac{\mathbb{E}\{\theta(\check{A} \oplus K)\}^n}{n!} e^{-\mathbb{E}\{\theta(\check{A} \oplus K)\}}. \quad (37)$$

Cette propriété conduit au théorème :

Théorème 4.2. *Dans le cas où le nombre moyen de grains primaires que rencontre K est fini ($\mathbb{E}\{\theta(\check{A} \oplus K)\} < \infty$), la capacité de Choquet du modèle booléen X s'écrit :*

$$T(K) = 1 - e^{-\mathbb{E}\{\theta(\check{A} \oplus K)\}}, \quad (38)$$

pour tout compact K inclu dans \mathbb{R}^d , où on a posé :

$$\theta(B) = \int_B dx \theta(x). \quad (39)$$

Dans le cas d'un modèle stationnaire :

$$T(K) = 1 - e^{-|\theta(\check{A} \oplus K)|}. \quad (40)$$

Enfin dans le cas d'un modèle stationnaire d'intensité homogène :

$$T(K) = 1 - e^{-\theta|\check{A} \oplus K|}, \quad (41)$$

où $|\check{A} \oplus K|$ est la moyenne de la mesure de Lebesgue du grain primaire A dilaté par le compact K .

Le théorème ci-dessus donne en particulier une expression de la probabilité $P\{x \in X\}$.

Théorème 4.3. *La fraction volumique du modèle booléen stationnaire X de grain primaire A et d'intensité homogène θ s'écrit :*

$$T(\{x\}) = P\{x \in X\} = 1 - e^{-\theta|A|}. \quad (42)$$

La formule ci-dessus peut se démontrer par des moyens élémentaires. Soit f la fraction volumique de l'ensemble aléatoire X , un modèle booléen de grain primaire A et d'intensité θ . Supposons que X est ergodique et notons $\theta = N/V$ où N est le nombre de grains inclus dans un domaine V de grande taille. Après l'ajout de dN grains, la fraction volumique f est changée en $f + df$ et l'intensité en $\theta + d\theta$ avec $d\theta = dN/V$. Or on a en moyenne :

$$df = \frac{dN|A|}{V}(1 - f).$$

En effet, il est clair que $df = dN|A|/V$ si $f = 0$ et d'autre part, si $f > 0$, il faut pondérer cette valeur par le volume intersecté par X^c uniquement, d'où découle le terme $1 - f$. On a $df/(1 - f) = |A|d\theta$ d'où par intégration $1 - f = cste + e^{-|A|\theta}$, la constante valant 0. \square

Remarque 4.1. Le théorème (42) est également connu en cristallisation sous le nom d'équation d'Avrami (Avrami, 1939).

On peut démontrer (41) à partir de (42). En effet, on a $1 - T(K) = P\{K \subset X^c\}$. Soit K_x un compact centré en $x \in \mathbb{R}^d$. Alors, on a :

$$K_x \subset X^c \iff x \in (X^c \ominus \check{K}) \iff x \in (X \oplus \check{K})^c = \bigcup_{y \in \mathcal{P}} [A(y) \oplus \check{K}]^c.$$

Ainsi K_x est inclus dans le complémentaire de X si et seulement si x appartient au complémentaire du booléen de germes \mathcal{P} et de grain primaire $A \oplus \check{K}$. On obtient donc exactement la formule (41). \square

Notons $f = P\{x \in X\}$ la fraction volumique de X . On peut récrire (41) sous la forme :

$$T(K) = 1 - (1 - f)^{|\check{A} \oplus K|/|\check{A}|}. \quad (43)$$

4.2 Propriétés

Les ensembles aléatoires booléens vérifient les propriétés fondamentales suivantes.

- Matheron (1975) a montré que les modèles booléens sont « infiniment divisibles ». Un ensemble aléatoire X est infiniment divisible si, pour tout entier $n > 0$, X est l'union $\cup_i Y_i$ de n ensembles aléatoires indépendants Y_i . Cette propriété implique que l'union de deux réalisations d'un modèle booléen est encore booléen (Serra, 1981).
- Une section (intersection avec un espace de dimension inférieure à d) d'un ensemble booléen est encore booléen (Serra, 1983). On note qu'on ne peut de manière générale inférer toutes les caractéristiques du modèle dans l'espace \mathbb{R}^d à partir de celles obtenues dans une section. Un contre-exemple est donné par un ensemble aléatoire booléen dont certains grains primaires sont réduits à des points. On peut néanmoins retrouver toutes les informations fournies par la fonctionnelle $T(K)$ lorsque K est lui-même inclu dans l'espace de dimension inférieure. Ceci inclut la fraction volumique. Pour un modèle isotrope 3D, on retrouve la covariance à partir d'une section selon une droite du modèle, et on a donc accès, par exemple, à la surface spécifique.
- Les modèles booléens sont stables par dilatation. Cette propriété découle de la formule de la capacité de Choquet, le dilaté d'un modèle booléen de grain primaire A par un compact K étant un modèle booléen de grain primaire $A \oplus \check{K}$ (Serra, 1981).
- On s'intéresse au « domaine d'attraction » du modèle booléen. Certaines limites d'unions de partitions aléatoires sont des modèles booléens (Chiles & Delfiner, 2009; Serra, 1981, 1983), au sens suivant. Soit X une partition aléatoire de \mathbb{R}^d et soient $\{X'_i\}$ ($i \in \mathcal{I}$) une famille d'ensembles aléatoires obtenus en choisissant chaque cellule de X indépendamment avec une probabilité p , et en prenant la fermeture de l'union des cellules choisies. On pose :

$$Y_n = \bigcup_{i \leq n} X'_i. \quad (44)$$

On laisse $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$ tels que $pn = \theta$ avec $0 < \theta < \infty$ fixé. On montre alors que, pour tout compact K :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(K) = 1 - e^{-\theta |X'|^{-1} \mathbb{E}\{|X' \oplus K\|}\}, \quad (45)$$

où X' est la classe des cellules de la partition aléatoire X et T_n la capacité de Choquet associé à Y_n . D'après le théorème de Choquet-Matheron-Kendall, la limite Y_∞ des $(Y_n)_n$ existe et est unique et de plus, Y_∞ est booléen.

Remarque 4.2. La propriété ci-dessus montre que des modèles booléens sont obtenus comme limite d'unions de partitions aléatoires non-booléennes. Cette propriété peut être vue comme un théorème central limite pour les ensembles aléatoires (Cressie & Laslett, 1987; Serra, 1981), l'union (44) d'ensembles aléatoires jouant le rôle de la somme pour les variables aléatoires. Cette propriété suggère en outre que le modèle booléen joue un rôle analogue, pour les ensembles aléatoires, à la gaussienne pour les variables aléatoires.

4.3 Covariance

On calcule la covariance $C(h)$ de X à l'aide de la capacité de Choquet. Elle s'écrit :

$$C(h) = 2f - 1 + (1 - f)^2 e^{\theta|A \cap A_h|} = 2f - 1 + (1 - f)^{2 - \gamma(h)/\gamma(0)}, \quad (46)$$

où $\gamma(h) = |A \cap A_h|$ est la covariogramme géométrique de A .

On connaît des formules analytiques simples pour le covariogramme géométrique pour certaines formes de grain primaire uniquement. Pour un disque de rayon R :

$$\gamma(h) = 2R^2 \left[\cos^{-1} \left(\frac{h}{2R} \right) - \frac{h}{2R} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{2R} \right)^2} \right] H(2R - h), \quad (47)$$

où $H(\cdot) = 1_{\mathbb{R}_+}(\cdot)$ est la fonction de Heaviside. Pour une sphère de rayon R :

$$\gamma(h) = \frac{4\pi R^3}{3} \left(1 - \frac{3h}{4R} + \frac{h^3}{16R^3} \right) H(2R - h). \quad (48)$$

Bien que sa définition soit très simple, on ne connaît le covariogramme géométrique que pour quelques formes élémentaires dont les cylindres de révolution (Gille, 1987; Willot, 2017), les ellipsoïdes, les demi-sphères et quelques autres formes (Gille, 2016). On le connaît également dans le cas de formes aléatoires issues de certaines partitions telles les polyèdres de Poisson (Matheron, 1972), les cellules d'une partition de Voronoi (Brumberger & Goodisman, 1983), ou du grain typique d'un modèle de feuilles mortes (Gille, 2002).

4.4 Autres caractéristiques

4.4.1 Fonction à trois points

Soit $K = \{x, x + h_1, x + h_2\}$, d'après (41) on a :

$$\begin{aligned} C(h_1, h_2) &= P\{x \in X^c, x + h_1 \in X^c, x + h_2 \in X^c\} = e^{-\theta|A \cup A_{-h_1} \cup A_{-h_2}|} \\ &= (1 - f)^{3 - r(h_1) - r(h_2) + s(h_1, h_2)}, \end{aligned} \quad (49)$$

avec :

$$r(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}, \quad s(h_1, h_2) = \frac{|A \cup A_{-h_1} \cup A_{-h_2}|}{\gamma(0)}. \quad (50)$$

Là encore, la difficulté principale réside dans l'évaluation de la fonctionnelle s pour des formes de grains primaires non triviales.

4.4.2 Loi de contact

Supposons qu'un point x se situe dans le complémentaire de X et soit ℓ sa distance à X . La fonction de distribution de ℓ est donné par (Serra, 1980) :

$$P\{\ell \leq L\} = 1 - \frac{1 - T(B_L)}{1 - f}, \quad (51)$$

où B_L est la boule de rayon L .

4.4.3 Surface spécifique

La surface spécifique d'un modèle booléen X tridimensionnel est obtenue à l'aide de (12a) :

$$S_V(X) = 4 \frac{\gamma'(0)}{\gamma(0)} (1-f) \log(1-f), \quad (52)$$

où $\gamma(h)$ est le variogramme géométrique du grain primaire du modèle X . On remarque que $S_V/f \sim cste$ lorsque $f \rightarrow 0$, ce qui est attendu pour des grains quasi-isolés les uns des autres, sans interpénétration. En revanche, $S_V/(1-f) \sim \log(1-f) \rightarrow \infty$ dans le cas dual $f \rightarrow 1^-$. En effet, lorsque $f \rightarrow 1$, le modèle booléen est constitué d'un ensemble d'objets très allongés qui sont les interstices (non recouvertes) entre grains primaires, ces interstices ayant un rapport surface/volume qui devient infini.

4.4.4 Courbes d'érosion linéaire pour des grains primaires convexes

Supposons que A est un compact aléatoire convexe. La formule de Steiner (19) permet de calculer explicitement $T(K)$. La mesure de $A \oplus \lambda K$ est en particulier un polynôme de degrés d en λ , dont les coefficients dépendent des fonctionnelles de Minkowski de A . Si par exemple $K = [x; x+h]$ est un segment de longueur h et d'orientation α , $|A \oplus K| = |A| + h|A_\alpha|$ où A_α représente la longueur de la frontière de A dans la direction de dilatation α . La probabilité P_X^c qu'un segment L de longueur h soit inclus dans le complémentaire du modèle Booléen est alors (voir l'équation 22) :

$$\begin{aligned} P_X^c(h) &= P\{L \subset X^c\} = e^{-\theta|A \oplus K|} = e^{-\theta(|A| + h|A_\alpha|)}, \\ &= e^{-\theta[\gamma(0) - h\gamma'(0)]} = (1-f)^{1-h\gamma'(0)/\gamma(0)}. \end{aligned} \quad (53)$$

Cette relation est particulièrement utile car elle permet de tester la validité de l'hypothèse booléenne : *la courbe d'érosion linéaire du complémentaire d'un modèle booléen de grain primaire convexe varie exponentiellement avec la longueur h* . Voir par exemple Escoda *et al.* (2015) pour un exemple d'application de modèle Booléen à des grains polyédriques, issus de partitions aléatoires.

Remarque 4.3. *En prenant pour ensemble de germes un processus de Cox, lui-même reposant sur un modèle booléen, on peut générer des structures multi-échelles, voir par exemple Jean *et al.* (2011) ou encore Wang *et al.* (2015).*

Une borne supérieure de la longueur du chemin minimal traversant un milieu booléen d'intensité uniforme ayant pour grain primaire des disques ou carrés ($d = 2$) ou des hypersphères ($d \geq 3$) a été calculé par Willot (2015) dans le cas d'une fraction volumique diluée ($f \ll 1$). Cette borne fait apparaître des exposants non triviaux ($\sim f^{2/3}$ pour $d = 2$, $\sim f^{1/2}$ pour $d = 3$), et un préfacteur qui dépend du diamètre dans la direction de propagation du grain primaire.

Doi (1976) a calculé les fonctions de corrélation de surface d'un modèle booléen tridimensionnelle de sphères. Pour un ensemble aléatoire X , ces fonctions de corrélation sont définies par les quantités :

$$F_{sv}(x_1, x_2) = \langle \chi(x_1) s(x_2) \rangle, \quad (54a)$$

$$F_{ss}(x_1, x_2) = \langle s(x_1) s(x_2) \rangle, \quad (54b)$$

avec $\chi(\cdot)$ l'indicatrice de X , $1 - \chi(\cdot)$ celle de X^c et :

$$s(x) = |\nabla \chi(x)|, \quad (55)$$

où ∇ est le vecteur nabla de composantes $\partial/\partial x_i$ ($i = 1, \dots, d$), x_i étant la i -ème composante de x dans un repère cartésien. Pour un ensemble aléatoire stationnaire, les fonctions de corrélation F_{ss} et

F_{sv} ne dépendent que de $x_1 - x_2$, et seulement de $h = |x_1 - x_2|$ pour un modèle isotrope. On a de plus, lorsque $h \rightarrow \infty$ (Torquato, 2013) :

$$F_{sv}(h) \sim fs, \quad F_{ss}(h) \sim s^2, \quad r \rightarrow \infty, \quad (56)$$

où s est la surface spécifique de ∂X .

Torquato (2013) donne pour le modèle booléen de sphères, en dimension 3 :

$$F_{sv}(r) = \frac{-3 \log(1-f)}{R} \left[2 - \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} \right] \left[1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{h}{4R} \right) H(2R-h) \right] \quad (57a)$$

$$F_{ss}(r) = \left[2 - \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} \right] \left\{ \frac{9 \log^2(1-f)}{R^2} \left[1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{h}{4R} \right) H(2R-h) \right]^2 - \frac{3 \log(1-f)}{2hR} H(2R-h) \right\}. \quad (57b)$$

Les fonctions F_{sv} et F_{ss} interviennent notamment dans les expressions de certaines bornes de la perméabilité de milieux poreux (Berryman & Milton, 1985; Bignonnet, 2018; Doi, 1976; Willot *et al.*, 2016).

5 Modèles RSA

Le modèle RSA, pour “random sequential adsorption” (Talbot *et al.*, 2000) est un modèle dans lequel, au contraire du modèle booléen, des grains sont ajoutés séquentiellement en interdisant l’interpénétration. Dans le cas le plus simple, l’intensité est prise uniforme dans \mathbb{R}^d . Lorsqu’un grain recouvre en partie un grain préalablement placé, il est rejeté (voir Månsson & Rudemo (2002) pour d’autres modèles de grains disjoints). On connaît peu de résultats exacts pour le modèle RSA, mis à part dans le cas unidimensionnel (Torquato, 1995).

Pour une fraction volumique faible de l’ensemble aléatoire, le modèle RSA est asymptotiquement égal à un milieu booléen et les positions des grains sont ceux d’un processus de points de Poisson (Månsson & Rudemo, 2002). Le modèle RSA ne permet pas de générer des réalisations à forte densité. Dans ce cas, il est nécessaire de mettre en œuvre des techniques particulières, où des objets sont placés et des forces de rappel sont imposés entre objets qui s’interpénètrent. Cette approche a notamment été proposée pour la modélisation de milieux fibreux (Altendorf & Jeulin, 2011). Les images de la figure (3a) montrent des coupes bidimensionnelles, selon deux directions orthogonales, d’un matériau composite et la figure 3b un modèle aléatoire de fibres reproduisant les caractéristiques de la microstructure, notamment le rayon de courbure des fibres et leur tortuosité.

6 Partitions aléatoires

Une partition aléatoire est par définition un ensemble d’ouverts bornés (cellules) de \mathbb{R}^d disjointes deux à deux et dont la fermeture de l’union recouvre tout l’espace. Matheron (1969) a montré qu’on pouvait définir des probabilités sur une σ -algèbre définie à partir de telles partitions de \mathbb{R}^d auquel on ajoute l’ensemble des points situés aux bords des cellules (voir Lantuéjoul (2002)).

Deux approches sont possibles pour calculer des propriétés portant sur des caractéristiques des grains (nombre de voisin, surface moyenne etc.). Dans le premier cas, on s’intéresse à la cellule qui contient l’origine (il en existe une avec probabilité 1), dénommé *cellule fondamentale*. Dans la seconde approche, on calcule la distribution d’une caractéristique sur l’ensemble des cellules de toutes les réalisations, ou sur toutes les cellules d’une réalisation d’un modèle ergodique. Bien qu’aucune cellule n’ait été choisie en particulier, on parle dans ce cas de *cellule typique*. Dans le premier cas, qui est

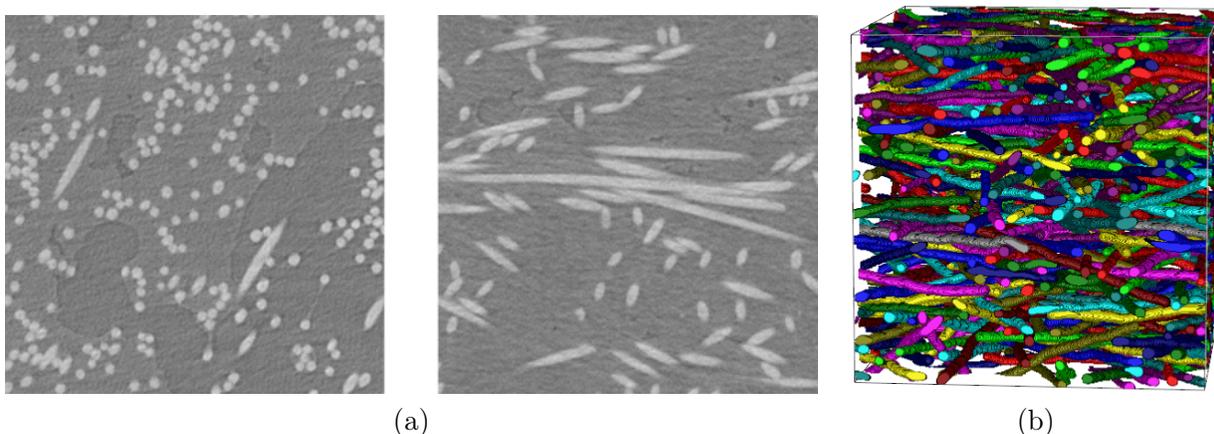


FIGURE 3 – (a) Milieu fibreux composite. (b) Modèle. Source : [Altendorf et al. \(2014\)](#).

une distribution en volume, les cellules de grand volume seront plus représentées que dans le second, qui consiste à calculer une distribution en nombre.

Dans tous les exemples suivants, on suppose que le nombre de cellules intersectées par un compact est fini avec probabilité 1.

6.1 Partition de Voronoi

La partition aléatoire de Poisson-Voronoi est définie par les zones d'influence $C(g, X)$ de germes d'un modèle de points de Poisson \mathcal{P} . La cellule $C(g, X)$ associée au germe $g \in \mathcal{P}$ est :

$$C(g, X) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x - g| < |x - g'| \forall g' \in \mathcal{P}, g' \neq g\}. \quad (58)$$

Cette cellule est un polytope convexe délimité par des parties d'hyperplans. Malgré la simplicité du modèle, les résultats analytiques sur le modèle de Voronoi sont limités. En trois dimensions, on connaît la distribution en volume de la surface de la cellule typique C_t , dont la moyenne s'écrit ([Miles, 1974](#); [Møller, 1989](#)) :

$$\mathbb{E}\{|\partial C_t|\} = \frac{2\sqrt{\pi}(d-1)!\Gamma(1+d/2)^{1-1/d}\Gamma(2-1/d)}{\theta^{1-1/d}\Gamma((d+1)/2)\Gamma(d-1/2)}, \quad (59)$$

où $\Gamma(\cdot)$ est l'extension de la fonction factorielle à \mathbb{R} ($\Gamma(n) = (n-1)!$ pour n entier). Des résultats similaires sont connus pour les longueurs moyennes des lignes triples du grain typique, et plus généralement pour les d' -volumes de dimension $d' < d$ des d' -facettes de la cellule typique de la partition aléatoire de Voronoi de dimension d .

La distribution *en nombre* de la surface ou du volume des cellules de Voronoi est souvent modélisée, de manière approchée, par des lois gamma ([Farjas & Roura, 2008](#); [Ferenc & Neda, 2007](#)), ce résultat étant exact en dimension 1. Il est à noter que la section 2D d'une partition 3D de Voronoi n'est pas une partition de Voronoi en deux dimensions. Celle-ci présente en particulier des distributions de taille de cellules distinctes.

La distribution du nombre de côtés de la cellule typique d'une partition de Voronoi bidimensionnelle a été calculé par [Calka \(2003a\)](#). Le même auteur a étudié la distribution de l'aire et du périmètre de la même cellule ([Calka, 2003b](#)) et d'autres quantités liées notamment à la taille du plus grand disque inclus dans la cellule typique, qui a pour centre un point de la cellule ([Calka, 2002](#)).

6.2 Partition de Johnson-Mehl

Une partition aléatoire de Johnson-Mehl est définie à partir d'un processus de points de Poisson dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$, la dernière dimension étant une dimension temporelle. Des germes g_i ($i = 1, \dots, N$) sont implantés de manière séquentielle à des temps t_i ($i = 1, \dots, N$). Les classes $C(g_i, X)$ associés sont données par :

$$C(g_i, X) = \{x \in \mathbb{R}^d : t_i + \frac{|x - g_i|}{v} < t_j + \frac{|x - g_j|}{v} \forall j \neq i, \}. \quad (60)$$

où v est une vitesse de propagation des bords des cellules. Un choix différent de v revient à changer l'échelle spatiale et ne modifie pas fondamentalement le modèle. Le modèle de Johnson-Mehl est peut-être le modèle le plus simple permettant de générer une partition aléatoire dont les grains ne sont pas convexes.

6.3 Partition de Laguerre

Les partitions aléatoires de Poisson-Voronoi et de Poisson-Johnson-Mehl ne dépendent essentiellement que d'un paramètre, l'intensité du processus de point de Poisson, qui est un facteur d'échelle et ne modifie que trivialement la structure obtenue. Dans beaucoup d'applications, on souhaite générer des partitions aléatoires avec une distribution prescrite d'une caractéristique géométrique des cellules. Par exemple, on se donne une distribution en nombre du volume des cellules. Pour cela, il convient, en reprenant les exemples précédents, d'assigner à chaque germe un poids représentatif des caractéristiques du grain.

Étant donné un processus de points de Poisson aléatoires g_i , la partition de Laguerre consiste à diviser \mathbb{R}^d en cellules définies par :

$$C(g_i, X) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x - g_i|^2 - r_i^2 < |x - g_j|^2 - r_j^2 \forall j \neq i, \}, \quad (61)$$

où les r_i sont des poids positifs affectés à chaque germe, qui suivent une certaine distribution \mathcal{R} . Tout comme la partition de Voronoi, les cellules d'une partition de Laguerre sont des convexes polytopes, cependant, contrairement au modèle de Voronoi, certaines cellules peuvent être vides, et certaines peuvent ne pas contenir leur germe. Le modèle de Laguerre offre surtout des degrés de liberté supplémentaires. On peut jouer sur la distribution de taille \mathcal{R} pour simuler des cellules avec des distributions de volume bien plus étalées que la partition aléatoire de Voronoi ([Lautensack & Zuyev, 2008](#)) ce qui permet de modéliser des milieux cellulaires ou des mousses ([Redenbach, 2009](#)), ou encore des polycristaux.

6.4 Partitions aléatoires de Poisson

On définit une partition aléatoire de Poisson par un ensemble d'hyperplans dans \mathbb{R}^d . Chaque hyperplan est paramétré par sa distance à l'origine ainsi qu'une direction dans la demi-hypersphère S_d^+ . Le modèle peut ainsi être vu comme un processus de Poisson dans $\mathbb{R}^d \times S_d^+$. Ainsi, il est complètement déterminé par un unique paramètre, l'intensité θ du processus de points de Poisson. Les cellules de la partition aléatoire de Poisson sont les parties de \mathbb{R}^d délimités par les hyperplans de Poisson.

Un grand nombre de résultats exacts sont disponibles concernant le polytope typique de la partition de Poisson. [Miles \(1964, 1974\)](#) a calculé son périmètre moyen ($d = 2$), le nombre moyen de sommets, la longueur totale moyenne de ses bords et sa surface moyenne ($d = 3$). De manière générale, pour le volume $F_{d'}$ de la variété de dimension $d' \leq d$ du polytope typique C_t :

$$\mathbb{E}\{F_{d'}\} = \binom{d}{d'} \frac{2^d}{\omega_{d'}(\omega_{d-1}\theta)^{d'}}. \quad (62)$$

Matheron (1975) donne la valeur moyenne de la fonction de Minkowski de C_t :

$$\mathbb{E}\{W_i(C_t)\} = \frac{\omega_i}{\omega_{d-i}} \left(\frac{2}{\omega_{d-1}\theta} \right)^{d-i}, \quad 0 \leq i \leq d. \quad (63)$$

Miles (1974) donne le nombre moyen $N_{d'}$ de la d' -face (variété de dimension $d' \leq d$) de la cellule typique C_t :

$$\mathbb{E}\{N_{d'}\} = 2^{d-d'} \binom{d}{d'}. \quad (64)$$

On montre de plus que la partition aléatoire obtenue par intersection d'une partition de Poisson dans \mathbb{R}^d par un hyperplan de dimension d' est encore une partition de Poisson dans $\mathbb{R}^{d'}$. Son intensité s'écrit (Miles, 1964) :

$$\theta' = \frac{\omega_{d-1}}{\omega_{d'-1}} \theta. \quad (65)$$

Les trois premiers moments de la distribution en volume de la cellule fondamentale C_f de la partition de Poisson ont été obtenus par Matheron (1975). En particulier sa moyenne s'écrit :

$$\mathbb{E}\{|C_f|\} = \frac{d!\omega_d}{(\omega_{d-1}\theta)^d}. \quad (66)$$

Les modèles de partitions aléatoires de Poisson ont été utilisés notamment pour modéliser les granulométries obtenues par tamisage de granulats de béton (Escoda *et al.*, 2015) ou encore pour modéliser les matériaux cimentaires (Heinemann *et al.*, 1999). D'autre part, ces cellules peuvent être utilisées comme grains primaires aléatoires de modèles booléens, par exemple pour représenter des carbures de tungstène (Quénec'h *et al.*, 1996).

6.5 Modèle de feuilles mortes

Le modèle de feuille morte est introduit à l'origine par Matheron (1968) et a été étendu par (Jeulin, 1979) (voir également Serra (1983)). Il s'agit d'un modèle booléen séquentiel qui asymptotiquement remplit tout l'espace et définit une partition aléatoire. On dispose de n « couleurs » indexées par un entier $i \in \mathcal{I}$. Les « feuilles » sont des compacts aléatoires de \mathbb{R}^d qui apparaissent en des temps $-\infty < t < 0$, selon un processus de points de Poisson d'intensité θ dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_-$. On assigne à chaque feuille une couleur dans \mathcal{I} indépendamment de la couleur des autres feuilles. Les feuilles de couleur i apparaissent dans l'intervalle de temps $[t; t + dt]$ avec une probabilité p_i . Celles apparues dans l'intervalle de temps $[t; t + dt]$ forment un modèle booléen de grain primaire le compact aléatoire A_i . On note $A(x, t)$ le grain apparu en x à l'instant t . Les grains recouvrent ceux apparus précédemment.

À l'instant $t = 0$, l'espace \mathbb{R}^d est recouvert en tout point par un grain avec une probabilité 1. La partition aléatoire est formée des cellules $A(x, t)$ non recouvertes. Celles-ci sont de plus marquées par une couleur dans \mathcal{I} . Les cellules ne sont pas en général connexes.

On sait calculer pour ce modèle la probabilité que chaque point y_i d'un ensemble fini de points $Y \subset \mathbb{R}^d$ soit de couleur donnée, dépendant de y_i (Lantuéjoul, 2002). En particulier on a accès à la distribution spatiale à deux points, qui s'écrit, en reprenant les notations de Lantuéjoul (2002) :

$$P\{Z(x) = i, Z(y) = j\} = \frac{a_i(a_j - b_j) + a_j(a_i - b_i) + ab_i\delta_{ij}}{a(2a - b)}, \quad (67)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, $Z(x)$ est la couleur de la partition au point x à l'instant $t = 0$ et :

$$a_i = \theta p_i \mathbb{E}\{|A_i|\}, \quad b_i = \theta p_i K_i(x - y), \quad a = \sum_i a_i, \quad b = \sum_i b_i, \quad (68)$$

avec $K_i(\cdot)$ le covariogramme géométrique de A_i :

$$\mathbb{E} \left\{ \left| \left(A_i \ominus \overline{\{x, y\}} \right) \setminus \left(A_i \oplus \overline{\{x\}} \right) \right| \right\} = K_i(0) - K_i(x - y). \quad (69)$$

Le modèle de feuilles mortes est souvent utilisé pour modéliser les phénomènes d’occlusion dans les images naturelles (Lee *et al.*, 2001), ou pour analyser les images bidimensionnelles obtenues par microscopie électronique, par exemple les poudres (Jeulin *et al.*, 1995). L’ensemble des grains intacts à $t = 0$ est par ailleurs un modèle aléatoire intéressant permettant de générer des empilements de forte densité, si on a bien choisi les intensités et grains au cours du temps (Jeulin, 2019).

6.6 Modèles de partitions aléatoires généralisées

Les partitions aléatoires reposant sur des processus de points de Poisson peuvent être généralisées en utilisant des métriques locales (non nécessairement euclidiennes) attachées à chaque germe (Jeulin, 2013) et réinterprétées à partir de modèles de fonctions booléennes. La figure (4a) montre un exemple de partition aléatoire à grains non convexes (Gasnier *et al.*, 2015a), obtenue à partir d’un modèle de Johnson-Mehl généralisée avec distance anisotrope. Celui-ci modélise un polycristal dont les joints de grains, vue par microscopie électronique à balayage (MEB), ont été détournés (figure 4b). Le modèle est tridimensionnel, l’image MEB bidimensionnelle. Les formes de cellules du modèle de Johnson-Mehl avec distance anisotrope sont plus allongées que dans le modèle de Johnson-Mehl classique. Le modèle est macroscopiquement isotrope.

On peut citer également Figliuzzi (2019) qui propose une approche permettant de générer des interfaces entre grains avec rugosité contrôlée et une méthode de simulation rapide de partitions aléatoires sur une grille de voxels.

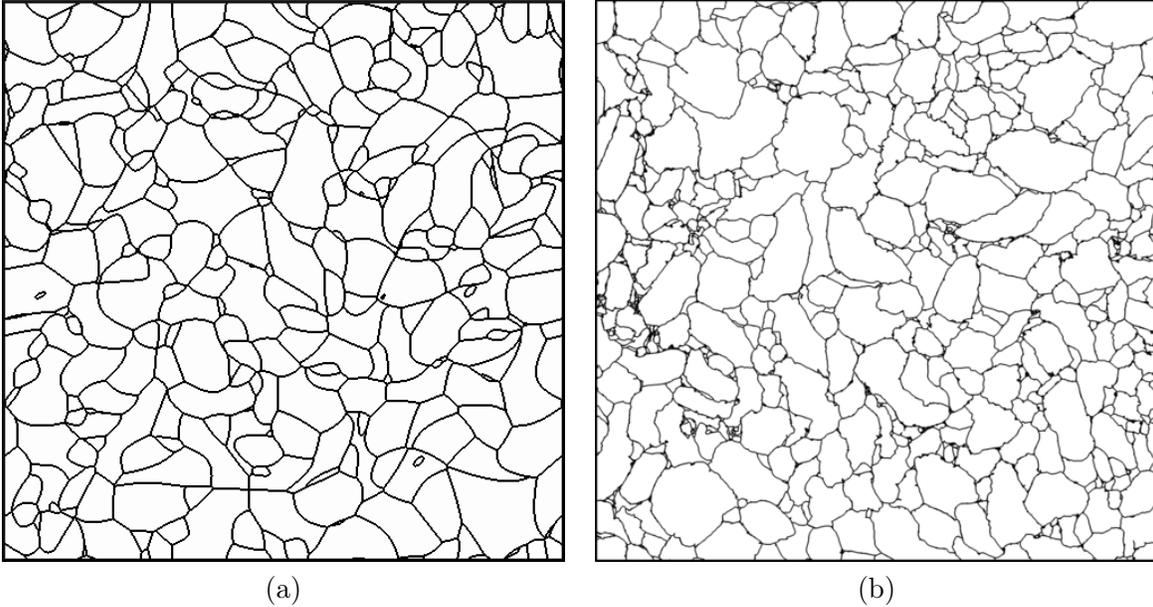


FIGURE 4 – a) Section bidimensionnelle d’une partition aléatoire de Johnson-Mehl modélisant un polycristal. b) Image expérimentale segmentée. Source image a) : d’après Gasnier *et al.* (2015b). Image b) : Philippe Lambert/CEA le Ripault.

7 Champs gaussiens

On décrit brièvement dans cette partie comment définir et simuler une fonction aléatoire gaussienne ainsi qu'une excursion gaussienne. La théorie des fonctions gaussiennes est étudiée à l'origine par [Rice \(1944\)](#) dans le cas unidimensionnel et par [Longuet-Higgins \(1957\)](#) en deux dimensions. [Bardeen *et al.* \(1985\)](#) définit une fonction aléatoire gaussienne comme une fonction dont les lois de distribution à n points sont des gaussiennes multivariées.

Les modèles d'excursion gaussienne permettent en particulier de simuler des microstructures ayant une fonction de covariance fixée. La covariance détermine par ailleurs entièrement la fonction aléatoire gaussienne. Dans la suite de cette sous-section, on explicite comment générer un tel modèle. On pourra voir [Lantuéjoul \(1994, 2002\)](#) pour une description détaillée des fonctions aléatoires gaussiennes.

Soit $U(x)$ un bruit gaussien, c'est-à-dire telle que $U(x)$ est une distribution normale pour tout x et $U(x), U(x')$ sont indépendants si $x \neq x'$.

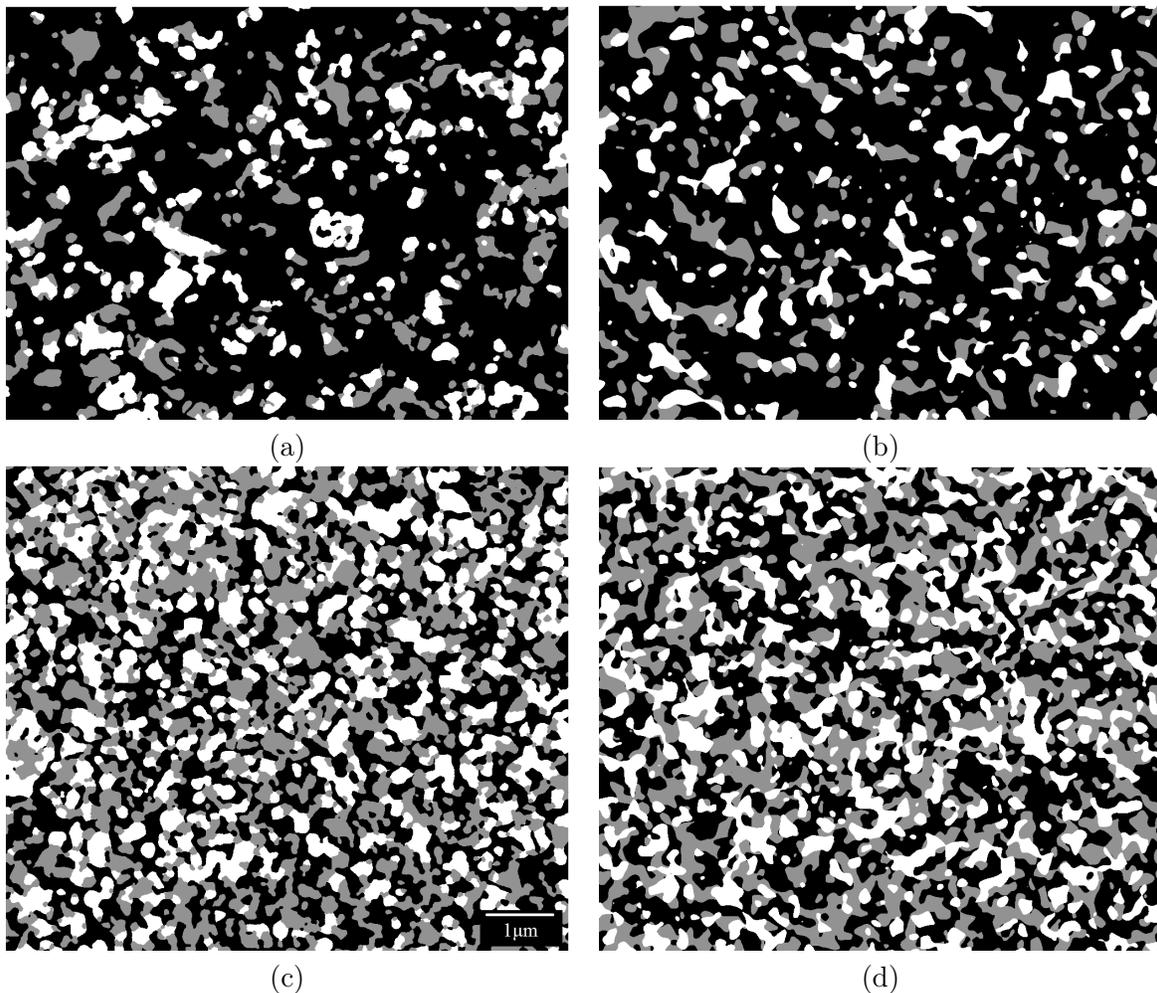


FIGURE 5 – a), c) : Image MEB (après segmentation) de couches d'anodes de piles à combustibles. b), d) : Modèle de plurigaussiennes. Source : d'après [Abdallah *et al.* \(2015\)](#).

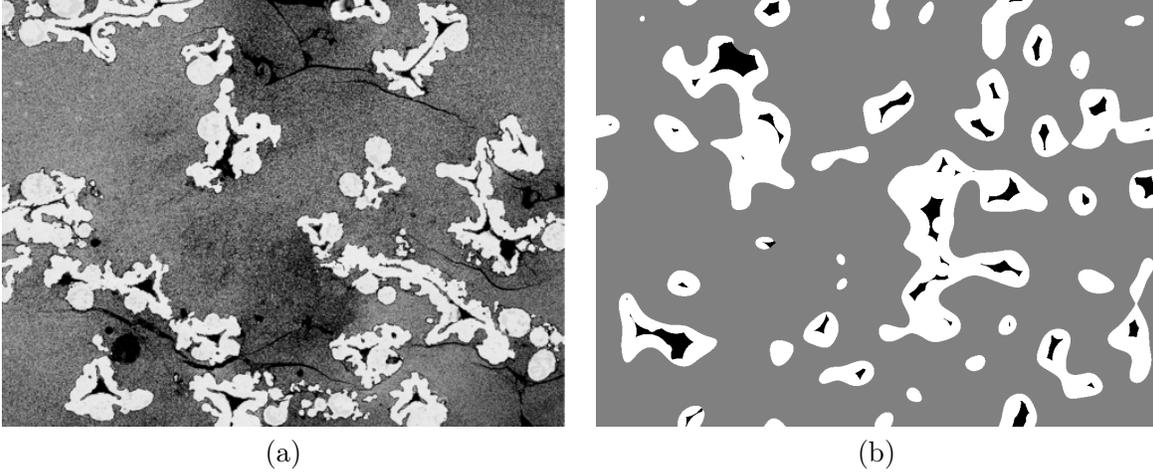


FIGURE 6 – a) Image MEB d'une mousse issue de piles à combustible. b) Réalisation d'un modèle « booléen aléatoire à coque ». Source : d'après [Abdallah \(2015\)](#). Image a) : A. Chesnaud/Mines ParisTech.

On considère la fonction aléatoire $Z(x)$ et l'ensemble aléatoire X :

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^d; Z(x) \geq \lambda \right\}, \quad (70a)$$

$$Z(x) = (w * U)(x), \quad U(x) \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad (70b)$$

où w est une fonction de poids, λ un scalaire, $*$ désigne un produit de convolution, et $\mathcal{N}(0, 1)$ est la distribution normale de moyenne nulle et de variance 1. La moyenne de la fonction indicatrice de X vaut :

$$f = P\{Z(x) \geq \lambda\} = P\{\mathcal{N}(0, 1) \geq \lambda\}, \quad (71)$$

ce qui détermine λ en fonction de f :

$$\lambda = F^{-1}(1 - f), \quad (72)$$

où F est la fonction de distribution cumulée de la distribution normale. La fonction de poids w vérifie :

$$\int_{\Omega} w^2(x) dx = 1, \quad w(x) = w(-x). \quad (73)$$

Celle-ci est reliée à la covariance $C(h)$ de X par ([Bron & Jeulin, 2011](#)) :

$$C(h) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\rho(h)} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} e^{-\frac{\lambda^2}{1+t}} dt, \quad (74)$$

où $\rho_X(h) = (w * w)(h)$. La fonction w est obtenue grâce à :

$$w = FT^{-1} \left\{ \sqrt{FT\{\rho\}} \right\}, \quad (75)$$

où FT et FT^{-1} sont les transformées de Fourier direct et inverse dans \mathbb{R}^d . Une fois λ calculé, la fonction ρ est obtenue en inversant numériquement (74) et w est donné par (75).

Un modèle reposant sur des excursions gaussiennes est développé par [Abdallah et al. \(2015\)](#) (figure 5). Pour simuler un milieu aléatoire à trois phases, on suppose qu'il existe deux ensembles aléatoires indépendants X et Y tels que l'une des phases est donnée par X , une autre par $Y \setminus X$ et la

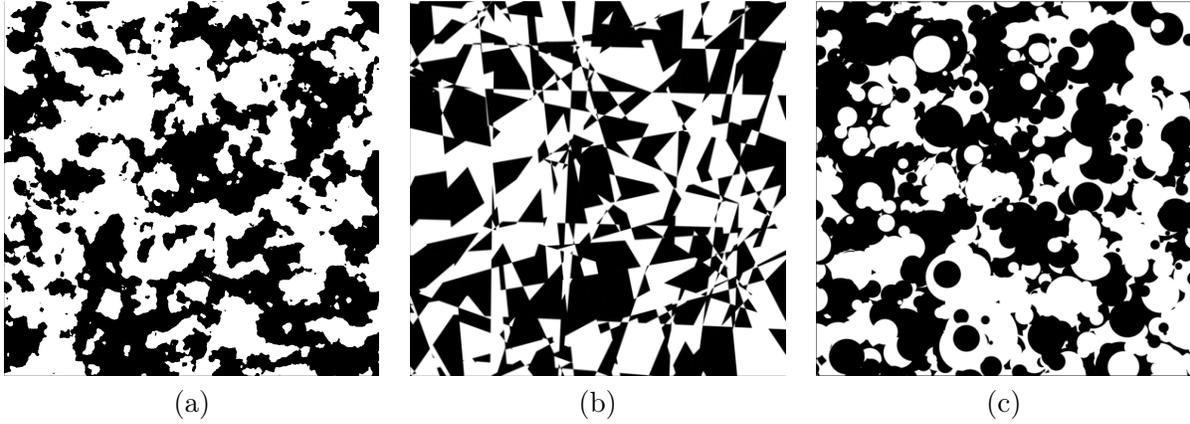


FIGURE 7 – Réalisations aléatoires de trois modèles probabilistes avec la même fonction trivariée. a) Excursion gaussienne. b) Partition aléatoire de Poisson. c) Modèle de feuilles mortes. Source : d’après [Chilès & Lantuéjoul \(2005\)](#).

troisième par le complémentaire de l’union des deux autres. De part l’indépendance des ensembles aléatoires X et Y , la covariance croisée C_{12} des phases 1 et 2 est donnée par les covariances C_1 et C_2 de ces mêmes phases. En effet :

$$\begin{aligned} C_{12}(h) &= P\{x \in \text{phase (1)} ; x + h \in \text{phase (2)}\} \\ &= \frac{C_2(0)[C_1(0) - C_1(h)]}{1 - C_1(0)}. \end{aligned} \quad (76)$$

Cette propriété permet de tester si une modélisation à l’aide d’ensembles indépendants X et Y est possible, peu importe le choix de X et de Y . De plus, on peut calculer les covariances de X et Y à partir de celles des phases 1 et 2. La figure (5) représente les résultats obtenus dans le cas d’excursions gaussiennes pour X et Y . Ce modèle est utilisé pour représenter la microstructure de couches d’anode formée de deux phases solide et d’une phase poreuse, présent dans certaines piles à combustible, et dont on ne connaît que des représentations bidimensionnelles. Le modèle a été comparé à une approche basée sur des graphes ([Neumann *et al.*, 2019](#)).

8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques-uns des modèles aléatoires parmi les plus utilisés. Ils sont parcimonieux, au sens où ils sont définis par peu de paramètres. D’autre part, ils peuvent en général être facilement simulés, et on dispose en plus, dans certains cas, de résultats analytiques exacts. Dans les cas de figure les plus simples, ils peuvent être directement mis en œuvre pour modéliser une microstructure particulière. Dans d’autres cas, il conviendra de combiner plusieurs modèles pour générer des structures représentatives des microstructures, notamment multi-échelles (un exemple de combinaison de modèles est représenté en figure 6). Les calculs et simulations numériques, non abordées dans ce chapitre, sont alors souvent nécessaires.

La difficulté principale de ces approches réside dans la détermination des critères morphologiques pertinents et dans le choix du modèle. Pour illustrer cette problématique, on peut se référer à la figure (7) qui représente trois microstructures isotropes ayant les mêmes fonctions covariances et les mêmes fonctions à trois points ([Chilès & Lantuéjoul, 2005](#)). Cet exemple illustre à quel point les covariances et même les fonctions trivariées, restent « aveugles » et ne permettent pas de distinguer l’une de l’autre des géométries pourtant très différentes. Dans le cadre des approches par ensembles aléatoires, la question du choix du modèle reste un problème ouvert.

Remerciements L’auteur remercie Christian Lantuéjoul pour les images de la figure (7), Hervé Trumel pour l’image de la figure (4), Christian Gogu et Delphine Livet pour leur travail de relecture ainsi que G. Moreira pour la traduction de ce texte en anglais.

Bibliographie

- Abdallah, B. (2015), Analyse morphologique et modélisation pour l’optimisation structurelle d’électrodes, PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- Abdallah, B., Willot, F., Jeulin, D. (2015), Stokes flow through a Boolean model of spheres : Representative volume element, *Transport in Porous Media*, 109(3), 711–726.
- Altendorf, H., Jeulin, D. (2011), Random-walk-based stochastic modeling of three-dimensional fiber systems, *Physical Review E*, 83(4), 041804.
- Altendorf, H., Jeulin, D., Willot, F. (2014), Influence of the fiber geometry on the macroscopic elastic and thermal properties, *International Journal of Solids and Structures*, 51(23), 3807–3822.
- Angulo, J. (2012), Morphologie mathématique pour des images multi-variées, PhD thesis, Université Paris-Est Marne la Vallée.
- Avrami, M. (1939), Kinetics of phase change. I General theory, *The Journal of chemical physics*, 7(12), 1103–1112.
- Azzimonti, D., Willot, F., Jeulin, D. (2013), Optical properties of deposit models for paints :full-fields FFT computations and representative volume element, *Journal of Modern Optics*, 60(7), 519–528.
- Bardeen, J., Szalay, A., Kaiser, N., Bond, J. (1985), The statistics of peaks of Gaussian random fields, *Astrophysics Journal*, 304, 15–61.
- Berryman, J., Milton, G. (1985), Normalization constraint for variational bounds on fluid permeability, *The Journal of chemical physics*, 83(2), 754–760.
- Bignonnet, F. (2018), Upper bounds on the permeability of random porous media, *Transport in Porous Media*, 122(1), 57–76.
- Bochner, S. (1959), *Lectures on Fourier integrals*, Princeton University Press.
- Bortolussi, V., Figliuzzi, B., Willot, F., Faessel, M., Jeandin, M. (2018), Morphological modeling of cold spray coatings, *Image Analysis & Stereology*, 37(2), 145–158.
- Bron, F., Jeulin, D. (2011), Modelling a food microstructure by random sets, *Image Analysis & Stereology*, 23(1), 33–44.
- Brumberger, H., Goodisman, J. (1983), Voronoi cells : An interesting and potentially useful cell model for interpreting the small-angle scattering of catalysts, *Journal of Applied Crystallography*, 16(1), 83–88.
- Calka, P. (2002), The distributions of the smallest disks containing the Poisson-Voronoi typical cell and the crofton cell in the plane, *Advances in Applied Probability*, 34(4), 702–717.
- Calka, P. (2003a), An explicit expression for the distribution of the number of sides of the typical Poisson-Voronoi cell, *Advances in Applied Probability*, 35(4), 863–870.

- Calka, P. (2003*b*), Precise formulae for the distributions of the principal geometric characteristics of the typical cells of a two-dimensional Poisson-Voronoi tessellation and a Poisson line process, *Advances in Applied Probability*, 35(3), 551–562.
- Chilès, J., Lantuéjoul, C. (2005), Prediction by conditional simulation, in M. Bilodeau, F. Meyer, M. Schmitt, (eds), *Space, structure and randomness – Contributions in honor of Georges Matheron in the fields of geostatistics, random sets and mathematical morphology*, Springer, New York, pp. 39–68.
- Chiles, J.-P., Delfiner, P. (2009), *Geostatistics : modeling spatial uncertainty*, vol. 497, John Wiley & Sons.
- Choquet, G. (1954), Theory of capacities, in *Annales de l’institut Fourier*, vol. 5, pp. 131–295.
- Christakos, G. (1984), On the problem of permissible covariance and variogram models, *Water Resources Research*, 20(2), 251–265.
- Cressie, N., Laslett, G. M. (1987), Random set theory and problems of modeling, *SIAM review*, 29(4), 557–574.
- Daley, D. J., Vere-Jones, D. (1988), *An Introduction to the Theory of Point Processes Springer Series in Statistics*, New York : Springer-Verlag.
- Doi, M. (1976), A new variational approach to the diffusion and the flow problem in porous media, *Journal of the Physical Society of Japan*, 40(2), 567–572.
- Emery, X., Lantuéjoul, C. (2011), Geometric covariograms, indicator variograms and boundaries of planar closed sets, *Mathematical Geosciences*, 43(8), 905–927.
- Escoda, J. (2012), Modélisation morphologique et micromécanique 3D de matériaux cimentaires, PhD thesis, École nationale supérieure des mines de Paris.
- Escoda, J., Jeulin, D., Willot, F., Toulemonde, C. (2015), 3D morphological modeling of concrete using multiscale Poisson polyhedra, *Journal of Microscopy*, 258(1), 31–48.
- Farjas, J., Roura, P. (2008), Cell size distribution in a random tessellation of space governed by the kolmogorov-johnson-mehl-avrami model : Grain size distribution in crystallization, *Physical Review B*, 78(14), 144101.
- Ferenc, J.-S., Nédá, Z. (2007), On the size distribution of Poisson Voronoi cells, *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 385(2), 518–526.
- Figliuzzi, B. (2019), Eikonal-based models of random tessellations, *Image Analysis & Stereology*, 38(1), 15–23.
- Gasnier, J., Figliuzzi, B., Faessel, M., Willot, F., Jeulin, D., Trumel, H. (2015a), 3D morphological modeling of a polycrystalline microstructure with non-convex, anisotropic grains, in *Acta Stereologica : Proceedings of the 14th International Congress for Stereology and Image Analysis (ICSIA)*, Liège, July 7-10. Online at <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01184811>.
- Gasnier, J., Willot, F., Trumel, H., Figliuzzi, B., Jeulin, D., Biessy, M. (2015b), A Fourier-based numerical homogenization tool for an explosive material, *Matériaux & Techniques*, 103(3), 308.
- Gille, W. (1987), The intercept length distribution density of a cylinder of revolution, *Experimentelle Technik der Physik*, 35(2), 93–98.

- Gille, W. (2002), The set covariance of a dead leaves model, *Advances in Applied Probability*, 34(1), 11–20.
- Gille, W. (2016), *Particle and particle systems characterization : small-angle scattering (SAS) applications*, CRC Press.
- Greco, A., Jeulin, D., Serra, J. (1979), The use of the texture analyser to study sinter structure : application to the morphology of calcium ferrites encountered in basic sinters of rich iron ores, *Journal of Microscopy*, 116(2), 199–211.
- Hadwiger, H. (1957), Über eibereiche mit gemeinsamer treffgeraden, *Portugaliae mathematica*, 16(1), 23–29.
- Heinemann, A., Hermann, H., Wetzig, K., Häussler, F., Baumbach, H., Kröning, M. (1999), Fractal microstructures in hydrating cement paste, *Journal of materials science letters*, 18(17), 1413–1416.
- Heinrich, L. (1992), On existence and mixing properties of germ-grain models, *Statistics*, 23(3), 271–286.
- Jean, A., Jeulin, D., Forest, S., Cantournet, S., N’Guyen, F. (2011), A multiscale microstructure model of carbon black distribution in rubber, *Journal of microscopy*, 241(3), 243–260.
- Jeulin, D. (1979), Morphologie mathématique et propriétés physiques des agglomérés de minerais de fer et du coke métallurgique, *Thèse de Docteur-Ingénieur en Sciences et Techniques Minières, Option Géostatistique, École des Mines de Paris*, 23.
- Jeulin, D. (2013), Random tessellations and Boolean random functions, in *International Symposium on Mathematical Morphology and Its Applications to Signal and Image Processing*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 7883, Springer, pp. 25–36.
- Jeulin, D. (2016), Power laws variance scaling of Boolean random varieties, *Methodology and Computing in Applied Probability*, 18(4), 1065–1079.
- Jeulin, D. (2019), Some dense random packings generated by the dead leaves model, *Image Analysis & Stereology*, 38(1), 3–13.
- Jeulin, D., Ostoja-Starzewski, M. (2001), *Mechanics of random and multiscale microstructures*, Springer.
- Jeulin, D., Villalobos, I. T., Dubus, A. (1995), Morphological analysis of UO₂ powder using a dead leaves model, *Microscopy Microanalysis Microstructures*, 6(4), 371–384.
- Kendall, D. G. (1974), Foundations of a theory of random sets, in E. F. Harding, D. G. Kendall, (eds), *Stochastic geometry : a tribute to the memory of Rollo Davidson*, Wiley, London, pp. 322–376.
- Lantuéjoul, C. (1991), Ergodicity and integral range, *Journal of Microscopy*, 161(3), 387–403.
- Lantuéjoul, C. (1994), Non conditional simulation of stationary isotropic multigaussian random functions, in *Geostatistical simulations*, Springer, pp. 147–177.
- Lantuéjoul, C. (2002), *Geostatistical simulation : models and algorithms*, Springer Science & Business Media.
- Lautensack, C., Zuyev, S. (2008), Random Laguerre tessellations, *Advances in applied probability*, 40(3), 630–650.

- Lee, A., Mumford, D., Huang, J. (2001), Occlusion models for natural images : A statistical study of a scale-invariant dead leaves model, *International Journal of Computer Vision*, 41(1-2), 35–59.
- Longuet-Higgins, M. S. (1957), The statistical analysis of a random, moving surface, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 249(966), 321–387.
- Månsson, M., Rudemo, M. (2002), Random patterns of nonoverlapping convex grains, *Advances in Applied Probability*, 34(4), 718–738.
- Matheron, G. (1965), *Les variables régionalisées et leur estimation : une application de la théorie des fonctions aléatoires aux sciences de la nature*, Masson, Paris.
- Matheron, G. (1967), *Éléments pour une théorie des milieux poreux*, Masson, Paris.
- Matheron, G. (1968), Schéma booléen séquentiel de partition aléatoire, *Rapport technique N-83, Centre de Morphologie Mathématique, École des Mines de Paris*, 214. Online at http://cg.ensmp.fr/bibliotheque/public/MATHERON_Rapport_00121.pdf. Accessed May 19, 2019.
- Matheron, G. (1969), *Théorie des ensembles aléatoires*, École Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- Matheron, G. (1972), Ensembles fermés aléatoires, ensembles semi-markoviens et polyèdres poissoniens, *Advances in Applied Probability*, 4(3), 508–541.
- Matheron, G. (1975), *Random sets and integral geometry*, Wiley, New-York.
- Matheron, G. (1989a), *Estimating and choosing : an essay on probability in practice*, Springer Science & Business Media.
- Matheron, G. (1989b), The internal consistency of models in geostatistics, *in Geostatistics*, Springer, pp. 21–38.
- Matheron, G., Serra, J. (1982), *Image analysis and mathematical morphology*, London : Academic Press.
- Miles, R. E. (1964), Random polytopes : the generalisation to n dimensions of the intervals of a Poisson process, PhD thesis, University of Cambridge.
- Miles, R. E. (1974), A synopsis of “Poisson flats in Euclidean spaces”, *Stochastic Geometry*, pp. 202–227.
- Milton, G. W. (2002), *The Theory of Composites*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- Molchanov, I. S. (2005), *Theory of random sets*, vol. 19, Springer.
- Møller, J. (1989), Random tessellations in \mathbb{R}^d , *Advances in Applied Probability*, 21(1), 37–73.
- Neumann, M., Abdallah, B., Holzer, L., Willot, F., Schmidt, V. (2019), Stochastic 3d modeling of three-phase microstructures for the prediction of transport properties in solid oxide fuel cells, *Transport in Porous Media*, 128(1), 179–200.
- Quénech, J.-L., Chermant, J.-L., Coster, M., Jeulin, D. (1996), Example of application of probabilistic models : Determination of the kinetics parameters during liquid phase sintering, *Microscopy Microanalysis Microstructures*, 7(5-6), 573–580.

- Redenbach, C. (2009), Microstructure models for cellular materials, *Computational Materials Science*, 44(4), 1397–1407.
- Redenbach, C., Wirjadi, O., Rief, S., Wiegmann, A. (2011), Modeling a ceramic foam for filtration simulation, *Advanced Engineering Materials*, 13(3), 171–177.
- Rice, S. O. (1944), Mathematical analysis of random noise, *Bell System Technical Journal*, 23(3), 282–332.
- Schneider, R., Weil, W. (2008), *Stochastic and integral geometry*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Serra, J. (1980), The boolean model and random sets, *Computer Graphics and Image Processing*, 12(2), 99–126.
- Serra, J. (1981), The boolean model and random sets, in *Image Modeling*, Academic Press, pp. 343–370.
- Serra, J. (1983), *Image analysis and mathematical morphology*, Academic Press, Inc.
- Stroeven, P. (2000), A stereological approach to roughness of fracture surfaces and tortuosity of transport paths in concrete, *Cement and Concrete Composites*, 22(5), 331–341.
- Talbot, J., Tarjus, G., Van Tassel, P., Viot, P. (2000), From car parking to protein adsorption : an overview of sequential adsorption processes, *Colloids and Surfaces A : Physicochemical and Engineering Aspects*, 165(1-3), 287–324.
- Torquato, S. (1995), Nearest-neighbor statistics for packings of hard spheres and disks, *Physical Review E*, 51(4), 3170.
- Torquato, S. (2013), *Random heterogeneous materials : microstructure and macroscopic properties*, vol. 16, Springer Science & Business Media, New-York, USA.
- Van Lieshout, M. (2000), *Markov point processes and their applications*, World Scientific.
- Wang, H., Pietrasanta, A., Jeulin, D., Willot, F., Faessel, M., L., S., Moreaud, M. (2015), Modeling of mesoporous alumina microstructure by 3D random models of platelets, *Journal of Microscopy*, 260(3), 287–301.
- Willot, F. (2015), The power laws of geodesics in some random sets with dilute concentration of inclusions, *Lecture Notes in Computer Science*, 9082, 535–546.
- Willot, F. (2017), Mean covariogram of cylinders and applications to Boolean random sets, *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, 52(6), 305–315.
- Willot, F., Abdallah, B., Jeulin, D. (2016), The permeability of Boolean sets of cylinders, *Oil & Gas Science and Technology*, 71(52).
- Willot, F., Jeulin, D. (2011), Elastic and electrical behavior of some random multiscale highly-contrasted composites, *International Journal for Multiscale Computational Engineering : special issue on multiscale modeling and uncertainty quantification of heterogeneous materials*, 9(3), 305–326.